

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8

MÔN: TOÁN 8

(Thời gian làm bài : 120 phút)

Câu 1. (3 điểm)

a) Cho biểu thức $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $A > 0$

b) Chứng minh rằng $a^5 - a \vdots 30 (a \in \mathbb{Z})$

Câu 2. (2 điểm)

Giải phương trình : $|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Một đường thẳng d qua O song song với 2 đáy cắt hai cạnh bên AD, BC lần

lượt tại E và F. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho $AN = CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng KD là tia phân giác của $\angle AKC$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned}A &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4) \\&= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\&= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)\end{aligned}$$

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

$$a+b+c > 0; a+b-c > 0; c+a-b > 0; c-a+b > 0 \Rightarrow A > 0$$

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5]$$

$$b) = a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1)$$

Do tích của số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) \vdots 30$ và $5a(a+1)(a-1) \vdots 30$.

Vậy $a^5 - a \vdots 30$

Câu 2.

$$|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$$

$$\Leftrightarrow |(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| = 2x - 4$$

(1)

Do

$$|(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| \geq 0 \quad (\forall x, y)$$

$$\Rightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Với } x \geq 2 \text{ thì } |(x-y+1)^2 + x - 2| = (x-y+1)^2 + x - 2; |(x-1)(x-2)| = x^2 - 3x + 2$$

Khi đó từ phương trình (1)

$$\Rightarrow (x-y+1)^2 + x - 2 + (x-1) = 2(x-2) \Leftrightarrow (x-y+1)^2 = (x-2)(2-x+1-1) = -(x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ và } x-y+1=0 \Leftrightarrow x=2; y=3(tm)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $(x, y) = (2; 3)$

Câu 3.

Giả sử

$$a + b > 2 \Leftrightarrow (a + b)^3 > 2^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3ab(a + b) > 8(a^3 + b^3 = 2)$$

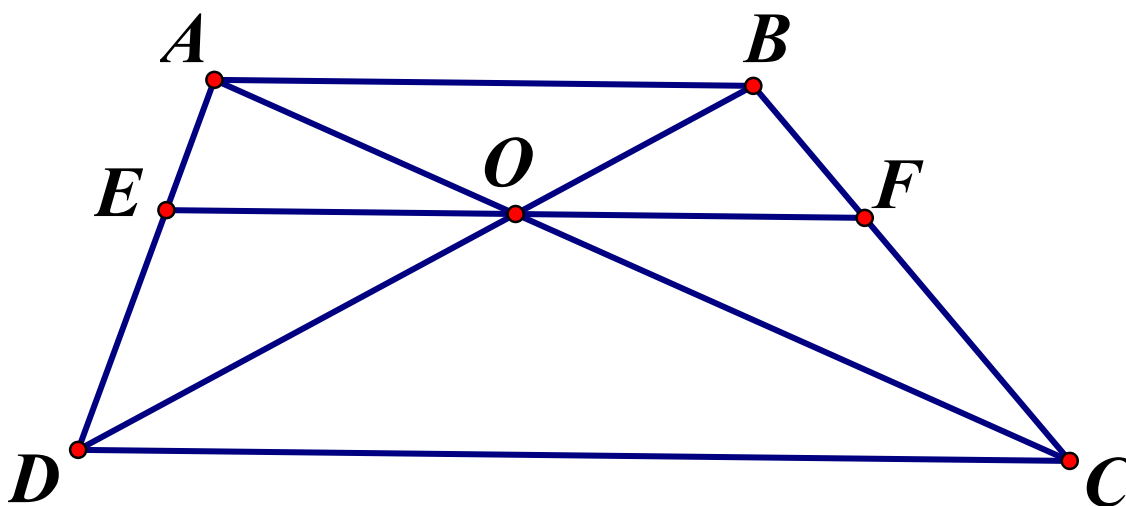
$$\Leftrightarrow 3ab(a + b) > 6 \Leftrightarrow ab(a + b) > 2 \Leftrightarrow ab(a + b) > a^3 + b^3 (a^3 + b^3 = 2)$$

$$\Leftrightarrow ab(a + b) > (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow ab > a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 < 0 \text{ (Vô lý)}$$

Vậy $a + b \leq 2$

Câu 4.



