

TÍCH PHÂN

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

▪ **Định nghĩa:** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = \dots$

2. Tính chất

$$\oplus \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\oplus \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\oplus \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (a < b < c)$$

$$\oplus \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\oplus \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u = u(x)$	Thường gặp
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	Vi phân $\frac{1}{a}d(ax+b) = dx$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax+b)^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (u(x) \neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C \quad (a \neq 0)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a} \cot(ax+b) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C \quad (0 < a \neq 1)$

4. Phương pháp đổi biến số

▪ **Dạng 1:** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x), x \in [a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

- **Dạng 2:** Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

$$\oplus \sqrt{a^2 - x^2} : \text{đặt } x = |a| \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \oplus \sqrt{x^2 - a^2} : \text{đặt } x = \frac{|a|}{\sin t}; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$$

$$\oplus \sqrt{x^2 + a^2} : x = |a| \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \oplus \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \text{ hoặc } \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} : \text{đặt } x = a \cdot \cos 2t$$

5. Phương pháp từng phần

- Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì :

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

- **Các dạng cơ bản:** Giả sử cần tính $I = \int_a^b P(x).Q(x)dx$

Dạng hàm	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\sin kx$ hoặc $\cos kx$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là e^{kx}	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\ln(ax+b)$	$P(x)$: đa thức $Q(x)$ là $\frac{1}{\sin^2 x}$
Cách đặt	$u = P(x)$ dv là phần còn lại	$u = P(x)$ dv là phần còn lại	$u = \ln(ax+b)$ $dv = P(x)dx$	$u = P(x)$ dv là phần còn lại

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)dx$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{-10}{3}$.

Lời giải**Chọn D.**Thay $x=0$ ta được $f(0)+f(2)=2 \Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$

Ta có: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(2-x)dx$

Từ hệ thức đề ra: $\int_0^2 (f(x)+f(2-x))dx = \int_0^2 (x^2-2x+2)dx = \frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta lại có:

$$\int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2 \cdot (-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}.$$

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)dx = ae + b\sqrt{3} + c$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15.

B. -10.

C. -19.

D. -17.

Lời giải**Chọn C**Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m+1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0$ và $f(0) = m+1$.Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ hay $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2}dx + \int_0^1 (e^x - 1)dx = \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2}d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1)dx \\ &= \frac{2}{3}(3+x^2)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^0 + (e^x - x)\Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $a=1, b=2, c=-\frac{22}{3}$.Vậy tổng $a+b+3c=-19$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(3x+1)dx = 6$. Tính $I = \int_0^7 f(x)dx$.

A. $I = 16$.

B. $I = 18$.

C. $I = 8$.

D. $I = 20$.

Lời giải

Chọn D

$$A = \int_0^1 f(x)dx = 2, \quad B = \int_0^2 f(3x+1)dx = 6 \quad \text{đặt } t = 3x+1 \Rightarrow dt = 3dx.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=7 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{1}{3} \int_1^7 f(t)dt = 6 \Rightarrow \int_1^7 f(t)dt = 18 \Rightarrow \int_1^7 f(x)dx = 18.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = 20.$$

VÍ DỤ 4: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx = \frac{-11}{3} \ln 2 + b \ln 3 + c (b, c \in \mathbb{Q})$. Tính $\frac{b}{c}$?

A. $\frac{22}{3}$.

B. $\frac{22\pi}{3}$.

C. $\frac{22}{3\pi}$.

D. $\frac{22\pi}{13}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Đặt: } \frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x} &= \frac{m(2\sin x + 3\cos x) + n(2\cos x - 3\sin x)}{2\sin x + 3\cos x} \\ &= \frac{(2m - 3n)\sin x + (3m + 2n)\cos x}{2\sin x + 3\cos x} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta có: } \begin{cases} 2m - 3n = 3 \\ 3m + 2n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{13} \\ n = -\frac{11}{13} \end{cases}.$$

$$\text{Nên: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin x - \cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{13}(2\sin x + 3\cos x) - \frac{11}{13}(2\cos x - 3\sin x)}{2\sin x + 3\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{13} - \frac{11}{13} \cdot \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x} \right] dx = \frac{3}{13} (x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x} dx$$

$$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(2\sin x + 3\cos x)}{2\sin x + 3\cos x} dx = \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \ln|2\sin x + 3\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \ln 2 + \frac{11}{13} \ln 3. \text{ Do đó: } \begin{cases} b = \frac{11}{13} \\ c = \frac{3\pi}{26} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{11}{13} \cdot \frac{26}{3\pi} = \frac{22}{3\pi}.$$

VÍ DỤ 5: Khẳng định nào sau đây đúng về kết quả $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$?

