ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. M là tập hợp các ma trận cấp n ($n \geq 1$), thực, khả nghịch.

1. Chứng minh rằng M là nhóm đối với phép nhân ma trận.
2. $C \in M$ cố định. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \to M$, $f(A) = C^{-1}AC$ là một đồng cấu nhóm. Tìm $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ (hay chứng minh rằng f là đẳng cấu).
3. Chứng minh ràng ánh xạ $f_1 : M \to \mathbb{R}^\star$, $f_1(A) = |A|$ là đồng cấu nhóm. Tìm $\operatorname{Im} f_1$, $\operatorname{Ker} f_1$.

Câu II. Chứng minh rằng $\mathbb{C}^\star$ là nhóm đối với phép nhân thông thường. Xét các ánh xạ $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star$, $f(\alpha) = \overline{\alpha}$, $g : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star$, $g(\alpha) = \|\alpha\|$ là đồng cấu nhóm, đơn cấu, toàn cấu hay không? Tìm $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.

Câu III. Chứng minh rằng các phép biến đổi trực giao trên không gian Euclid E làm thành một nhóm đối với phép nhân (phép hợp thành), ký hiệu G. Giả sử $g \in G$. Đặt ánh xạ $\varphi : G \to G$, $\varphi(f) = g^{-1}fg$. Chứng minh rằng φ là đẳng cấu nhóm.

Câu IV. $\mathbb{C}[x]$ là vành. Đặt ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[x] &\to \mathbb{C}[x], \\ f(x) &\to \overline{f(x)} \end{aligned}$$

(được hiểu là $\overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + ... + \overline{a}_n x^n$).

1. Chứng minh rằng φ là đồng cấu nhóm.
2. Chứng minh rằng $\mathbb{R}[x]$ là vành con mà không idean.

Câu V.

1. Chứng minh rằng các ma trận đối xứng cấp n lập thành nhóm aben đối với phép cộng, ký hiệu nhóm này là M.
2. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \to M$, $f(A) = A'$ (chuyển vị của A) là đồng cấu nhóm. Tìm $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.
3. Chứng minh rằng tập M các ma trận đối xứng thực cấp n lập thành $\mathbb{R}$-không gian véc tơ (hay $\mathbb{R}$-không gian véc tơ con của không gian các ma trận vuông cấp n).
4. T là ma trận khả nghịch (không nhất thiết đối xứng). Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \to M$, $f(A) = T^{-1}AT$ là đồng cấu (tức là ánh xạ tuyến tính).

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Tìm hạng của hệ véc tơ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ theo tham số a

$$a_1 = (1, a, 1)\,,$$
$$a_2 = (1, 1, a)\,,$$
$$a_3 = (a, 1, 1)\,.$$

Tìm phần bù trực tiếp của $L = \{a_1, a_2, a_3\}$ khi $a = -2$ hoặc $a = 1$.

Câu II. Biết $\mathbb{R}_5[x]$ là không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn 5. Cho $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$. Chứng minh rằng (1) và (2) là các cơ sở của nó

1. 1, x, x^2, x^3, x^4.
2. $f^{(4)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$.

Tìm ma trận chuyển cơ sở (1) sang (2). Tìm toạ độ của $f(x) = 34 + 33x + 16x^2 + 5x^3 + x^4$ trong cơ sở (2).

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính f trên không gian phức có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

có chéo hoá được không? Có tồn tại phép biến đổi tuyến tính nghịch đảo f^{-1}? Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của f^{-1}.

Câu IV. Chứng minh rằng tập hợp các ma trận thực có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}.$$

với $a, b \in \mathbb{R}$ lập thành vành con của vành $\mathbf{Mat}(2, \mathbb{R})$, hỏi nó có là idean không?

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2001
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Chứng minh rằng

1. Tập $\mathbb{S}^1$ các số phức có mô đun bằng 1 là một nhóm con của nhóm nhân các số phức khác 0.

2. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ cho bởi $f(x) = \cos(\pi x) + i \sin(\pi x)$ là một đồng cấu từ nhóm cộng các số thực $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{S}^1$.

