

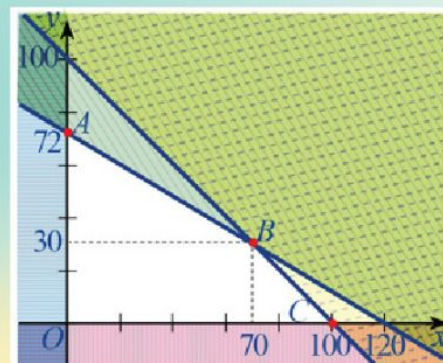
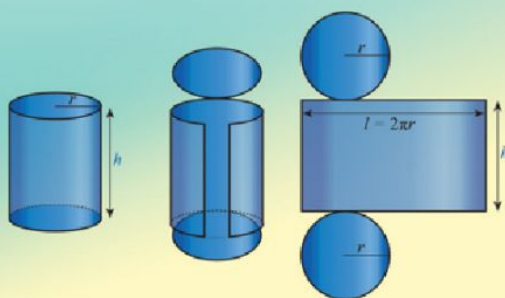


ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP

Toán 12

BẢN MẪU



CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Đọc bản mới nhất trên hoc10.vn

Bản mẫu góp ý

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA **Môn Toán - Lớp 12**

*(Theo Quyết định số 1882/QĐ-BGDĐT ngày 29 tháng 6 năm 2023
của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)*

Lê Mậu Hải (Chủ tịch), Cao Thị Hà (Phó Chủ tịch), Phạm Đức Tài (Ủy viên, Thư kí).
Các Ủy viên: Phạm Khắc Ban, Nguyễn Hắc Hải, Nguyễn Doãn Phú, Nguyễn Chiến Thắng,
Nguyễn Thị Vĩnh Thuyền, Đinh Cao Thượng, Phạm Đình Tùng, Vũ Thị Như Trang.

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP

Toán 12

BẢN MẪU



CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM



BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH



CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG

Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học



HOẠT ĐỘNG

Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên



KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Nội dung kiến thức trọng tâm



LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG

- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn



CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Tìm hiểu thêm kiến thức toán học, lịch sử toán học và ứng dụng của toán học vào thực tiễn

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 12 yêu quý!



Trong quá trình tìm hiểu môn Toán lớp 12, bên cạnh các nội dung cốt lõi mà các em được học, sách Chuyên đề học tập Toán 12 sẽ cung cấp thêm cho các em những hiểu biết toán học sâu sắc hơn, mở rộng hơn với nhiều ứng dụng của toán học trong thực tiễn. Chuyên đề học tập bao gồm các chuyên đề: Biến ngẫu nhiên rời rạc, các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc; Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu; Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những tri thức gần gũi, lí thú về khoa học tự nhiên và tích hợp với những môn học khác. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được “làm giàu” về vốn văn hoá chung và có cơ hội “Mang cuộc sống vào bài học - Đưa bài học vào cuộc sống”.

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hàng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ I. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

§1. Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc	5
§2. Phân bố Bernoulli. Phân bố nhị thức	13

CHUYÊN ĐỀ II. ỨNG DỤNG TOÁN HỌC ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

§1. Vận dụng hệ bất phương trình bậc nhất để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính	20
§2. Vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu trong thực tiễn	28

CHUYÊN ĐỀ III. ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN TÀI CHÍNH

§1. Một số vấn đề về tiền tệ, lãi suất	38
§2. Tín dụng. Vay nợ	48
§3. Đầu tư tài chính. Lập kế hoạch tài chính cá nhân	60
BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ	74
BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ	75

CHUYÊN ĐỀ I

BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: biến ngẫu nhiên rời rạc, các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc; phân bố Bernoulli và phân bố nhị thức.

§1 BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Trong một trò chơi quay số trúng thưởng, người ta dùng một lồng đựng 100 quả bóng có cùng kích thước và khối lượng, mỗi quả bóng khác nhau được viết một số nguyên dương khác nhau từ 1 đến 100. Mỗi lần quay lồng, ta nhận được ngẫu nhiên 1 quả bóng. Ghi lại số xuất hiện trên quả bóng và bỏ quả bóng đó trở lại vào lồng. Gọi X là số lần xuất hiện số 10 khi quay lồng 30 lần.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

*Đại lượng X nói trên trong toán học
được gọi là gì?*



I. KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC



1

Xét phép thử T : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp”.

- Viết không gian mẫu Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu.
- Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt ngửa. Hãy nêu các giá trị của X .
- Giá trị của X có dự đoán trước được không?

Nhận xét: Đại lượng X có các đặc điểm sau:

- Giá trị của X là một số thuộc tập hợp $\{0; 1; 2\}$;
- Giá trị của X là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

Ta nói X là một *biến ngẫu nhiên rời rạc*.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:



Xét phép thử ngẫu nhiên T có không gian mẫu Ω là tập hữu hạn phần tử.

Đại lượng X được gọi là một *biến ngẫu nhiên rời rạc* nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hợp hữu hạn nào đó, mỗi giá trị ấy không dự đoán trước được và phụ thuộc vào kết quả của phép thử ngẫu nhiên T .

Chú ý: Các biến ngẫu nhiên rời rạc thường được kí hiệu là $X, Y, Z, \dots$

Ví dụ 1 Xét phép thử T : “Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất một lần”.

- Viết không gian mẫu Ω gồm các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của xúc xắc.
- Gọi X là số chấm trên mặt xuất hiện của xúc xắc.
Đại lượng X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không?

Giải

- Không gian mẫu $\Omega = \{\text{mặt 1 chấm; mặt 2 chấm; ...; mặt 6 chấm}\}$.
- Đại lượng X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.



1 Chứng tỏ rằng trong bài toán ở phần mở đầu, X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; \dots; 30\}$.

II. PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC



2 Xét phép thử T : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp”. Xét biến ngẫu nhiên rời rạc X là số lần xuất hiện mặt ngửa.

Xét các biến cố:

- $X = 0$: “Số lần xuất hiện mặt ngửa sau hai lần tung bằng 0”;
 $X = 1$: “Số lần xuất hiện mặt ngửa sau hai lần tung bằng 1”;
 $X = 2$: “Số lần xuất hiện mặt ngửa sau hai lần tung bằng 2”.

- Tính $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$.

b) Tìm số thích hợp cho ? trong *Bảng 1*:

X	0	1	2
P	?	?	?

Bảng 1

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:



Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. Giả sử xác suất để X nhận giá trị x_k bằng p_k , tức là $P(X = x_k) = p_k$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Các thông tin về X như vậy được trình bày dưới dạng như bảng sau:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Bảng trên được gọi là *bảng phân bố xác suất* (hay gọi tắt là *phân bố xác suất*) của biến ngẫu nhiên rời rạc X .

Người ta chứng minh được rằng $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Ví dụ 2 Trong hộp có 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi trong hộp. Gọi X là số viên bi xanh trong 3 viên bi được chọn ra.

- Chứng minh rằng X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; 3\}$.
- Lập bảng phân bố xác suất của X .

Giải

- Xét phép thử T : “Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi trong hộp” có không gian mẫu là Ω . Ta thấy: Số viên bi xanh trong 3 viên bi được chọn ra nhận một trong các giá trị 0; 1; 2; 3.

Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; 3\}$.

- Với $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$, ta có:

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{1}{6}, P(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^2}{120} = \frac{1}{2}, P(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{120} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{1}{30}.$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Ví dụ 3 Có hai nhóm học sinh cùng tham gia một hoạt động của nhà trường. Nhóm thứ nhất có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Nhóm thứ hai có 3 học sinh nam và 7 học sinh nữ. Từ mỗi nhóm chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Gọi X là số học sinh nam trong số 2 học sinh được chọn ra.

- Lập bảng phân bố xác suất của X .
- Tính xác suất để trong số 2 học sinh được chọn ra có ít nhất 1 học sinh nam.

Giải

- Số cách chọn 2 học sinh sao cho mỗi học sinh ở một nhóm khác nhau là: $10 \cdot 10 = 100$.

Biến ngẫu nhiên rời rạc X chỉ có thể nhận các giá trị: 0, 1, 2.

Ta có:

$$P(X = 0) = \frac{6 \cdot 7}{100} = 0,42;$$

$$P(X = 1) = \frac{4 \cdot 7}{100} + \frac{6 \cdot 3}{100} = 0,46;$$

$$P(X = 2) = \frac{4 \cdot 3}{100} = 0,12.$$

Từ đó ta nhận được bảng phân bố xác suất của X như sau:

X	0	1	2
P	0,42	0,46	0,12

- Gọi A là biến cố “Trong số 2 học sinh được chọn ra có ít nhất 1 học sinh nam”.