A. $a \cdot b = 64$.

B. $a \cdot b = 46$.

C. $a - b = 12$.

D. $a - b = 4$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{1}{4} x^4 \end{cases}$. Áp dụng tích phân từng phần ta tính được:

$$\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{4} x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16} x^4 \Big|_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = 64.$$

VÍ DỤ 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4$

Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$.

A. $I = 12$.

B. $I = 7$.

C. $I = 13$.

D. $I = 20$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Vậy $I = \frac{1}{4} \int_0^2 t f'(t) dt$. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$, khi đó $4I = [tf(t)]_0^2 - \int_0^2 f(t) dt$

$$= 2f(2) - \int_0^2 f(x) dx = 32 - 4 = 28 \Rightarrow I = 7.$$

VÍ DỤ 7: Tính tích phân $I = \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx$ ta được kết quả có dạng $\frac{ae^2 + b}{c}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Z}$

và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a^2 + 2b - 3c$.

A. 17.

B. 10.

C. -17.

D. 18.

Lời giải

Chọn C

Xét $I = \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x dx \end{cases}$, khi đó ta chọn được $\begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^2-1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_0^{e-1} x \ln(x+1) dx = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x-1}{2} dx = \frac{e^2-2e}{2} - \frac{x^2-2x}{4} \Big|_0^{e-1}$
 $= \frac{e^2-2e}{2} - \frac{e^2-4e+3}{4} = \frac{e^2-3}{4}$.

Do đó $a=1, b=-3, c=4$. Vậy ta có $T = a^2 + 2b - 3c = 1^2 + 2(-3) - 3.4 = -17$.

VÍ DỤ 8: Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$T = a^2 + b$?

A. $T = 9$.

B. $T = 13$.

C. $T = 7$.

D. $T = 11$.

Lời giải

Chọn D

Ta giải: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Suy ra: $I = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d \cos x}{\cos x} = x \tan x + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$
 $= \left(\frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{\pi}{3} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| \right) - 0 \cdot \tan 0 + \ln |\cos 0| = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2 = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b = 11$

VÍ DỤ 9: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $A = \int_0^2 (x-1) f'(x) dx = 9$ và $f(2) + f(0) = 3$.

Tính $I = \int_0^2 f(x) dx$

A. $I = 12$.

B. $I = -12$.

C. $I = -6$.

D. $I = 6$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } A = \int_0^2 (x-1) f'(x) dx = (x-1) f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(0) - \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{Với } A = 9 \text{ và } f(2) + f(0) = 3 \text{ nên } I = \int_0^2 f(x) dx = -6.$$

VÍ DỤ 10: Nghiệm dương a của phương trình $\int_1^a (2x-1) \ln x dx = (a^2 - a) \ln a - 9$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. (1;3).

B. (3;5).

C. (5;7).

D. (7;10).

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } u = \ln x \text{ và } dv = (2x-1)dx, \text{ ta có } du = \frac{1}{x}dx \text{ và } v = x^2 - x.$$

$$\text{Khi đó, đặt } I = \int_1^a (2x-1) \ln x dx = (x^2 - x) \ln x \Big|_1^a - \int_1^a (x^2 - x) \frac{1}{x} dx.$$

$$= (a^2 - a) \ln a - \int_1^a (x-1) dx = (a^2 - a) \ln a - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^a$$

$$= (a^2 - a) \ln a - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} - a + 1 \right) = (a^2 - a) \ln a - \left(\frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Theo giả thiết: } I = (a^2 - a) \ln a - 9 \Rightarrow \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} = 9 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 3\sqrt{2} \\ a = 1 + 3\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do } a > 0 \text{ nên } a = 1 + 3\sqrt{2}.$$