Câu II.

1. Chứng minh rằng mỗi không gian con L của không gian véc tơ hữu hạn chiều V đều có bù tuyến tính. Phần bù tuyến tính của L có duy nhất không?

2. Tìm số chiều, một cơ sở và phần bù tuyến tính của không gian con của không gian $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ $\{u_1 = (1, -2, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 3, 0, 2)$, $u_3 = (2, -5, -1, -1)$, $u_4 = (2, -4, -2, 2)\}$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & d \\ 0 & -d & c \end{pmatrix}.$$

1. Nếu φ là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc là A thì φ có chéo hoá được không? Vì sao?

2. Với $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ và $d = 2$ hãy tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^T A Q$ là ma trận đường chéo.

Câu IV. Phép biến đổi tuyến tính φ gọi là luỹ linh bậc p nếu p là một số nguyên dương sao cho $\varphi^{p-1} \neq 0$ và $\varphi^p = 0$. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính luỹ linh bậc p trong không gian véc tơ n-chiều V. Chứng minh rằng

1. Nếu x là một véc tơ sao cho $\varphi^{p-1}(x) \neq 0$ thì hệ véc tơ

$$\left\{x, \varphi\left(x\right), \varphi^2\left(x\right), ..., \varphi^{p-1}\left(x\right)\right\}$$

độc lập tuyến tính.

2. $p \leq n$.

3. φ chỉ có một giá trị riêng $\lambda = 0$.

4. Nếu $E - A$ là ma trận của phép biến đổi φ đối với cơ sở nào đó thì ma trận A khả nghịch (E là ma trận đơn vị).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2001
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng tập $O(n)$ các ma trận trực giao cấp n là một nhóm đối với phép nhân ma trận.

2. Cho $Q \in O(n)$, xét ánh xạ $f : O(n) \to O(n)$ cho bởi $f(A) = Q^T AQ$ trong đó Q^T là chuyển vị của Q. Chứng minh rằng f là một đẳng cấu nhóm.

Câu II. Xét phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 4x_3, 4x_1 - 7x_2 + 8x_3, 6x_1 - 7x_2 + 7x_3).$$

1. Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của φ.

2. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ có tồn tại hay không một cơ sở sao cho đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng đường chéo.

Câu III. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L sinh bởi hệ véc tơ

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}.$$

1. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian con L và cơ sở trực chuẩn của phần bù trực giao $L^\perp$.

2. Giả sử $x = (4, -1, -3, 4)$. Tìm véc tơ $y \in L$ và véc tơ $z \in L^\perp$ sao cho $x = y + z$.

Câu IV.

1. Chứng minh rằng họ $\left\{1, x - a, (x - a)^2, ..., (x - a)^{n-1}\right\}$ với $a \in \mathbb{R}$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn n.

2. Tìm toạ độ của $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ đối với cơ sở đó.

Câu V.

1. Giả sử f_1, f_2 là các dạng tuyến tính trên K-không gian véc tơ V. Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : V \times V \longrightarrow K$ cho bởi $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ là một dạng song tuyến tính trên V. Tìm điều kiện cần và đủ để φ là dạng song tuyến tính đối xứng.

2. Giả sử V là K-không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng dạng song tuyến tính φ có hạng bằng 1 khi và chỉ khi $\varphi \neq 0$ và có hai dạng tuyến tính f_1, f_2 sao cho $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ với mọi $x, y \in V$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Giả sử h là một đồng cấu vành từ vành K vào vành K', và A là vành con của vành G. Chứng minh rằng $h(A)$ là một vành con của vành K'.

2. Trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ xét hai phép toán xác định bởi

$$a \oplus b = a + b - 1$$
$$a \circ b = a + b - ab.$$

Chứng minh rằng $(\mathbb{Z}, \oplus, \circ)$ là một vành giao hoán có đơn vị.