Ta có: $P(A) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,46 + 0,12 = 0,58$.

2 Một nhóm có 10 học sinh, trong đó có 3 học sinh kết quả học tập Tốt, 4 học sinh kết quả học tập Khá, còn lại là học sinh kết quả học tập Đạt. Từ nhóm đó chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh. Gọi X là số học sinh kết quả học tập Tốt được chọn.

- Lập bảng phân bố xác suất của X .
- Tính xác suất để trong số 3 học sinh được chọn ra có ít nhất 1 học sinh kết quả học tập Tốt.

III. KÌ VỌNG

3 Một hộp đựng 10 quả cầu có cùng kích thước và màu sắc nhưng khác nhau về khối lượng: 5 quả cầu nặng 1 kg, 2 quả cầu nặng 2 kg, 3 quả cầu nặng 3 kg. Chọn ngẫu nhiên 1 quả cầu từ chiếc hộp.

- Tính khối lượng trung bình của 10 quả cầu trên.
- Gọi X (kg) là khối lượng của quả cầu được chọn.

Tính xác suất $p_1 = P(X = 1)$, $p_2 = P(X = 2)$, $p_3 = P(X = 3)$ và giá trị của biểu thức $E(X) = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3$.

c) So sánh khối lượng trung bình của 10 quả cầu và giá trị của $E(X)$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:



Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ và $p_i = P(X = x_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Kì vọng của X , kí hiệu là $E(X)$, là một số được tính theo công thức:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Nhận xét

- Kì vọng là một số cho ta ý niệm về độ lớn trung bình của X . Vì thế kì vọng $E(X)$ còn được gọi là giá trị trung bình của X .
- Kì vọng của X không nhất thiết thuộc tập giá trị của X .

Ví dụ 4 Trong một trò chơi đặt cược, người ta lấy 100 số, trong đó chỉ có 1 số thắng và 99 số thua. Người chơi phải đặt cọc số tiền T . Nếu thắng thì được 70 lần tiền đặt cọc, còn thua thì mất tiền đặt cọc. Mỗi lần chơi chỉ được chọn 1 số. Gọi X là số tiền thu về cho một lần chơi.

- Lập bảng phân bố xác suất của X .
- Tính số tiền trung bình thu về của một lần chơi.
- Có nên chơi trò này nhiều lần không?

Giải

- a) Vì trong một lần chơi thì số tiền thu về có thể là $-T$ nếu thua và $69T$ nếu thắng nên tập giá trị của X là $\{-T; 69T\}$.

Ta có:

$$P(X = -T) = \frac{99}{100} = 0,99; \quad P(X = 69T) = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Từ đó ta nhận được bảng phân bố xác suất của X như sau:

X	$-T$	$69T$
P	0,99	0,01

- b) Số tiền trung bình thu về của một lần chơi là:

$$E(X) = (-T) \cdot 0,99 + 69T \cdot 0,01 = -0,3T.$$

- c) Từ câu b) ta thấy trung bình mỗi lần chơi sẽ lỗ $0,3T$. Vì vậy không nên chơi nhiều lần.

Nhận xét: Trong thực tế sản xuất hay kinh doanh, nếu cần chọn phương án cho năng suất hay lợi nhuận cao, người ta chọn phương án sao cho năng suất kì vọng hay lợi nhuận kì vọng cao.



3 Trong hộp có 12 sản phẩm, trong đó có 8 sản phẩm loại I và 4 sản phẩm loại II. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 sản phẩm trong hộp. Gọi X là số sản phẩm loại I trong 3 sản phẩm được chọn ra. Tính kì vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc X .

IV. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

4 Trong Ví dụ 2, đặt $E(X) = \mu$.

a) Tính giá trị của biểu thức:

$$V(X) = (0 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2 - \mu)^2 \cdot \frac{3}{10} + (3 - \mu)^2 \cdot \frac{1}{30}.$$

b) Tính $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Nhận xét: Các số thực không âm $V(X)$, $\sigma(X)$ lần lượt được gọi là *phương sai*, *độ lệch chuẩn* của X .

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ và $p_i = P(X = x_i)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, $\mu = E(X)$.

• *Phương sai* của X , kí hiệu là $V(X)$, là số thực được tính theo công thức:

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n.$$

• Căn bậc hai (số học) của phương sai, kí hiệu là $\sigma(X)$, được gọi là *độ lệch chuẩn* của X , nghĩa là $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Nhận xét

- Phương sai cũng như độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc là một số không âm. Nó cho ta một ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình. Phương sai (hoặc độ lệch chuẩn) càng lớn thì độ phân tán càng lớn.
- Độ lệch chuẩn cùng đơn vị đo với X .

Chú ý: Bằng cách biến đổi biểu thức tính $V(X)$, ta có: $V(X) = (x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n) - \mu^2$.

Trong thực hành, ta thường dùng công thức này để tính phương sai.

Ví dụ 5 Thời gian sản xuất mỗi sản phẩm (đơn vị: phút) của máy A, máy B lần lượt xác định các biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y có phân bố xác suất được cho ở Bảng 2, Bảng 3.

X	1	2	3	4
P	0,3	0,1	0,5	0,1

Bảng 2

Y	1	3	4	5
P	0,55	0,05	0,3	0,1

Bảng 3

Nếu phải chọn mua một trong hai máy trên, ta nên chọn mua máy nào?

Giải

Xét thời gian sản xuất mỗi sản phẩm của mỗi máy, ta có:

$$E(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,1 = 2,4;$$

$$E(Y) = 1 \cdot 0,55 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,1 = 2,4.$$

Vậy $E(X) = E(Y)$.

Xét phương sai của thời gian sản xuất mỗi sản phẩm của mỗi máy, ta có:

$$V(X) = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,5 + 4^2 \cdot 0,1 - 2,4^2 = 1,04;$$

$$V(Y) = 1^2 \cdot 0,55 + 3^2 \cdot 0,05 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,1 - 2,4^2 = 2,54.$$

Ta thấy $V(Y) > V(X)$, nghĩa là thời gian sản xuất mỗi sản phẩm của máy A ổn định hơn so với máy B. Vậy ta nên chọn mua máy A.



4 Tính độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong *Luyện tập 3*.

BÀI TẬP

- Trong các trường hợp sau, trường hợp nào ta nhận được X là biến ngẫu nhiên rời rạc? Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc, tìm tập giá trị của X .
 - Tung một đồng xu cân đối và đồng chất bốn lần. Gọi X là số lần mặt ngửa xuất hiện;
 - Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất ba lần. Gọi X là số lần xuất hiện mặt 6 chấm.
- Một cuộc điều tra được tiến hành ở một trường trung học phổ thông như sau: Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh trong trường và hỏi gia đình bạn đó có bao nhiêu người. Gọi X là số người trong gia đình bạn đó. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không? Vì sao?
- Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong số các gia đình có hai con. Gọi X là số con gái trong gia đình đó. Hãy lập bảng phân bố xác suất của X , biết rằng xác suất sinh con gái là 0,5 và hai lần sinh là độc lập.
- Chọn ngẫu nhiên một ngày thứ Bảy trong các ngày thứ Bảy của năm 2022 mà một cửa hàng kinh doanh ô tô có mở cửa bán hàng. Gọi X là số ô tô mà cửa hàng bán ra trong ngày thứ Bảy đó. Biết rằng bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

X	1	2	3	4	5	6
P	0,18	0,39	0,24	0,14	0,04	0,01

Tính xác suất để trong ngày thứ Bảy đó cửa hàng bán được:

- Đúng 2 chiếc ô tô;

- b) Không quá 4 chiếc ô tô;
c) Nhiều hơn 4 chiếc ô tô.

5. Học sinh khối 12 của một trường trung học phổ thông được chia thành các nhóm học tập. Chọn ngẫu nhiên một nhóm trong số các nhóm học tập đó. Gọi X là số học sinh trong nhóm được chọn ra. Biết rằng bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

X	1	2	3	4	5	6
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X .

