**CHỦ ĐỀ 17: BỘI VÀ ƯỚC CỦA MỘT SỐ NGUYÊN**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

**1. *Định nghĩa***

 Với **Z** và  Nếu có số nguyên q sao cho a = b.q thì ta nói a chia hết cho b. Ta còn nói a là *bội* của b và b là *ước*của a.

**2. *Nhận xét***

 - Nếu a = b.q thì ta nói a chia cho b được q và viết 

 - Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

 - Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

**3. *Tính chất***

 Có tất cả các tính chất như trong tập **N.**

-Nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a cũng chia hết cho c.

 và 

 - Nếu a chia hết cho b thì bội của a cũng chia hết cho b.

 (**Z**)

 - Nếu a, b chia hết cho c thì tổng và hiệu của chúng cũng chia hết cho c.



 - Nếu a, b chia cho c cùng số dư thì a – b chia hết cho c.

 ***Nhận xét:***

 - Nếu a chia hết cho b, b chia hết cho a thì 

 - Nếu a chia hết cho hai số m, n nguyên tố cùng nhau thì a chia hết cho m.n.

 - Nếu  chia hết cho số nguyên tố p thì a chia hết cho p.

 - Nếu ab chia hết cho m và b, m nguyên tố chung nhau thì a chia hết cho m.

 - Trong n số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho n.

**B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN**

**DẠNG 1. *Tìm bội và ước của số nguyên***

**I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

 *-**Tập hợp các bội của số nguyên a có vô số phần tử và bằng *

 *- Tập hợp các ước số của số nguyên a  luôn là hữu hạn.*

 ***Cách tìm:***

 *Trước hết ta tìm các ước số nguyên dương của  (làm như trong tập số tự nhiên), chẳng hạn là  Khi đó  cũng là ước số của a. Do đó các ước của a là p, q, r, –p, –q, –r.*

 *Như vậy số các ước nguyên của a gấp đôi số các ước tự nhiên của nó.*

**II. VÍ DỤ**

**Ví dụ 1.**

 1) Tìm năm bội của: – 5; 5;

 2) Tìm các bội của – 12, biết rằng chúng nằm trong khoảng từ – 100 đến 24.

***Lời giải***

 1) Các bội số của 5; –5 đều có dạng 5.k (**Z**).

 Chẳng hạn chọn năm bội số của 5; –5 là: –15, –10, –5, 0, 5.

 2) Các bội số của –12 có dạng 12.k (**Z**). Cần tìm k sao cho:

–100 < 12k < 24.

 Tức là: –9 < k < 2, chọn 

 Vậy các bội của –12 nằm trong khoảng từ –100 đến 24 là



**Ví dụ 2.** Tìm tất cả các ước của:

 1) –3; 2) –25; 3) 12.

***Lời giải***

 1) Các ước tự nhiên của 3 là 1, 3.

 Do đó các ước của –3 là 

 2) Các ước tự nhiên của 25 là 1, 5, 25.

 Do đó các ước của 25 là 

 3) Các ước tự nhiên của 12 là 1, 2, 3, 4, 6, 12.

 Do đó các ước của 12 là 

 ***Nhận xét:***

 Số tự nhiên a phân tích ra thừa số nguyên tố có dạng  (p, q, r là số nguyên tố) thì số ước tự nhiên của a là  Khi đó mỗi số nguyên a, –a đều có  ước nguyên.

 Số nguyên tố p có 4 ước nguyên là 

**Ví dụ 3.** Tìm số nguyên n để:

 1) 5 . n chia hết cho –2; 2) 8 chia hết cho n;

 3) 9 chia hết cho n + 1; 4) n – 18 chia hết cho 17.

***Lời giải***

1) 5 . n chia hết cho –2, nên n là bội của 2.

 Vậy n = 2k (k là số nguyên tùy ý).

2) 8 chia hết cho n, nên n là ước của 8.

 Vậy 

3) 9 chia hết cho n + 1, nên n + 1 là ước của 9.

 Suy ra 

 Với 

 Với 

 Với 

 Với 

 Với 

 Với 

 Vậy 

4) n – 18 chia hết cho 17, nên n – 18 là bội của 17. Do đó n – 18 = 17k (**Z).**

 Vậy n = 18 + 17k (**Z).**

**III. BÀI TẬP**

**Bài 1.**

1) Tìm bốn bội của –9; 9.

 2) Tìm các bội của –24, biết rằng chúng nằm trong khoảng từ 100 đến 200.

**Bài 2.** Tìm tất cả các ước của:

 1) –17; 2) 49; 3) –100.

**Bài 3.**

1) Tìm tập hợp ƯC(–12; 16);

 2) Tìm tập hợp ƯC(15;–18;–20).

**Bài 4.** Tìm số nguyên n để:

 1) 7 . n chia hết cho 3; 2) –22 chia hết cho n;

 3) –16 chia hết cho n – 1; 4) n + 19 chia hết cho 18.

**Bài 5.** Tìm tập hợp BC (15;–12;–30).

**Bài 6.** Cho hai tập hợp  và 

 a) Viết tập hợp gồm các phần tử có dạng a . b với 

 b) Trong các tích trên có bao nhiêu tích chia hết cho 5?