Câu II. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét phép biến đổi tuyến tính g xác định bởi

$$g(u) = (8x - y - 5z, -2x + 3y + z, 4x - y - z) \text{ với } u = (x, y, z).$$

1. Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của g.

2. Tìm một cơ sở cả không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho đối với cơ sở đó ma trận B của phép biến đổi g có các phần tử ở phía trên đường chéo chính bằng 0. Viết ma trận B.

Câu III. Trong không gian véc tơ Euclide E xét hệ véc tơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$, và ma trận

$$G = ((u_i, u_j))_{n \times n}.$$

Chứng minh rằng hệ véc tơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det G \neq 0$.

Câu IV. Giả sử f là một dạng song tuyến tính hạng r trên K-không gian véc tơ V n-chiều. Xét các tập con

$$V_r = \left\{ y \text{ thuộc } V : f(x, y) = 0 \text{ đối với mọi } x \text{ thuộc } V \right\},$$
$$V_l = \left\{ y \text{ thuộc } V : f(y, x) = 0 \text{ đối với mọi } x \text{ thuộc } V \right\}.$$

Chứng minh rằng V_r, V_l là các không gian con và $\dim V_r = \dim V_l = n - r$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Giả sử h là một đồng cấu từ nhóm G vào nhóm G', và H là nhóm con của nhóm G. Chứng minh rằng $h(H)$ là một nhóm con của nhóm G'.

2. Xét ánh xạ f từ nhóm tuyến tính tổng quát $GL(n, \mathbb{R})$ vào nhóm nhân $\mathbb{R}^\star$ các số thực khác 0 xác định bởi $f(A) = \det A$. Chứng minh rằng f là một toàn cấu. Xác định nhóm con $f(O(n))$, với $O(n)$ là nhóm các ma trận trực giao.

Câu II.

1. Giả sử L là một không gian con p-chiều của không gian véc tơ Euclide E n-chiều. Chứng minh rằng tập

$$L^* = \{x \in E : (x, y) = 0, \forall y \in L\},$$

là một không gian con $(n - p)$-chiều và $E = L \bigoplus L^\star$.

2. Xét không gian con L của không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ $u_1 = (1, 0, 2, 1)$, $u_2 = (2, 1, 2, 3)$, $u_3 = (0, 1, -2, 1)$. Xác định một cơ sở trực chuẩn của không gian con L^*.

Câu III. Vết của ma trận A cấp n trên trường K là tổng các phần tử trên đường chéo chính, được ký hiệu là $\mathrm{Tr}(A)$. Chứng minh rằng

1. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2. Vết của ma trận của một phép biến đổi tuyến tính không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở của không gian.

Câu IV.

1. Hạng của ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ được ký hiệu là $r(A)$. Chứng minh rằng

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B).$$

2. Tính $r(A)$ với $A = (\min\{i, j\})_{m\times n}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng tích các đồng cấu vành là một đồng cấu vành.
2. Xét đồng cấu nhóm $f : G \to G'$. Chứng tỏ rằng nếu G là một nhóm giao hoán thì $\mathrm{Im}(f)$ cũng là một nhóm giao hoán.. Cho một ví dụ chứng tỏ điều ngược lại nói chung không đúng.

Câu II.

1. Giả sử L là không gian con của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hệ véc tơ
$$\{u_1 = (2,3,5)\,, u_2 = (3,7,8)\,, u_3 = (1,-6,1)\}\,.$$
Với giá trị nào của tham số a thì véc tơ $u = (7,-1,a)$ thuộc không gian con L.
2. Chứng minh rằng trong không gian các hàm số thực liên tục $C\,(a,b)$ hệ véc tơ $\{1, \cos x, \cos^2 x, ..., \cos^n x\}$ độc lập tuyến tính.

Câu III. Xét ma trận thực đối xứng
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
Tìm ma trận trực giao Q sao cho $Q^T A Q$ là ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo đó.