6. Trong lô hàng 10 chiếc máy tính mới nhập về có 3 chiếc bị lỗi, 7 chiếc đạt chuẩn. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 chiếc máy tính trong lô hàng đó. Gọi X là số máy tính bị lỗi trong 4 chiếc được chọn ra.
- Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X .
 - Khi chọn ra 4 chiếc máy tính thì tình huống mấy chiếc bị lỗi có khả năng xảy ra cao nhất?
 - Tính xác suất để trong 4 chiếc máy tính được chọn ra có ít nhất 1 chiếc bị lỗi.
 - Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X .
7. Một nhóm học sinh lớp 12 của một trường trung học phổ thông gồm có 10 người, trong đó có 3 học sinh lớp 12A, 4 học sinh lớp 12B, 3 học sinh từ các lớp 12 còn lại của nhà trường. Từ nhóm học sinh đó, chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh. Gọi X là số học sinh lớp 12A trong số 3 học sinh được chọn ra.
- Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X .
 - Tính kì vọng, phương sai của X .
 - Tính xác suất để trong số 3 học sinh được chọn ra có ít nhất 1 học sinh lớp 12A.
8. Có hai nhóm học sinh. Nhóm thứ nhất có 5 nam và 6 nữ. Nhóm thứ hai có 5 nam và 7 nữ. Từ mỗi nhóm học sinh, ta chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Gọi X là số học sinh nữ trong số 2 học sinh được chọn ra.
- Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X .
 - Tính kì vọng, phương sai của X .

Xét phép thử T : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất một lần”. Do chỉ có hai kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu là S và N nên không gian mẫu của phép thử đó là $\Omega = \{S; N\}$.

Gọi X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị bằng 0 nếu mặt xuất hiện của đồng xu là S và nhận giá trị bằng 1 nếu mặt xuất hiện của đồng xu là N.



Nhà toán học Jacob Bernoulli
(1655 – 1705)

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)



Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X gợi nên khái niệm gì trong toán học?

I. PHÂN BỐ BERNOULLI

1 Xét phép thử T : “Một vận động viên bắn 1 phát súng vào mục tiêu”. Gọi X là số lần bắn trúng mục tiêu. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị thuộc tập hợp $\{0; 1\}$.

Giả sử $P(X = 1) = p$ ($0 < p < 1$). Suy ra $P(X = 0) = 1 - p$.

Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X .

Nhận xét: Bảng phân bố xác suất lập được ở trên gọi là *phân bố Bernoulli* của biến ngẫu nhiên rời rạc X .

Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:



Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có *phân bố Bernoulli* với tham số $p \in (0; 1)$, kí hiệu là $X \sim \text{Ber}(p)$, nếu X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1
P	$1 - p$	p

Ví dụ 1 Biến ngẫu nhiên rời rạc X ở phần mở đầu có phân bố Bernoulli hay không? Vì sao?

Giải

Ta có: $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$. Vậy biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố Bernoulli với tham số $p = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2 Xét phép thử ngẫu nhiên T có không gian mẫu Ω và A là một biến cố ($A \subset \Omega$). Gọi X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị bằng 1 nếu biến cố A xảy ra và nhận giá trị bằng 0 nếu biến cố A không xảy ra. Biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bố Bernoulli hay không? Vì sao?

Giải

Giả sử $P(A) = p$ ($0 < p < 1$). Suy ra $P(\bar{A}) = 1 - p$.

Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

X	0	1
P	$1 - p$	p

Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố Bernoulli với tham số p .

1 Một câu hỏi trắc nghiệm có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Bạn An chọn ngẫu nhiên 1 phương án để trả lời câu hỏi đó. Giả sử X nhận giá trị 1 nếu phương án chọn của bạn An là đúng và nhận giá trị 0 trong trường hợp ngược lại. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc hay không? Nếu có, X có phân bố Bernoulli hay không? Vì sao?

II. PHÂN BỐ NHỊ THỨC

1. Phép thử lặp và công thức Bernoulli



- Xét phép thử T : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất một lần”. Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu. Viết không gian mẫu Ω của phép thử T .
- Xét phép thử T_1 : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp một cách độc lập” (T_1 còn được gọi là *phép thử lặp* và việc tung một đồng xu hai lần liên tiếp *một cách độc lập* được hiểu là kết quả có thể xảy ra của lần tung thứ hai không phụ thuộc vào kết quả có thể xảy ra của lần tung thứ nhất).

Nêu những kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu sau hai lần tung. Viết không gian mẫu Ω_1 của phép thử T_1 .

c) Trong phép thử lặp T_1 , ta xét các biến cố:

A_0 : “Mặt sấp không xuất hiện trong cả hai lần tung”;

A_1 : “Mặt sấp xuất hiện một lần trong cả hai lần tung”;

A_2 : “Mặt sấp xuất hiện hai lần trong cả hai lần tung”.

• Tính $P(A_0)$, $P(A_1)$, $P(A_2)$.

• Với mỗi $k = 0, 1, 2$, hãy so sánh: $P(A_k)$ và $C_2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k}$.

Trong trường hợp tổng quát:

Xét phép thử ngẫu nhiên T có không gian mẫu Ω là tập hợp chỉ gồm hai kết quả, kí hiệu L và $\bar{L}$, tức là: $\Omega = L \cup \bar{L}$. Giả sử $P(L) = p$ ($0 < p < 1$).

Xét phép thử T_1 : “Thực hiện n lần liên tiếp phép thử T một cách độc lập” (ở đó việc thực hiện n lần liên tiếp phép thử T một cách độc lập được hiểu là kết quả có thể xảy ra của một lần thực hiện phép thử T không phụ thuộc vào kết quả có thể xảy ra của những lần thực hiện phép thử T trước đó). Phép thử T_1 nói trên được gọi là *phép thử lặp*.

Mỗi phần tử của không gian mẫu Ω_1 của phép thử lặp T_1 là một dãy n kết quả mà mỗi kết quả là L hoặc $\bar{L}$.

Ta thừa nhận kết quả sau:

Xét phép thử lặp T_1 nói trên.



Với mỗi k ($0 \leq k \leq n$), xét biến cố A_k : “Kết quả L xuất hiện k lần trong n lần thực hiện phép thử T một cách độc lập”. Khi đó:

$$P(A_k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \text{ với } P(L) = p.$$

Công thức trên được gọi là *công thức Bernoulli*.

Ví dụ 3 Xét phép thử T_2 : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp một cách độc lập”. Tính xác suất của các biến cố:

A_0 : “Mặt sấp không xuất hiện trong cả ba lần tung”;

A_1 : “Mặt sấp xuất hiện một lần trong cả ba lần tung”;

A_2 : “Mặt sấp xuất hiện hai lần trong cả ba lần tung”;

A_3 : “Mặt sấp xuất hiện ba lần trong cả ba lần tung”.

Giải

Xét phép thử T : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất một lần”. Không gian mẫu của phép thử T là $\Omega_T = \{S; N\}$. Khi đó, T_2 là phép thử lặp có không gian mẫu $\Omega_{T_2} = \{SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN\}$.

Vì xác suất xuất hiện mặt sấp trong một lần tung là $\frac{1}{2}$ nên áp dụng công thức Bernoulli với $p = \frac{1}{2}$ và k nhận giá trị lần lượt bằng 0, 1, 2, 3 ở phép thử lặp T_2 , ta có:

$$P(A_0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} = \frac{1}{8} = 0,125;$$

$$P(A_1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{3}{8} = 0,375;$$

$$P(A_2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8} = 0,375;$$

$$P(A_3) = C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

2 Người ta tiến hành xét nghiệm một loại bệnh cho 5 người liên tiếp một cách độc lập. Xác suất mỗi người được xét nghiệm nhận kết quả dương tính đều là 0,2. Hãy tính xác suất của biến cố C : “Trong 5 người được xét nghiệm có 2 người nhận kết quả dương tính”.

Ví dụ 4 Một xạ thủ bắn 5 lần liên tiếp vào mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng mục tiêu trong 1 lần bắn là 0,8. Hãy tính xác suất của biến cố B : “Trong 5 lần bắn có 3 lần trúng mục tiêu”.

Giải

Xét phép thử lặp T : “Bắn 5 lần liên tiếp vào mục tiêu một cách độc lập”. Áp dụng công thức Bernoulli với $p = 0,8$ và $k = 3$, ta có:

$$P(B) = C_5^3 \cdot (0,8)^3 \cdot (1 - 0,8)^{5-3} = 10 \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = 0,2048.$$

2. Phân bố nhị thức

3 Xét phép thử lặp T_1 : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp một cách độc lập”. Gọi X là số lần mặt ngửa xuất hiện sau hai lần tung.

Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X .

Nhận xét: Bảng phân bố xác suất lập được ở trên gọi là *phân bố nhị thức* của biến ngẫu nhiên rời rạc X .

Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:

Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có *phân bố nhị thức* với tham số n và p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0; 1)$), kí hiệu $X \sim B(n, p)$, nếu X nhận các giá trị thuộc tập hợp $\{0; 1; 2; \dots; n\}$ với xác suất:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X như sau:

X	0	...	k	...	n
P	$(1 - p)^n$	...	$C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$	...	p^n

Chú ý

• Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc có *phân bố nhị thức* với tham số n và p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0; 1)$). Khi đó, kì vọng $E(X) = np$ và phương sai $V(X) = np(1 - p)$.

• Xét phép thử ngẫu nhiên T có không gian mẫu Ω là tập hợp chỉ gồm hai kết quả, kí hiệu L và $\bar{L}$, với $P(L) = p$ ($0 < p < 1$). Xét phép thử lặp T_1 : “Thực hiện n lần liên tiếp phép thử T một cách độc lập”. Gọi X là biến ngẫu nhiên rời rạc chỉ số lần xuất hiện kết quả L trong phép thử lặp T_1 . Khi đó, X có phân bố nhị thức với tham số n và p .

Ví dụ 5 Xét phép thử lặp T_2 : “Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp một cách độc lập” trong Ví dụ 3. Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong cả ba lần tung. Biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bố nhị thức hay không? Vì sao?

Giải

Sử dụng các kết quả tính toán trong Ví dụ 3, ta có thể lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X là:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Vậy X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức với tham số $n = 3$ và $p = 0,5$.

Ví dụ 6 Một xưởng sản xuất có 5 máy hoạt động độc lập với nhau. Xác suất mỗi máy bị hỏng trong một ngày là 0,1. Tính xác suất có đúng 2 máy bị hỏng trong một ngày.

Giải

Xét phép thử lặp T : “Kiểm tra tình trạng hoạt động của 5 máy một cách độc lập”. Gọi X là số máy bị hỏng trong một ngày. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức với tham số $n = 5$ và $p = 0,1$. Do đó $P(X=2) = C_5^2 \cdot (0,1)^2 \cdot (1-0,1)^{5-2} = 10 \cdot 0,01 \cdot (0,9)^3 = 0,0729$. Vậy xác suất có đúng 2 máy bị hỏng trong một ngày là 0,0729.

3 Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất 10 lần một cách độc lập. Tính xác suất mặt 1 chấm xuất hiện không quá ba lần.

Ví dụ 7 Tỷ lệ sản phẩm lỗi của một lô hàng là 1%. Từ lô hàng này chọn ra ngẫu nhiên (có hoàn lại) n sản phẩm một cách độc lập. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho xác suất nhận được ít nhất 1 sản phẩm lỗi trong n sản phẩm được chọn ra lớn hơn 0,95.

Giải

Gọi X là số sản phẩm lỗi trong n sản phẩm được chọn ra ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức với tham số n và $p = 0,01$.

Do đó, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0 \cdot (0,01)^0 \cdot (1-0,01)^{n-0} = 1 - (0,99)^n$.

Suy ra $P(X \geq 1) > 0,95 \Leftrightarrow 1 - (0,99)^n > 0,95 \Leftrightarrow (0,99)^n < 0,05 \Leftrightarrow n > \log_{0,99} 0,05$.

Từ đó, ta có: $n > 298,07$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 299.

Ví dụ 8 Bạn Ngân tham dự một kì thi vấn đáp gồm 3 câu hỏi, các câu hỏi được trả lời một cách độc lập, với mỗi câu hỏi: trả lời đúng được 10 điểm, trả lời sai không được điểm. Xác suất bạn Ngân trả lời đúng 1 câu hỏi là 0,7. Tính xác suất tổng số điểm bạn Ngân nhận được sau khi trả lời cả ba câu hỏi ít nhất là 20 điểm.

Giải

Gọi X là số câu hỏi bạn Ngân trả lời đúng. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức với tham số $n = 3$ và $p = 0,7$.

Tổng số điểm bạn Ngân nhận được khi đó là: $Y = 10X$.

Ta có: $Y \geq 20 \Leftrightarrow 10X \geq 20 \Leftrightarrow X \geq 2$.

Do đó $P(Y \geq 20) = P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= C_3^2 \cdot (0,7)^2 \cdot (1-0,7)^1 + C_3^3 \cdot (0,7)^3 \cdot (1-0,7)^0 = 0,784.$$

Vậy xác suất tổng số điểm bạn Ngân nhận được ít nhất là 20 điểm sau khi trả lời cả ba câu hỏi là 0,784.

BÀI TẬP

- Một bác sĩ chữa khỏi bệnh A cho một người bị bệnh đó với xác suất là 95%. Giả sử có 10 người bị bệnh A đến bác sĩ chữa một cách độc lập. Tính xác suất để:
 - Có 8 người khỏi bệnh A.
 - Có nhiều nhất là 9 người khỏi bệnh A.
- Một người bắn bia với xác suất bắn trúng là 0,7.
 - Giả sử người đó bắn 3 lần liên tiếp một cách độc lập. Tính xác suất có ít nhất 1 lần bắn trúng bia.
 - Giả sử người đó bắn n lần liên tiếp một cách độc lập. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho xác suất có ít nhất 1 lần bắn trúng bia trong n lần bắn đó là lớn hơn 0,9.
- Một thành phố có 70% số gia đình có ti vi. Chọn ra ngẫu nhiên (có hoàn lại) một cách độc lập 20 gia đình. Gọi X là số gia đình có ti vi trong 20 gia đình đã chọn ra. Tính xác suất để:
 - Có đúng 10 gia đình có ti vi.
 - Có ít nhất 2 gia đình có ti vi.

4. Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 10 lần liên tiếp một cách độc lập. Tính xác suất mặt 1 chấm xuất hiện đúng 3 lần trong 10 lần gieo đó.
5. Một hộp đựng các viên bi xanh và viên bi đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Giả sử tỉ lệ số viên bi xanh trong hộp là 60%. Chọn ra ngẫu nhiên (có hoàn lại) một cách độc lập 15 viên bi trong hộp. Hãy tính xác suất của các tình huống sau:
- Có 10 viên bi xanh trong 15 viên bi được chọn ra;
 - Có 7 viên bi đỏ trong 15 viên bi được chọn ra.
6. Anh Châu tham gia quảng cáo cho một loại sản phẩm. Xác suất 1 lần quảng cáo thành công (tức là bán được sản phẩm sau lần quảng cáo đó) của anh Châu là $\frac{1}{3}$. Anh Châu thực hiện 12 lần quảng cáo liên tiếp một cách độc lập. Gọi X là số lần quảng cáo thành công trong 12 lần quảng cáo đó.
- Tính xác suất để có từ 3 đến 5 lần quảng cáo thành công.
 - Tìm số lần quảng cáo thành công có xác suất lớn nhất. Tính xác suất lớn nhất đó.
7. Giả sử tỉ lệ người dân tham gia giao thông ở Hà Nội có hiểu biết cơ bản về Luật giao thông đường bộ là 80%. Chọn ngẫu nhiên (có hoàn lại) 20 người đang tham gia giao thông trên đường. Hãy tính xác suất của các tình huống sau:
- Có 15 người hiểu biết cơ bản về Luật giao thông đường bộ.
 - Có 8 người không hiểu biết cơ bản về Luật giao thông đường bộ.
 - Số người không hiểu biết cơ bản về Luật giao thông đường bộ có xác suất lớn nhất.
8. Giả sử một phòng thí nghiệm phải kiểm tra 120 mẫu máu người (mỗi mẫu của 1 người) để tìm ra các mẫu có chứa một loại kháng thể X. Giả sử xác suất để 1 mẫu máu có kháng thể X là 2% và các mẫu máu độc lập với nhau.
- Do tính cấp bách của công tác phòng chống dịch nên thời gian dành cho xét nghiệm là rất ngắn. Thay vì xét nghiệm từng mẫu một, người ta làm như sau: Chia 120 mẫu thành 6 nhóm, mỗi nhóm có 20 mẫu. Lấy một ít máu từ mỗi mẫu trong cùng một nhóm trộn với nhau để được 1 mẫu hỗn hợp, rồi xét nghiệm mẫu hỗn hợp đó. Nếu kết quả xét nghiệm mẫu hỗn hợp là âm tính (mẫu hỗn hợp không có kháng thể X) thì coi như cả 20 mẫu trong nhóm đều không có kháng thể X, còn nếu mẫu hỗn hợp có kháng thể X, thì làm tiếp 20 xét nghiệm, mỗi xét nghiệm cho từng mẫu của nhóm.
- Xác suất để một mẫu máu hỗn hợp có chứa kháng thể X là bao nhiêu?
 - Gọi S là tổng số lần phải xét nghiệm cho cả 6 nhóm. Tính kì vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên rời rạc S (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
 - Chứng minh rằng số lần xét nghiệm trung bình cho 120 mẫu máu đó theo cách ghép nhóm trên là nhỏ hơn 48.