**HƯỚNG DẪN**

**Bài 1.**

a) Chẳng hạn là: –18; –9; 0; 9

 b) 120; 144; 168; 192

**Bài 2.**

 a) Ư(–17) = {–17; –1; 1; 17}

 b) Ư(49) = {–49; –7; –1; 1; 7; 49}

 c) Ư(100) = {–100; –50; –25; –20; –10; –5; –4; –2; –1; 1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100}

**Bài 3.**

 a) ƯCLN(12; 16) = 4 suy ra ƯC(–12; 16) = {–4; –2; –1; 2; 4}

 b) ƯCLN(15; 18; 20) = 1 suy raƯC(15; –18; –20) = {–1; 1}

**Bài 4.**

 a)  mà (7; 3) = 1 nên  do đó 

 b)  nên 

 c)  nên 

 Vậy 

 d)  nên  suy ra 

**Bài 5.** BCNN(15; 20; 30) = 60

 Suy ra BC(15; –20; –30) = B(60) = 60*k*

**Bài 6.** Cho hai tập hợp A = {1; 2; 3; 4; 5} và B = {–2; –4; –6}

 a) C =  = 

 ( *Chú ý:* Các phần tử trong tập hợp phải khác nhau đôi một)

 b) Trong các tích trên có 3 tích chia hết cho 5 ứng với *a* = 5 và *b*

**DẠNG 2. *Vận dụng tính chất chia hết của số nguyên***

**I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

 *Để chứng minh một biểu thức A chia hết cho số nguyên a;*

 *- Nếu A có dạng tích  thì cần chỉ ra m (hoặc n, hoặc p) chia hết cho a. Hoặc m chia hết cho  n chia hết cho , p chia hết cho  trong đó *

 *- Nếu A có dạng tổng m + n + p thì cần chỉ ra m, n, p cùng chia hết cho a, hoặc tổng các số dư khi chia m, n, p cho a phải chia hết cho a.*

 *- Nếu A có dạng hiệu m – n thì cần chỉ ra m, n chia cho a có cùng số dư. Vận dụng tính chất chia hết để làm bài toán về tìm điều kiện để một biểu thức thỏa mãn điều kiện cho hết.*

**II. VÍ DỤ**

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng:  chia hết cho (–6).

***Lời giải***

 Nhóm tổng S thành tổng của các bội số của (–6) bằng cách:

 

 Mỗi số hạng của tổng S đều chia hết cho (–6), nên S chia hết cho (–6).

**Ví dụ 2.** Cho số  Hỏi số a có chia hết cho (–9) không?

***Lời giải***

 .

 Số hạng đầu của a chia hết cho 9, còn 7 không chia hết cho 9 nên a không chia hết cho 9. Do đó a cũng không chia hết cho –9.

**Ví dụ 3.** Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu  chia hết cho 31 thì  cũng chia hết cho 31. Điều ngược lại có đúng không?

***Lời giải***

 Ta có:  (\*)

 Do đó  và  từ (\*) suy ra 

 Mà 6 và 31 nguyên tố cùng nhau, nên suy ra 

 Ngược lại, nếu , mà  từ (\*) suy ra 

 Vậy điều ngược lại cũng đúng.

 *Ta có thể phát biểu bài toán lại như sau:*

 “Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng chia hết cho 31 khi và chỉ khi chia hết cho 31”.

**Ví dụ 4.** Tìm số nguyên x sao cho:

 1)  chia hết cho  2)  là ước số của 

***Lời giải***

1) Nhận thấy 

 Do  nên  khi và chỉ khi 

 Suy ra  Vậy 

2) Nhận thấy 

 Do  nên  khi và chỉ khi 

 Suy ra 

 Vậy 

**III. BÀI TẬP**

**Bài 1.** Chứng minh rằng:  chia hết cho 

**Bài 2.** Cho số  (gồm 20 chữ số 1). Hỏi số a có chia hết cho 111 không?

**Bài 3.** Cho a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng 5a + 2b chia hết cho 17 khi và chỉ khi 9a + 7b chia hết cho 17.

**Bài 4.** Tìm số nguyên x sao cho:

 a) 2x – 5 chia hết cho x – 1;

 b) x + 2 là ước số của 

**Bài 5.** Tìm cặp số nguyên x, y sao cho:

 a) 

 b) 

 c) 

**Bài 6.** Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho 20x + 10y = 2010.

**Bài 7.** Tìm số nguyên x sao cho x – 1 là bội của 15 và x + 1 là ước số của 1001.

**HƯỚNG DẪN**

**Bài 1.** 

 = 

 = 39 + 33.39 + 36.39 = 39.(1 + 33 + 36)

Suy ra S  nên S

**Bài 2.** Nhận thấy:

 

 =

 => *a* là tổng của hai số hạng trong đó có 1 số chia hết cho 111, 1 số không chia hết cho 111 nên *a* không chia hết cho 111

 Vậy *a* không chia hết cho 111

**Bài 3.** Xét hiệu 

 Nhận thấy  nên:

 Nếu  thì , mà (9; 17) = 1 nên 

 Nếu thì , mà (5; 17) = 1 nên 

**Bài 4.**

 a)  nên  do đó 

 Vậy 

 b) Do  nên 

Do đó 

Vậy 

**Bài 5.**

a) Vì 5 = 5.1 =  nên ta có các trường hợp sau:

1)  và  và 

2)  và  và 

3)  và  và 

4)  và  và 

b) 

c) 

 Do đó tìm được .

**Bài 6.** Từ điều kiện đề bài suy ra 

 201 là số lẻ và 2*x* là số chẵn, suy ra y là số lẻ. Khi đó *y* có dạng:

 

 Chẳng hạn, bốn cặp số nguyên (*x; y*) thỏa mãn:

 

**Bài 7.** Ư(1001) = {1001; –1001; 143; –143; 91; –91; 77; –77; 13; –13; 11; –11; 7; –7; 1; –1}

 Ta có: *x* – 1 là bội của 15 nên *x* – 1 = 15*k* ()*x* + 1 = 15*k* + 2 ()

 Mà *x* + 1 là ước của 1001 nên kiểm tra thấy *x* + 1 = 77 *x* =76

 Vậy *x* = 76