Câu IV. Giả sử u là một véc tơ của không gian Euclid E.

1. Chứng minh rằng với mỗi véc tơ x thuộc E có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = au + v$ trong đó véc tơ v trực giao với véc tơ u.
2. Cho $E = \mathbb{R}^4$, $u = (2,-1,0,2)$, $x = (1,1,1,-1)$. Tính a và v.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Trong nhóm G xét ánh xạ $h : G \to G$ xác định bởi $h(a) = a^{-1}$, $\forall a \in G$. Chứng minh rằng ánh xạ h là một tự đẳng cấu khi và chỉ khi G là một nhóm Aben.

Câu II. Trong không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Tìm số chiều và một cơ sở của phần bù trực giao $L^\star$ của không gian con L.
2. Cho véc tơ $x = (7, -4, -1, 2)$. Tìm véc tơ $y \in L$, $z \in L^\star$ sao cho $x = y + z$.

Câu III. Xét ánh xạ tuyến tính $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$g((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_1 + x_3 - x_4, 2x_2 + x_3 - 2x_4).$$

1. Tìm $\dim \operatorname{Ker} g, \dim \operatorname{Im} g$.
2. Với giá trị nào của tham số a thì véc tơ $y = (-1, 2, a)$ thuộc không gian con $\operatorname{Im} g$.

Câu IV. Giả sử f là một phép biến đổi tuyến tính luỹ linh bậc n (tức là $f^{n-1} \neq 0$, $f^n = 0$) trong K-không gian véc tơ V. Chứng minh rằng

1. Nếu $x \in V : f^k(x) \neq 0$ thì hệ véc tơ $\{x, f(x), \dots, f^k(x)\}$ độc lập tuyến tính.
2. $n \leq \dim V$.
3. Nếu $n = \dim V$ thì đa thức đặc trưng của phép biến đổi f có dạng $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Giả sử $(G, \circ)$ là một nhóm có hữu hạn phần tử, đơn vị e. Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi phần tử $a \in G$ tồn tại số nguyên $k \geq 1$ sao cho $a^k = e$ (số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất đó gọi là cấp của phần tử a).

2. Nếu a là phần tử cấp n thì $A = \{a, a^2, \ldots, a^n\}$ là một nhóm con của nhóm $(G, \circ)$.

Câu II. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}.$$

1. Chứng tỏ ma trận A không khả nghịch.

2. Tính hạng của ma trận A theo giá trị của các tham số a, b, c.

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính f trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$f(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z).$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của f.

2. Phép biến đổi f có chéo hoá được không? Vì sao? Tìm một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận của f đối với cơ sở đó là ma trận tam giác.

Câu IV. Chứng minh rằng tập con khác rỗng L của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ là một khôn gian con khi và chỉ khi L là tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Giả sử X là một vành. Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi số nguyên $n \geq 0$, tập

$$nX = \left\{ a = nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ lần}} : x \in X \right\}$$

   là một idean của vành X (với quy ước $0x = 0$).

2. Các tập dạng $n\mathbb{Z}$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ là tất cả các idean của vành số nguyên $\mathbb{Z}$.

Câu II.

1. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L sinh bởi hệ véc tơ

$$\{u_1 = (1, a, -1, -2), u_2 = (2, -1, a, 5), u_3 = (1, 10, -6, 1)\}.$$

   Tính $\dim L$ theo tham số a.

2. Giả sử hệ véc tơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của K-không gian véc tơ V. Đặt $v_k = u_k + \ldots + u_n$ với $k = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng hệ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của không gian V.

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính g trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$g((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 3x_2 - x_3, -3x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 5x_3).$$

1. Chứng tỏ rằng g là một phép biến đổi đối xứng.

2. Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ là các véc tơ riêng của g.

