

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Môn: Toán lớp 8

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

Rút gọn biểu thức
$$B = \frac{x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(x+y)^2 + (y-z)^2 + (x+z)^2}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Tìm số dư trong phép chia đa thức $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+9$ cho $x^2 + 8x + 12$.

b) Tìm mọi số nguyên x sao cho $x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ chia hết cho $x^2 + 3$

Câu 3. (4,0 điểm)

Giải các phương trình:

a)
$$\left(\frac{1}{4}x + 3\right)^3 + \left(\frac{3}{4}x - 4\right)^3 + (1-x)^3 = 0$$

b)
$$x\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\left(x + \frac{3-x}{x+1}\right) = 2$$

Câu 4. (4,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = |3x+1| + |x+2| - 4x + 3$

b)
$$B = \frac{14x^2 - 8x + 9}{3x^2 + 6x + 9}$$

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A. M, D tương ứng là trung điểm của BC, AM. H là hình chiếu của M trên CD. AH cắt BC tại N, BH cắt AM tại E. Chứng minh rằng

a) $\triangle MHD \sim \triangle CMD$

b) E là trực tâm $\triangle ABN$

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD và N là một điểm trên đường chéo AC sao cho $\angle BNM = 90^\circ$. Gọi F là điểm đối xứng của A qua N. Chứng minh rằng $FB \perp AC$.

ĐÁP ÁN

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned}
 x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) - z^3 - 3xyz \\
 &= (x - y - z)^3 + 3(x - y)z(x - y - z) + 3xy(x - y - z) \\
 &= (x - y - z) \left[(x - y - z)^2 + 3xz - 3yz + 3xy \right] \\
 &= (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 3xz - 3yz + 3xy) \\
 &= (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *) (x + y)^2 + (y - z)^2 + (x + z)^2 \\
 &= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 \\
 &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{(x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)}{2(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)} = \frac{x - y - z}{2}$$

Vậy

Câu 2.

a) Đặt $f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 9$

Ta có: $A = (x+1)(x+7)(x+3)(x+5) + 9$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 9 \\
 &= (x^2 + 8x + 7) \left[(x^2 + 8x + 12) + 3 \right] + 9 \\
 &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 7) + 9 \\
 &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 12) + 3(x^2 + 8x + 12) + 9 - 15 \\
 &= (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10) - 6
 \end{aligned}$$

Vậy số dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 + 8x + 12$ là -6

b) Thực hiện phép chia đa thức $B = x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ cho $C = x^2 + 3$, ta được:

Đa thức thương: $x - 2$; đa thức dư: $4x - 1$

Suy ra: $x^3 - 2x^2 + 7x - 7 = (x^2 + 3)(x - 2) + 4x - 1$

Do đó $B : (x^2 + 3) \Leftrightarrow (4x - 1) : (3x^2 + 3) \quad (1)$

Vì $4x \neq 1$ vs $4x \neq -1$ nên:

$$(1) \Rightarrow (4x - 1)(4x + 1) : x^2 + 3$$

$$\Rightarrow (16x^2 - 1) : (x^2 + 3) \Rightarrow 16(x^2 + 3) + 49 : (x^2 + 3)$$

$$\Rightarrow 49 : (x^2 + 3)$$

Vì $x^2 + 3 \geq 3$ nên xảy ra một trong hai trường hợp sau:

• $x^2 + 3 = 49$, không có giá trị nào thỏa mãn

$$\bullet x^2 + 3 = 7 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(tm) \\ x = -2(ktm) \end{cases}$$

Vậy $x = 2$

Câu 3.

a) Đặt $a = \frac{1}{4}x + 3; b = \frac{3}{4}x - 4 \Rightarrow a + b = x - 1 \Rightarrow 1 - x = -(a + b)$

Ta có (pt đề) $\Leftrightarrow a^3 + b^3 - (a + b)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^3 - b^3 - 3ab(a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3ab(a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + 3 = 0 \\ \frac{3}{4}x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = \frac{16}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ -12; \frac{16}{3}; 1 \right\}$$

Vậy

b) ĐKXD: $x \neq -1$

$$x \left(\frac{3 - x}{x + 1} \right) \left(x + \frac{3 - x}{x + 1} \right) = 2 \Leftrightarrow \frac{3x - x^2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + x - 3 - x}{x + 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x - x^2)(x^2 + 3)}{(x + 1)^2} = 2$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 9x - x^4 - 3x^2 = 2x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 \cdot (x^2 - x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (tm) \\ VN \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}$$

Câu 4.

a) Áp dụng tính chất $|a| \geq a$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a \geq 0$, ta có:

$$A = |3x + 1| + |x + 2| - 4x + 3 \geq 3x + 1 + x - 2 - 4x + 3 = 6 \Rightarrow A \geq 6$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 3x + 1 \geq 0 \text{ và } x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3} \text{ và } x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \min A = 6 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