Xét $\triangle ABD$ có $OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{OD}{DB}$ (Hệ quả định lý Talet) (1)

Xét $\triangle ABC$ có $OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BD}$ (hệ quả định lý Talet) (2)

Xét $\triangle ABC$ có $OF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC}$ (hệ quả định lý Talet) (3)

Xét $\triangle ABD$ có $OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC}$ (Hệ quả định lý Talet) (4)

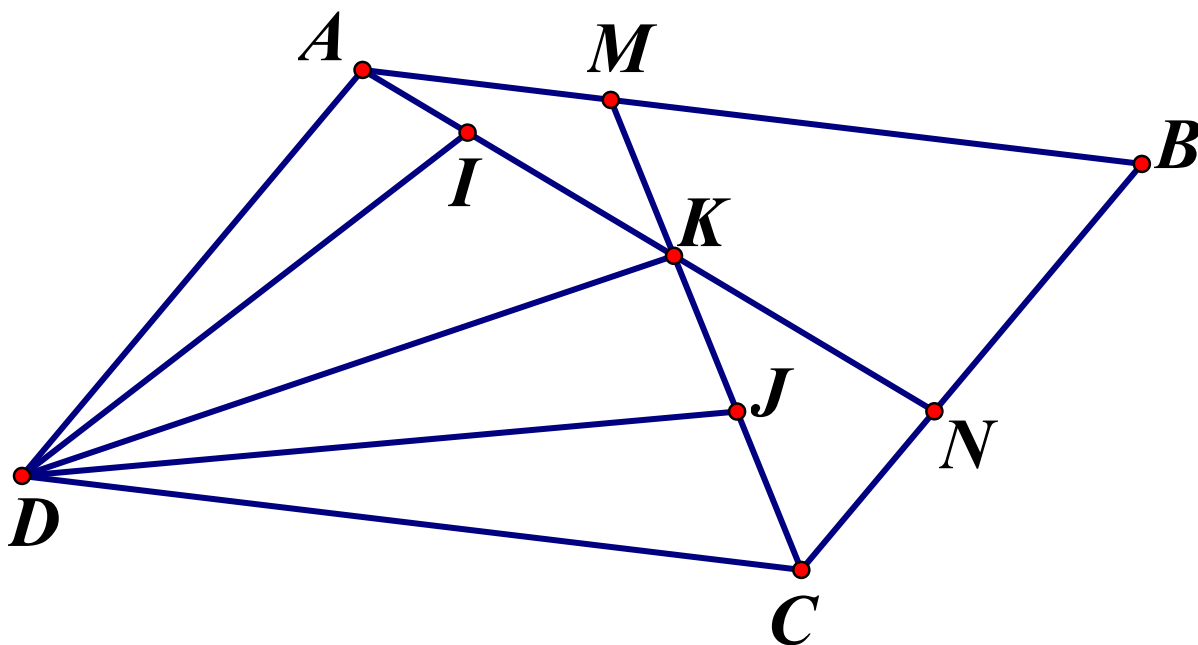
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra

$$\frac{OE}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OF}{AB} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OE}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC} \Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$$

Câu 5.



Kẻ DI, DJ lần lượt vuông góc với AK, CK

Ta có: $S_{AND} = \frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (Do chung đáy AD, cùng chiều cao hạ từ N) (1)

$S_{CDM} = \frac{1}{2} CM \cdot DJ = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (Do chung đáy CD, cùng chiều cao hạ từ M) (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} CM \cdot DJ \Leftrightarrow DI = DJ$ (Vì $AN = CM$)

$\Rightarrow \triangle DIK = \triangle DJK$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle IKD = \angle JKD$

$\Rightarrow KD$ là tia phân giác $\angle AKC$