Câu IV. Giả sử f là một dạng song tuyến tính hạng k trên K-không gian véc tơ $\mathbb{K}^n$. Xét các tập con

$$V_r = \left\{ y \in \mathbb{K}^n : f(x, y) = 0 \text{ đối với mọi } x \in \mathbb{K}^n \right\},$$
$$V_l = \left\{ y \in \mathbb{K}^n : f(y, x) = 0 \text{ đối với mọi } x \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Chứng minh rằng V_r, V_l là các không gian con và $\dim V_r = \dim V_l = n - k$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Trong nhóm G xét ánh xạ $f : G \to G$ cho bởi $f(x) = x^2$ với mọi $x \in G$.

1. Chứng minh rằng f là một tự đồng cấu của nhóm G khi và chỉ khi G là nhóm aben.
2. Cho một ví dụ sao cho f là tự đẳng cấu và một ví dụ sao cho f là một từ đồng cấu nhưng không phải là tự đẳng cấu.

Câu II. Xét ánh xạ tuyến tính $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: với $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thì

$$h(u) = (x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4)$$

1. Xác định $\dim \operatorname{Im} h$, $\dim \operatorname{Ker} h$ theo tham số a.
2. Với $a = 3$, với giá trị nào của b thì véc tơ $u = (1, -2, b)$ thuộc $\operatorname{Im} h$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A.
2. Tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^T AQ$ là ma trận đường chéo. Viết ma trận B.

Câu IV.

1. Giả sử F là một không gian con của K-không gian véc tơ n-chiều V. Chứng minh rằng nếu $\dim F < n$ thì trong không gian V có cơ sở $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ sao cho $u_i \notin F$, $i = 1, 2, .., n$.
2. Chứng minh rằng đối với mỗi dạng tuyến tính φ trên không gian véc tơ Euclid hữu hạn chiều E tồn tại duy nhất một véc tơ $u^\star \in E$ sao cho

$$\varphi(x) = (u^\star . x) \text{ với mọi } x \in E.$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Xét đồng cấu vành $f : K \to K^\star$. Chứng minh rằng

1. Nếu A là một vành con của vành K thì $f(A)$ là một vành con của $K^\star$.
2. Nếu B là một idean của vành K' thì $f^{-1}(B)$ là một idean của vành K.

Câu II.

1. Xác định số chiều của không gian nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây theo tham số a

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. Với $a = 3$, tìm cơ sở trực giao của phần bù trực giao $N^\star$ của N trong không gain véc tơ Euclid $\mathbb{R}^4$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A.
2. Tìm một một ma trận tam giác đồng dạng với ma trận A.

Câu IV. Xét dạng toàn phương ω trên không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^n$ cho bởi

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \quad x = (x_1, x_2, .., x_n).$$

Chứng minh rằng

1. Nếu dạng ω xác định dương thì $a_{ii} > 0$ với mọi $i = 1, 2, .., n$.
2. Dạng ω xác định dương khi và chỉ khi tồn tại ma trận khả nghịch S sao cho $(a_{ij})_{n\times n} = S^T S$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 1
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng giao các idean của một vành là một idean.
2. Giả sử S là tập con khác rỗng của vành K giao hoán có đơn vị. Chứng minh rằng tập
$$(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i : s_i \in S, a_i \in K, i = 1, 2, .., n \right\}$$
là idean nhỏ nhất chứa tập S.

Câu II. Xét phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cho bởi
$$f\left((x_1, x_2, x_3)\right) = \left(x_1 + ax_2 + x_3, 2x_1 + ax_2 + bx_3, -x_1 + (b-1)\, x_3\right)$$

1. Với giá trị nào của các tham số a, b thì f là một tự đẳng cấu.
2. Tìm $\dim \operatorname{Im} f$, $\dim \operatorname{Ker} f$ với $a = b = 1$.

Câu III. Xét ma trận đối xứng thực
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A.
2. Dạng toàn phương ω trên không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ cho bởi
$$\omega(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$
Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^3$ là cơ sở chính tắc của ω. Viết dạng chính tắc của ω tương ứng với cơ sở đó.