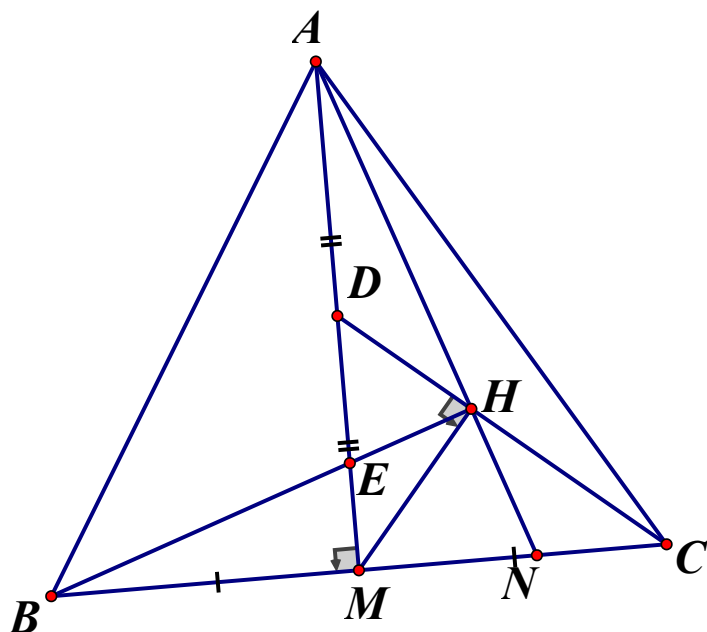
$$\text{b) Ta có } B - \frac{2}{3} = \frac{14x^2 - 8x + 9}{3x^2 + 6x + 9} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{(14x^2 - 8x + 9) - 2(x^2 + 2x + 3)}{3(x^2 + 2x + 3)} = \frac{12x^2 - 12x + 3}{3(x^2 + 2x + 3)} = \frac{(2x - 1)^2}{(x + 1)^2 + 2}$$

$$\text{Với mọi } x, \text{ ta có: } 3(2x - 1)^2 \geq 0, (x + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x - 1)^2}{(x + 1)^2 + 2} \geq 0 \Leftrightarrow B - \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow B \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Câu 5.



- a) Vì M là trung điểm của BC nên AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$
 Mà $\triangle ABC$ cân tại A (gt) nên AM là đường cao của $\triangle ABC$

Xét $\triangle MHD$ và $\triangle CMD$ có: $\angle MHD = \angle CMD = 90^\circ$; $\angle MDH = \angle CDM$
 $\Rightarrow \triangle MHD \sim \triangle CMD$ (g.g)

- b) $\triangle MHD \sim \triangle CMD$ (câu a)

$$\Rightarrow \frac{HD}{MD} = \frac{HM}{CM} \Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{HM}{BM} \text{ (vì } MD = AD, CM = BM)$$

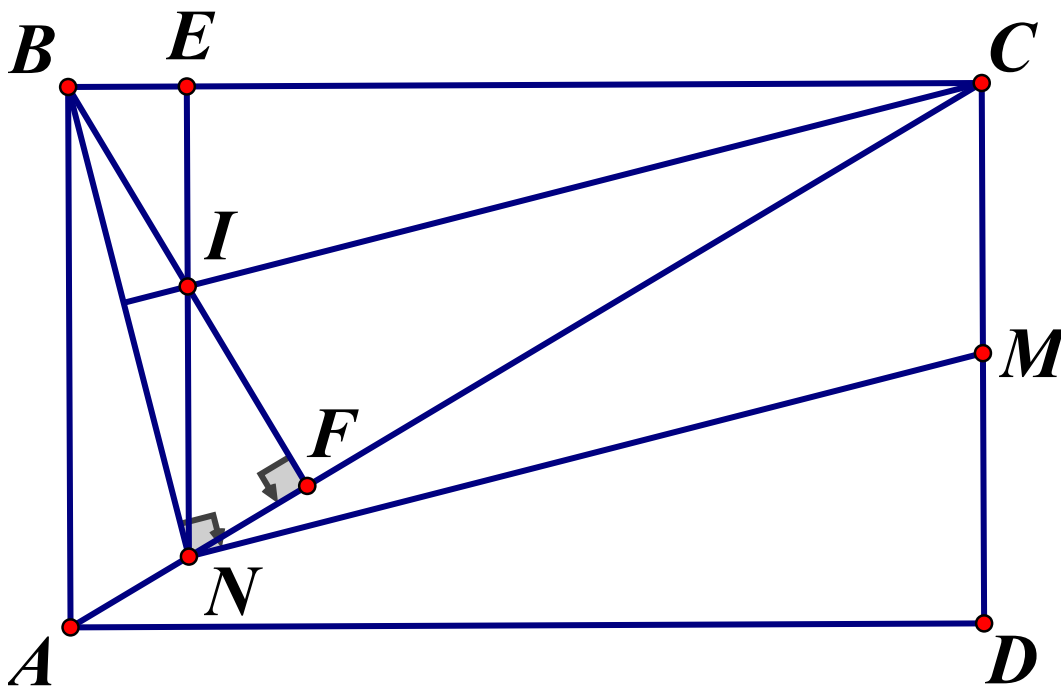
Mặt khác ta có: $\angle ADH = 90^\circ + \angle DMH = \angle BMH$

Suy ra $\triangle HDA \sim \triangle HMB$ (c.g.c)

Do đó: $\angle AHD = \angle BHM \Rightarrow \angle AHB = \angle DHM = 90^\circ \Rightarrow BH \perp AN$

Kết hợp với $AM \perp BC \Rightarrow E$ là trực tâm $\triangle ABN$.

Câu 6.



Gọi I là trung điểm của BF, đường thẳng NI cắt BC tại E

Ta có: F đối xứng với A qua N (gt) $\Rightarrow N$ là trung điểm của AF

Mà I là trung điểm của BF nên NI là đường trung bình $\triangle ABF$

$$\Rightarrow NI \parallel AB, NI = \frac{1}{2} AB$$

Mặt khác $AB \parallel CD; AB = CD$ (ABCD là hình chữ nhật và M là trung điểm của CD)

$$AB \perp BC; CM = \frac{CD}{2} \text{ suy ra } NI \perp BC; NI \parallel CM \text{ và } NI = CM$$

$\Rightarrow$ Tứ giác CINM là hình bình hành $\Rightarrow CI \parallel MN$

$$MN \perp BN (\angle BNM = 90^\circ) \Rightarrow CK \perp BN$$

Mà tại K

Do đó I là trực tâm $\triangle BCN \Rightarrow BF \perp AC$.