CHUYÊN ĐỀ II

ỨNG DỤNG TOÁN HỌC ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: vận dụng hệ bất phương trình bậc nhất để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính; vận dụng đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu trong thực tiễn, đặc biệt là trong kinh tế.

§1

VẬN DỤNG HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Một công ty kinh doanh đồ uống sản xuất hai loại nước sinh tố theo công thức sau:

Trong 1 l nước sinh tố loại thứ nhất có 0,7 l nước anh đào, 0,3 l nước cam và giá bán là 24 000 đồng/lít.

Trong 1 l nước sinh tố loại thứ hai có 0,4 l nước anh đào, 0,6 l nước cam và giá bán là 18 000 đồng/lít.

Công ty có 120 l nước anh đào và 150 l nước cam.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)



Hỏi công ty phải sản xuất bao nhiêu lít nước sinh tố mỗi loại sao cho tổng số tiền công ty thu được là nhiều nhất?

I. KHÁI NIỆM VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH



Trong bài toán ở phần mở đầu, gọi x, y lần lượt là số lít nước sinh tố loại thứ nhất và loại thứ hai mà công ty dự định sản xuất.

- Viết các điều kiện ràng buộc đối với x và y để đáp ứng nhu cầu trên của công ty.
- Viết điều kiện ràng buộc đối với x và y sao cho tổng số tiền công ty thu được là nhiều nhất.

Nhận xét: Bài toán ở phần mở đầu có thể viết ở dạng tổng quát sau:

$$\begin{cases} \max(T = 24\,000x + 18\,000y) & (1) \\ 0,7x + 0,4y \leq 120 & (2) \\ 0,3x + 0,6y \leq 150 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5). \end{cases}$$

Bài toán có dạng như trên được gọi là *bài toán quy hoạch tuyến tính* (hai biến x, y).

Hàm số $T = 24\,000x + 18\,000y$ là hàm bậc nhất đối với x, y và được gọi là *hàm mục tiêu*. Ta cần đi tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của hàm mục tiêu đó.

Các điều kiện ràng buộc (2), (3), (4), (5) đều là các bất phương trình bậc nhất đối với x, y .



Bài toán *quy hoạch tuyến tính* là bài toán tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của *hàm mục tiêu* trong điều kiện hàm mục tiêu là hàm bậc nhất đối với các biến và mỗi một điều kiện ràng buộc là bất phương trình bậc nhất đối với các biến (không kể điều kiện ràng buộc biến thuộc tập số nào).

Chú ý: Ta có thể viết bài toán quy hoạch tuyến tính (hai biến x, y) về dạng sau:

$$\begin{cases} \max(T = \alpha x + \beta y) \\ a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \\ a_kx + b_ky \leq c_k \end{cases} \quad (\text{I}) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \min(T = \alpha x + \beta y) \\ a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \\ a_kx + b_ky \leq c_k \end{cases} \quad (\text{II}),$$

trong đó các điều kiện ràng buộc đều là các bất phương trình bậc nhất đối với x, y .

Ví dụ Một doanh nghiệp cần sản xuất hai loại sơn từ hoá chất màu A và hoá chất màu B theo công thức sau: Để pha 1 l loại sơn thứ nhất, cần dùng 0,4 l hoá chất màu A và 0,6 l hoá chất màu B . Để pha 1 l loại sơn thứ hai, cần dùng 0,3 l hoá chất màu A và 0,7 l hoá chất màu B . Giá bán của loại sơn thứ nhất, loại sơn thứ hai lần lượt là 300 000 đồng/lít,

350 000 đồng/lít. Công ty có 250 l hoá chất màu A và 300 l hoá chất màu B. Trong những điều kiện đó, doanh nghiệp cần xác định số lượng mỗi loại sơn phải sản xuất sao cho số tiền thu được là lớn nhất. Hãy viết yêu cầu đó của doanh nghiệp ở dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số lít sơn loại thứ nhất, loại thứ hai mà doanh nghiệp dự định sản xuất. Số tiền doanh nghiệp thu được khi đó là: $T = 300\,000x + 350\,000y$ (đồng). Do hoá chất màu A dùng để sản xuất không vượt quá 250 l nên ta có: $0,4x + 0,3y \leq 250$.

Do hoá chất màu B dùng để sản xuất không vượt quá 300 l nên ta có: $0,6x + 0,7y \leq 300$.

Vậy yêu cầu đó của doanh nghiệp có thể viết ở dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \max(T = 300\,000x + 350\,000y) & (1) \\ 0,4x + 0,3y \leq 250 & (2) \\ 0,6x + 0,7y \leq 300 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5). \end{cases}$$

1 Người ta cần đóng 20 kg hàng hoá vào hai loại hộp. Mỗi chiếc hộp loại I đựng được 2 kg hàng hoá. Mỗi chiếc hộp loại II đựng được 3 kg hàng hoá. Hãy lập mô hình toán học của bài toán trên sao cho số hộp cần dùng là nhỏ nhất.

II. CÁCH GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Ở lớp 10, ta đã làm quen với cách giải một số bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể có dạng (I) hoặc dạng (II).

Ta có thể giải một số bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng (I) hoặc dạng (II) theo các bước sau:



Bước 1. Xác định miền nghiệm (S) của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots \\ a_kx + b_ky \leq c_k. \end{cases}$$

Bước 2. Trong tất cả các điểm thuộc (S), tìm điểm $(x; y)$ sao cho biểu thức $T(x, y) = ax + by$ có giá trị lớn nhất với bài toán ở dạng (I) (hoặc có giá trị nhỏ nhất với bài toán ở dạng (II)).

Chú ý: Khi miền nghiệm (S) là đa giác, ta thừa nhận rằng biểu thức $T = ax + by$ đạt giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tại cặp số thực $(x; y)$ là toạ độ một trong các đỉnh của đa giác đó.

Khi đó, ta có thể thực hiện *Bước 2* như sau:

- Xác định toạ độ các đỉnh của đa giác đó.
- Tính giá trị của biểu thức $T(x, y) = ax + by$ tại các đỉnh của đa giác đó.
- So sánh các giá trị và kết luận.

Bài toán 1. Một cửa hàng điện tử dự định kinh doanh hai loại ti vi: loại 50 inch và loại 55 inch với số vốn ban đầu không vượt quá 1,8 tỉ đồng. Giá nhập và lợi nhuận dự kiến của mỗi loại ti vi được cho trong *Bảng 1*.

Số tiền \ Loại Tivi	Ti vi 50 inch	Ti vi 55 inch
Giá nhập vào (triệu đồng/1 máy)	15	25
Lợi nhuận dự kiến (triệu đồng/1 máy)	2	3

Bảng 1

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu tiêu thụ của thị trường sẽ không vượt quá 100 chiếc ti vi cả hai loại. Tính số lượng ti vi mỗi loại mà cửa hàng nên nhập về để lợi nhuận thu được (sau khi bán hết hàng nhập về) là lớn nhất.

Giải

Giả sử cửa hàng cần nhập x (chiếc) ti vi 50 inch và y (chiếc) ti vi 55 inch ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$). Lợi nhuận cửa hàng thu được khi đó là: $T = 2x + 3y$ (triệu đồng).

Số tiền để nhập hai loại ti vi với số lượng như trên là $15x + 25y$ (triệu đồng).

Số tiền tối đa để đầu tư cho hai loại ti vi là 1,8 tỉ đồng nên ta có: $15x + 25y \leq 1\,800$ hay $3x + 5y \leq 360$.