Câu IV. Giả sử E là không gian véc tơ Euclid n-chiều.

1. Chứng minh rằng nếu $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của E thì mỗi véc tơ x thuộc E đều có thể biểu diễn dưới dạng
$$x = \sum_{i=1}^{n} (x.u_i)\, u_i.$$
2. Giả sử L, M là các không gian con của E và $\dim L < \dim M$. Chưng minh rằng tồn tại véc tơ $u \in M$, $u \neq 0$ sao cho $(u.y) = 0$ với mọi $y \in L$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 2
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Xét vành đa thức $\mathbb{R}[x]$ ẩn x hệ số thực. Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi đa thức $f(x)$ thuộc $\mathbb{R}[x]$ tập
$$f(x)\,\mathbb{R}[x] = \{g(x) = f(x)\,h(x) : h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$
là một idean của vành $\mathbb{R}[x]$.

2. Đối với mỗi idean $I \neq \{0\}$ của vành $\mathbb{R}[x]$ tồn tại duy nhất đa thức dạng chuẩn $p(x)$ sao cho $I = p(x)\,\mathbb{R}[x]$.

Câu II. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ xét hệ véc tơ
$$u_1 = (1, a, 2, 1) \quad , \quad u_2 = (1, 1, b, 0) \quad , \quad u_3 = (1, b, 2, 1)\,.$$

1. Với những giá trị nào của các tham số a, b thì hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính.

2. Tìm một cơ sở của phần bù trực giao $L^\star$ của không gian con L sinh bởi hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ với $a = b = 1$.

Câu III. Xét phép biến đổi tuyến tính f trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xác định bởi
$$f((x, y, z)) = (8x - y - 5z, -2x + 3y + z, 4x - y - z)\,.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của f, của f^n, $n > 0$.

2. Tìm một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận B của f đối với cơ sở đó là ma trận tam giác. Viết ma trận B.

Câu IV. Xét dạng song tuyến tính g trên K-không gian véc tơ n-chiều V thoả mãn điều kiện $g(x, x) =$ với mọi x thuộc V. Chứng minh rằng

1. $g(x, y) = -g(y, x)$ với mọi x, y thuộc V.

2. Nếu g không suy biến thì mỗi véc tơ u thuộc V, $v \neq \{0\}$, luôn luôn tồn tại véc tơ v thuộc V sao cho $g(u, v) = 1$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007 ĐỢT 1
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Phần tử a thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ gọi là có cấp hữu hạn p nếu p là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^p = e$. Giả sử G là một tập hợp hữu hạn có n phần tử. Chứng minh rằng

1. Mỗi phần tử a thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ đều có cấp hữu hạn.
2. Với mọi a, b thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ các phần tử $a \circ b$ và $b \circ a$ có cấp bằng nhau.

Câu II.

1. Xác định số chiều của không gian nghiệm N_0 của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây theo tham số thực a

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. Cho $a = 3$, tìm phần bù trực tiếp của N_0 trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$.

Câu III. Trong không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ xét phép biến đổi tuyến tính f cho bởi

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -2x_2 + 5x_3).$$

1. Chứng minh rằng f là phép biến đổi đối xứng.
2. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Eucild $\mathbb{R}^3$ là các véc tơ riêng của f và cho biết ma trận của f đối với cơ sở đó.

Câu IV. Xét dạng song tuyến tính không suy biến g trên K-không gian véc tơ n-chiều V. Giả sử rằng dạng song tuyến tính g_1 trên không gian véc tơ con r-chiều F cho bởi $g_1(x, y) = g(x,)$ với mọi x, y thuộc F là một dạng không suy biến. Xét tập

$$F^\star = \{x \in V : g(x, y) = 0 \text{ với mọi } y \in F\}.$$

Chứng minh rằng

1. $F^\star$ là một không gian con và $F^\star \cap F = \{0\}$.
2. $V = F \oplus F^\star$.