**HSG TOÁN 9 BÌNH PHƯỚC 2023-2024**

Thời gian làm bài : 150 phút

**Câu 1 (5.0 điểm).**

1. Cho biểu thức 
2. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .
3. Tính giá trị của biểu thức P khi 
4. Cho là ba số thực khác 0 , thoả mãn 

Chứng minh rằng: 

**Câu 2 (5.0 điểm).**

1. Giải phương trình: 
2. Giải hệ phương trình: 
3. Cho đường thẳng (d):  (với m là tham số). Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi giá trị của m .

**Câu 3 (5.0 điểm).** Cho đường tròn (O R; ) và dây cung BC cố định (BC R < 2 ). Điểm A di động trên đường tròn (O R; ) sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ đường cao AD và trực tâm H của tam giác ABC .

1. Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N. Chứng minh tam giác AMN cân.
2. Các điểm E F, lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH, CH. Các điểm P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, AC. Chứng minh 4 điểm P, E, F, Q thẳng hàng và OA ⊥ PQ.
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 4 (2.0 điểm).** Cho tam giác ABC cân tại A, điểm O là trung điểm của BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Điểm H chạy trên cung nhỏ EF của (O), tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 5 (3.0 điểm).**

1. Cho a, b, c là ba số thực dương, thoả mãn 

Chứng minh rằng: 

1. Giải phương trình sau với nghiệm nguyên: 

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1 (5.0 điểm).**

1. a) P xác định 

 



1. Ta có: 



1. + Chứng minh được bài toán: Nếu  thì 

+ Vì  và  nên suy ra được 

Do đó (đpcm)

**Câu 2 (5.0 điểm).**

1. Điều kiện: 

Ta có: 



Giải phương trình: = 2

 (Đk: )



Vậy phương trình có 2 nghiệm là .

1. Điều kiện: x + y > 0.

Biến đổi phương trình (1):

 

Đặt (với ), ta có phương trình:





+ Với x + y = 1 thay vào (2) ta được:



+ Với 

  (Loại vì x + y > 0)

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm (x;y) là (1;0); (-2;3)

1. Gọi  là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi giá trị của m, ta có phương trình:

  có nghiệm 

 

Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm A(1;1) với mọi giá trị của m.

**Câu 3 (5.0 điểm).**



1. Gọi B’ là hình chiếu của điểm B trên AC, C’ là hình chiếu của điểm C trên AB.

Ta có: 

  ∆C’HM ᔕ ∆B’HN (g.g)

  (t/c)

  cân tại A

+ Ta có  (Vì cùng chắn cung PB của đường tròn (BPED))

  (vì đồng vị PD // CC’)

  (vì cùng phụ )

  (vì cùng chắn cung FH của đường tròn (DEHF))



Mà 3 điểm B.E,H thẳng hàng nên 3 điểm P, E, F thẳng hàng.

Tương tự chứng minh được 3 điểm E, F, Q thẳng hàng.

Do đó 4 điểm P, E, F, Q thẳng hàng.

+ Kẻ xy là tiếp tuyến tại A của (O),



Ta có  (cùng chắn cung AB của (O)) Mà AP.AB = AQ.AC (=)

⇒ Tứ giác BPQC nội tiếp ⇒ xy // PQ

Mà xy⊥ AO (t/c tiếp tuyến)

Do đó OA  PQ

1. Gọi U là giao điểm của BB’ và KM, V là giao điểm của CC’ và KN.

+ Ta có ∆AMN cân tại A nên đường phân giác AK của góc MAN cũng là đường trung trực của MN

⇒ AK là đường kính của (AMN).

⇒  ⇒ MK // CC hay UK // HV

Tương tự KV // UH nên tứ giác HVKU là hình bình hành

⇒ HK đi qua trung điểm của UV (1)

+ Ta có MU // C’H (ta lét), tương tự 

Mà (t/c đường phân giác của góc ),

tương tự 

Mà  (vì ∆C’HB ᔕ ∆B’HC)

 UV // BC (Ta lét đảo) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ HK đi qua trung điểm của BC

Mà BC cố định nên HK luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 4 (2.0 điểm).**

+ Ta có OM ON , lần lượt là phân giác (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O))



 ∆MBO ᔕ ∆MON (g.g)

Cmtt ∆OCN ᔕ ∆MON

 ∆MBO ᔕ ∆OCN 

 (1)

+ Lại có: 

 đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi  đạt giá trị nhỏ nhất. Gọi R là bán kính của đường tròn (O), ta có:



(Vì BE = CF, ME = MH, NF = NH; MH + NH = MN)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, từ (1) và (2) suy ra:



(Vì cố định nên BC và BE không đổi)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi BM = CN ⇔ MN / / BC khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O).

Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O).

**Câu 5 (3.0 điểm)**

1. + Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương ta có:



Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được:

 (1)

Áp dụng đẳng thức phụ dạng:

ta được 

Hay  (2)

Cộng theo vế (1) và (2) ta có (đpcm).

Dấu “=” xảy ra 

1. + Biến đổi đưa được về pt: 

+ Tìm ra được các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình là: (-6;5), (0;-3), (6;-3), (-12;5)