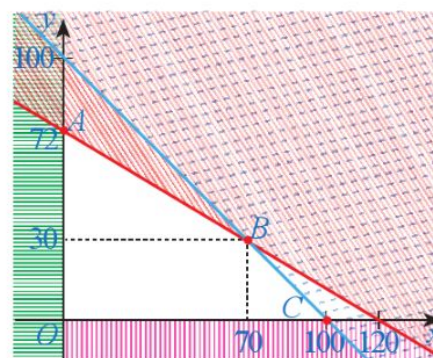
Vì nhu cầu tiêu thụ của thị trường không quá 100 máy nên $x + y \leq 100$.

Vì vậy, yêu cầu của cửa hàng có thể viết ở dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \max(T = 2x + 3y) \\ 3x + 5y \leq 360 \\ x + y \leq 100 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (\text{III})$$

Xét hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (x, y là các số thực):

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 360 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (\text{III}')$$



Hình 1

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + 3y$ khi $(x; y)$ thoả mãn hệ bất phương trình (III').

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (III').

Miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ với toạ độ các đỉnh $O(0; 0)$, $A(0; 72)$, $B(70; 30)$, $C(100; 0)$ (Hình 1).

Bước 2. Tính giá trị của biểu thức $T(x, y) = 2x + 3y$ tại các đỉnh của tứ giác này:

$$T(0, 0) = 0; T(0, 72) = 216; T(70, 30) = 230; T(100, 0) = 200.$$

Bước 3. Ta đã biết biểu thức $T = 2x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất tại cặp số thực $(x; y)$ là toạ độ một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$. So sánh bốn giá trị thu được của T ở **Bước 2**, ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $T(70, 30) = 230$.

Bước 4. Vì 70 và 30 đều là số tự nhiên nên cặp số $(x; y) = (70; 30)$ là nghiệm của bài toán (III).

Vậy cửa hàng cần nhập về 70 chiếc ti vi loại 50 inch và 30 chiếc ti vi loại 55 inch để lợi nhuận thu được (sau khi bán hết hàng nhập về) là lớn nhất.

2 Hãy giải bài toán trong phần mở đầu.

Bài toán 2. Cô Hạnh đầu tư không quá 1,2 tỉ đồng vào hai loại cổ phiếu: cổ phiếu A dự kiến chi trả cổ tức bằng tiền với tỉ lệ 4%; cổ phiếu B rủi ro cao dự kiến chi trả cổ tức bằng tiền với tỉ lệ 10%. Giá cổ phiếu A là 15 000 đồng/1 cổ phiếu, giá cổ phiếu B là 25 000 đồng/1 cổ phiếu. Để giảm thiểu rủi ro, cô Hạnh quyết định mua số lượng cổ phiếu B không quá 12 000 cổ phiếu. Hỏi cô Hạnh nên đầu tư mỗi loại bao nhiêu cổ phiếu để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Giải

Giả sử cô Hạnh cần mua x cổ phiếu A và y cổ phiếu B ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$).

Khi đó, số tiền cô Hạnh cần chi ra là: $15\,000x + 25\,000y$ (đồng).

Vì số tiền cô Hạnh dự định đầu tư không quá 1,2 tỉ đồng nên ta có:

$$\begin{aligned} 15\,000x + 25\,000y &\leq 1\,200\,000\,000 \\ \text{hay } 3x + 5y &\leq 240\,000. \end{aligned}$$

Vì số lượng cổ phiếu B được mua không quá 12 000 cổ phiếu nên $y \leq 12\,000$.

Một cổ phiếu A sẽ nhận được số tiền chi trả cổ tức là: $4\% \times 15\,000 = 600$ (đồng).

Một cổ phiếu B sẽ nhận được số tiền chi trả cổ tức là: $10\% \times 25\,000 = 2\,500$ (đồng).

Do đó, cô Hạnh nhận được số tiền chi trả cổ tức là:

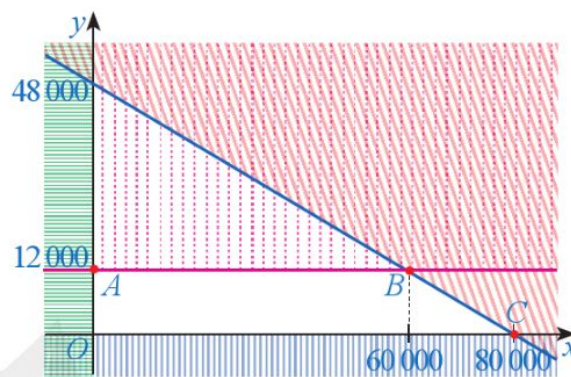
$$T = 600x + 2\,500y \text{ (đồng)}.$$

Vì vậy, yêu cầu của cô Hạnh có thể viết ở dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \max(T = 600x + 2\,500y) \\ 3x + 5y \leq 240\,000 \\ y \leq 12\,000 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (\text{IV})$$

Xét hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (x, y là các số thực):

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 240\,000 \\ y \leq 12\,000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (\text{IV}')$$



Hình 2

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 600x + 2\,500y$ khi $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình (IV').

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (IV').

Miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ với tọa độ các đỉnh $O(0; 0)$, $A(0; 12\,000)$, $B(60\,000; 12\,000)$, $C(80\,000; 0)$ (Hình 2).

Bước 2. Tính giá trị của biểu thức $T(x, y) = 600x + 2\,500y$ tại các đỉnh của tứ giác này:

$$T(0, 0) = 0; \quad T(0, 12\,000) = 30\,000\,000; \quad T(60\,000, 12\,000) = 66\,000\,000; \\ T(80\,000, 0) = 48\,000\,000.$$

Bước 3. Ta đã biết biểu thức $T = 600x + 2\,500y$ đạt giá trị lớn nhất tại cặp số thực $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$. So sánh bốn giá trị thu được của T ở Bước 2, ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $T(60\,000, 12\,000) = 66\,000\,000$.

Bước 4. Vì 60 000 và 12 000 đều là số tự nhiên nên cặp số $(x, y) = (60\,000, 12\,000)$ là nghiệm của bài toán (IV).

Vậy cô Hạnh cần mua 60 000 cổ phiếu A và 12 000 cổ phiếu B để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Bài toán 3. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu K, P để sản xuất ít nhất 72 kg sản phẩm loại I và 80 kg sản phẩm loại II. Từ mỗi tấn nguyên liệu K giá 4 triệu đồng, có thể sản xuất được 24 kg sản phẩm loại I và 40 kg sản phẩm loại II. Từ mỗi tấn nguyên liệu P giá 3 triệu đồng, có thể sản xuất được 36 kg sản phẩm loại I và 20 kg sản phẩm loại II. Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất?

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu K, P sử dụng.

Khi đó, ta sản xuất được $24x + 36y$ (kg) sản phẩm loại I và $40x + 20y$ (kg) sản phẩm loại II.

Theo giả thiết, x và y phải thoả mãn các điều kiện:

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$24x + 36y \geq 72 \text{ hay } 2x + 3y \geq 6;$$

$$40x + 20y \geq 80 \text{ hay } 2x + y \geq 4.$$

Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là $T = 4x + 3y$.

Bài toán đưa về: Tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases} \quad (V)$$

sao cho $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (V).

Miền nghiệm (S) của hệ bất phương trình (V) là hình phẳng giới hạn bởi tia Ay , các cạnh AB và BC , tia Cx kể cả biên với $A(0; 4)$, $B\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $C(3; 0)$ (Hình 3).

Bước 2. Tính giá trị của biểu thức

$T(x, y) = 4x + 3y$ tại các “đỉnh”

$A(0; 4)$, $B\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $C(3; 0)$ của

miền nghiệm (S): $T(0, 4) = 12$;

$$T\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 9; T(3, 0) = 12.$$

Bước 3. Ta thừa nhận biểu thức $T = 4x + 3y$

có giá trị nhỏ nhất tại một trong các

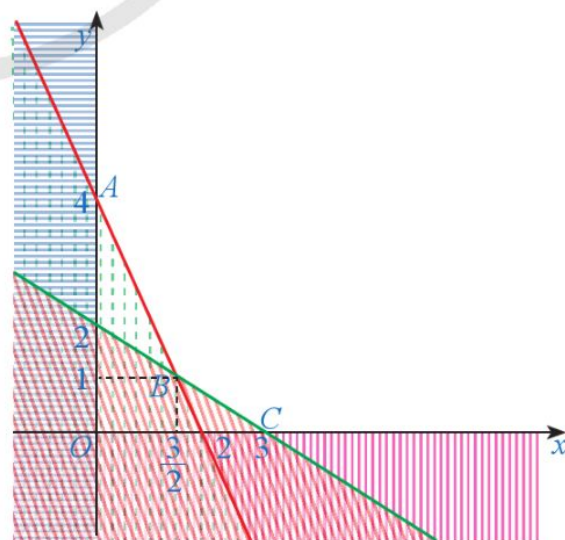
“đỉnh” $A(0; 4)$, $B\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $C(3; 0)$

của miền nghiệm (S). So sánh ba

giá trị thu được của T ở Bước 2, ta

được giá trị nhỏ nhất cần tìm là

$$T\left(\frac{3}{2}, 1\right) = 9.$$



Hình 3

Vậy để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất, cần dùng $\frac{3}{2}$ tấn nguyên liệu K , 1 tấn nguyên liệu P và khi đó chi phí là 9 triệu đồng.

Chú ý: Với những bài toán tương tự như *Bài toán 3*, ta có thể tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T(x, y)$ như sau:

- Xác định tọa độ các “đỉnh” của miền nghiệm (S).
- Tính giá trị của biểu thức $T(x, y)$ tại các “đỉnh” đó của miền nghiệm (S).
- Ta thừa nhận rằng biểu thức $T(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại cặp số thực $(x; y)$ là tọa độ một trong các “đỉnh” đó của miền nghiệm (S).

3 Một kho hàng có hai loại hàng hoá A và B. Người ta dùng hai loại xe tải để chở hàng từ kho đó. Mỗi chiếc xe tải loại thứ nhất chi phí hết 6 triệu đồng chở được 4 tấn hàng hoá A và 3 tấn hàng hoá B. Mỗi chiếc xe tải loại thứ hai chi phí hết 4 triệu đồng chở được 3 tấn hàng hoá A và 2 tấn hàng hoá B. Người ta cần chuyển đi từ kho đó ít nhất 21 tấn hàng hoá A và 15 tấn hàng hoá B. Hỏi phải dùng bao nhiêu xe tải mỗi loại để chi phí vận chuyển là ít nhất?

BÀI TẬP

- Để hoàn thành hợp đồng đúng hạn, một nhà máy tổ chức cho công nhân làm việc theo hai ca, ca I từ 7h30 đến 15h30 và ca II từ 16h00 đến 22h00. Mỗi ca có số công nhân làm việc tối thiểu là 40 người và tối đa là 120 người. Số công nhân làm việc ở cả hai ca ít nhất là 100 người.

Thu nhập tăng thêm cho mỗi công nhân được tính theo *Bảng 2*.

Thu nhập tăng thêm (nghìn đồng/giờ)	Ca I	Ca II
	20	25

Bảng 2

Tính số lượng công nhân làm việc cho từng ca sao cho số tiền nhà máy trả cho thu nhập tăng thêm là nhỏ nhất.

- Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1 305 mg. Trong 1 lạng (100 g) đậu nành có 165 mg canxi, 1 lạng thịt có 15 mg canxi (Nguồn: <https://hongngochospital.vn>). Gia đình chị Thảo có bốn người đang độ tuổi trưởng thành, dự định ăn một ngày tối thiểu 3 lạng đậu nành và 7 lạng thịt, nhưng ăn không quá 4 kg cả đậu nành và thịt. Giá tiền đậu nành là 50 000 đồng/1 kg, giá tiền thịt là 85 000 đồng/1 kg. Hỏi gia đình chị Thảo cần mua bao nhiêu lạng mỗi loại đậu nành và thịt sao cho chi phí để mua hai loại thực phẩm đó là nhỏ nhất?

3. Người ta cần sơn hai loại sản phẩm A, B bằng hai loại sơn: sơn xanh, sơn vàng. Lượng sơn để sơn mỗi loại sản phẩm đó được cho ở *Bảng 3* (đơn vị: kg/1 sản phẩm).

Lượng sơn \ Loại sơn	Sơn xanh	Sơn vàng
Sản phẩm loại A	6	2
Sản phẩm loại B	2	2

Bảng 3

Người ta dự định sử dụng không quá 12 kg sơn xanh và không quá 8 kg sơn vàng để sơn tất cả các sản phẩm của hai loại đó. Mỗi sản phẩm loại A lãi 10 triệu đồng và mỗi sản phẩm loại B lãi 8 triệu đồng. Tính số lượng sản phẩm từng loại cần sơn sao cho số tiền lãi thu được là lớn nhất.

4. Một cơ sở sản xuất đồ gỗ dự định sản xuất ba loại sản phẩm là bàn, ghế và tủ. Định mức sử dụng lao động, chi phí sản xuất và giá bán mỗi sản phẩm mỗi loại ước tính trong *Bảng 4*:

Định mức \ Loại sản phẩm	Bàn	Ghế	Tủ
Công lao động (ngày công/1 sản phẩm)	2	1	3
Chi phí sản xuất (nghìn đồng/1 sản phẩm)	100	40	250
Giá bán (nghìn đồng/1 sản phẩm)	260	120	600

Bảng 4

Biết rằng cơ sở sản xuất đó sử dụng không quá 500 ngày công, số tiền dành cho chi phí sản xuất là không quá 40 triệu đồng và số ghế gấp sáu lần số bàn. Tìm số sản phẩm mỗi loại cần phải sản xuất sao cho tổng doanh thu đạt được cao nhất.

5. Bác Dũng đầu tư không quá 1,2 tỉ đồng vào hai loại cổ phiếu: cổ phiếu A dự kiến chi trả cổ tức bằng tiền với tỉ lệ 5%; cổ phiếu B rủi ro cao dự kiến chi trả cổ tức bằng tiền với tỉ lệ 12%. Giá cổ phiếu A là 30 000 đồng/1 cổ phiếu, giá cổ phiếu B là 40 000 đồng/1 cổ phiếu. Để giảm thiểu rủi ro, bác Dũng quyết định mua số lượng cổ phiếu B không quá 10 000 cổ phiếu. Hỏi bác Dũng nên đầu tư mỗi loại bao nhiêu cổ phiếu để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

§2

VẬN DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG THỰC TIỄN

Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam) (Nguồn: *Giải tích 12 Nâng cao*, NXBGD Việt Nam, 2020).



Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là bao nhiêu để huyết áp giảm nhanh nhất?



Máy đo huyết áp

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

I. VẬN DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KHOA HỌC, KỸ THUẬT VÀ CÔNG NGHỆ

Đạo hàm là một khái niệm toán học xuất phát từ nhiều vấn đề trong khoa học, kỹ thuật và công nghệ. Vì thế, đạo hàm là một công cụ quan trọng để giải quyết một số bài toán tối ưu trong thực tiễn. Ta xét một số bài toán cụ thể sau đây.

Bài toán 1. Hãy giải bài toán ở phần mở đầu.

Giải

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trên đoạn $[0 ; 30]$.

Ta có: $G'(x) = 0,025 \cdot [x^2(30 - x)]' = 0,025 \cdot (60x - 3x^2) = 0,075 \cdot (20x - x^2)$.

$$\text{Do đó, } G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20. \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0		20		30
$G'(x)$	0	+	0	-	
$G(x)$	0				0

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[0 ; 30]} G(x) = G(20) = 100$ tại $x = 20$.

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhanh nhất là 20 mg.

Bài toán 2. Trong 25 ngày đầu tiên sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh (kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân thứ nhất) đến ngày thứ t là: $f(t) = 45t^2 - t^3, t = 0, 1, 2, \dots, 25$ (Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020).

- a) Số người nhiễm bệnh (kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên) lớn nhất là bao nhiêu?
 b) Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất và tính tốc độ đó.

Giải

- a) Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t) = 45t^2 - t^3$ trên đoạn $[0; 25]$.

Ta có: $f'(t) = 90t - 3t^2$.

Do đó, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 30 \end{cases}$. Suy ra $f'(t) \geq 0$ trên đoạn $[0; 25]$.

Bảng biến thiên của hàm số:

t	0	25
$f'(t)$	0	+
$f(t)$	0	12 500

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[0; 25]} f(t) = f(25) = 12\,500$ tại $t = 25$.

Vậy sau 25 ngày kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên, số người nhiễm bệnh lớn nhất là 12 500 người.

- b) Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t) = f'(t) = 90t - 3t^2$ trên đoạn $[0; 25]$.

Ta có: $g'(t) = 90 - 6t$.

Do đó, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

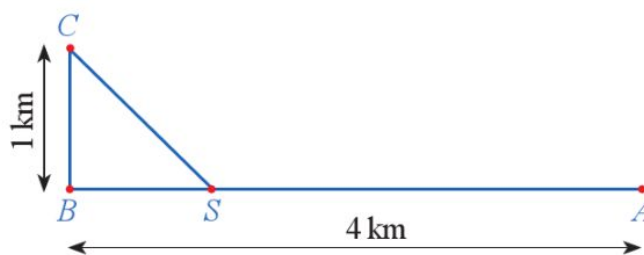
Bảng biến thiên của hàm số:

t	0	15	25
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	0	675	375

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[0; 25]} g(t) = g(15) = 675$ tại $t = 15$.

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất là 675 người/ngày và đạt được tại ngày thứ 15.

Bài toán 3. Người ta thiết kế một đường dây tải điện nối từ trạm biến áp ở vị trí A đến trạm biến áp ở vị trí C . Do điều kiện thực tế nên phương án thiết kế được đưa ra như sau:



Hình 1

– Chọn điểm B sao cho $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

– Chọn một vị trí là điểm S nằm giữa A và B để mắc đường dây tải điện đi từ A đến S , rồi từ S đến C như ở Hình 1.

Biết rằng $AB = 4$ km, $BC = 1$ km, chi phí lắp đặt mỗi kilômét dây điện trên quãng đường AS , SC lần lượt là 30 triệu đồng và 50 triệu đồng. Tính độ dài đoạn thẳng AS để chi phí mắc đường dây điện là nhỏ nhất.

Giải

Giả sử $AS = x$ (km) ($0 < x < 4$). Suy ra $BS = 4 - x$, $SC = \sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

Vì vậy, tổng chi phí để mắc đường dây tải điện ASC là:

$$T = 30x + 50\sqrt{1 + (4 - x)^2} \text{ (triệu đồng)}.$$

Xét hàm số: $f(x) = 30x + 50\sqrt{1 + (4 - x)^2}$, $x \in (0; 4)$.

Ta có: $f'(x) = 30 + 50 \cdot \frac{-(4 - x)}{\sqrt{1 + (4 - x)^2}}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1 + (4 - x)^2} = 5(4 - x) \Leftrightarrow (4 - x)^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4} \text{ (do } 0 < x < 4\text{)}.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0	$\frac{13}{4}$	4
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$50\sqrt{17}$	160	170

Căn cứ bảng biến thiên, ta có:

$$\min_{(0; 4)} f(x) = f\left(\frac{13}{4}\right) = 160 \text{ tại } x = \frac{13}{4}.$$

Vậy độ dài đoạn thẳng AS là $\frac{13}{4}$ km để chi phí mắc đường dây điện là nhỏ nhất.



1 Một nhà máy cần sản xuất một bể nước không nắp bằng tôn có dạng hình hộp chữ nhật với đáy có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và thể tích là $\frac{4}{3} \text{ m}^3$. Tính chiều rộng của đáy hình hộp đứng đó sao cho số tôn cần sử dụng là nhỏ nhất.

II. VẬN DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ

Đạo hàm là một công cụ quan trọng để giải quyết một số bài toán tối ưu trong kinh tế, ví dụ: bài toán tối ưu hoá chi phí sản xuất, bài toán tối ưu hoá lợi nhuận,... Ta xét một số bài toán cụ thể sau đây.

Bài toán 4. Giả sử lợi nhuận của doanh nghiệp khi sản xuất x sản phẩm là $f(x)$ với $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng $(0; +\infty)$.

Khi đó, lợi nhuận gia tăng khi sản xuất thêm 1 sản phẩm (từ x sản phẩm lên $x + 1$ sản phẩm) là hiệu $f(x + 1) - f(x)$, hiệu này còn được gọi là giá trị f -cận biên tại x .

Lợi nhuận cận biên khi sản xuất x sản phẩm, kí hiệu: $Mf(x)$, được xác định bởi $f'(x)$.

a) Nêu một giá trị xấp xỉ của giá trị f -cận biên tại $x = 64$, biết rằng $Mf(x) = \frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}$.

b) Giả sử hàm lợi nhuận cận biên $Mf(x)$ giảm dần khi x càng lớn. Nêu nhận xét về hàm giá trị f -cận biên khi x càng lớn.

Giải

a) Vì $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nên ta có thể lấy $f'(x) \approx \frac{f(x + 1) - f(x)}{1}$ hay

$f(x + 1) - f(x) \approx Mf(x)$. Do đó, ta có thể lấy $Mf(x)$ là giá trị xấp xỉ của giá trị f -cận biên tại x .

Vậy ta có thể lấy một giá trị xấp xỉ của giá trị f -cận biên tại $x = 64$ là $Mf(64) = \frac{8}{\sqrt[3]{64^2}} = 0,5$.

b) Do $f(x + 1) - f(x) \approx Mf(x)$ và $Mf(x)$ giảm dần khi x càng lớn nên ta có thể thấy rằng hàm giá trị f -cận biên cũng giảm khi x càng lớn.

Nhận xét: Quy luật lợi nhuận cận biên giảm dần nói rằng khi x càng lớn thì giá trị f -cận biên càng nhỏ. Nói cách khác, khi lợi nhuận cận biên bắt đầu giảm dần đối với một loại hàng hoá thì việc sản xuất thêm loại hàng hoá đó sẽ làm giảm lợi nhuận cho doanh nghiệp.

Bài toán 5. Một doanh nghiệp sản xuất một loại sản phẩm. Giả sử tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) để sản xuất và bán hết x sản phẩm đó được cho bởi:

$$f(x) = 0,0001x^2 + 0,2x + 10\,000.$$

Giả sử tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: triệu đồng) khi bán hết x sản phẩm đó là:

$$g(x) = 2x + 9\,000$$

(Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e*, Cengage 2014).

a) Tính số tiền lãi doanh nghiệp thu được khi bán hết x sản phẩm đó. Từ đó, hãy cho biết doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để số tiền lãi thu được là lớn nhất.

- b) Tỉ số $M(x) = \frac{f(x)}{x}$ ($x \geq 1$) được gọi là chi phí trung bình cho một sản phẩm khi bán ra. Hãy cho biết doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để chi phí trung bình là nhỏ nhất.

Giải

- a) Số tiền lãi doanh nghiệp thu được khi bán hết x sản phẩm là:

$$g(x) - f(x) = (2x + 9\,000) - (0,0001x^2 + 0,2x + 10\,000) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1\,000.$$

Xét hàm $h(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1\,000$, với $x \geq 1$.

Ta có: $h'(x) = -0,0002x + 1,8$;

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9\,000.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	1	9 000	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$h(1) \approx -998,2$	7 100	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[1; +\infty)} h(x) = h(9\,000) = 7\,100$ tại $x = 9\,000$.

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất 9 000 sản phẩm để số tiền lãi thu được là lớn nhất.

- b) Ta thấy: $M(x) = \frac{0,0001x^2 + 0,2x + 10\,000}{x} = 0,0001x + \frac{10\,000}{x} + 0,2$.

Xét hàm $M(x) = 0,0001x + \frac{10\,000}{x} + 0,2$, với $x \geq 1$.

Ta có: $M'(x) = 0,0001 - \frac{10\,000}{x^2}$;

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10\,000 \text{ (do } x \geq 1\text{)}.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	1	10 000	$+\infty$
$M'(x)$	-	0	+
$M(x)$	$M(1) \approx 10\,000,2$	0,2	$+\infty$

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\min_{[1; +\infty)} M(x) = M(10\,000) = 0,2$ tại $x = 10\,000$.

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất 10 000 sản phẩm để chi phí trung bình là nhỏ nhất.

Bài toán 6. Một cửa hàng nhập bưởi da xanh với giá nhập là 150 000 đồng/1 quả và bán bưởi đó với giá bán là 200 000 đồng/1 quả. Với giá bán này thì cửa hàng dự kiến chỉ bán được 50 quả. Cửa hàng này quyết định giảm giá bán. Biết rằng nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 10 000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán bưởi để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Giải

Gọi x là số lần giảm giá bán bưởi ($x \in \mathbb{N}^*$). Số tiền giảm giá cho mỗi quả bưởi là $10\,000x$. Khi đó, giá bán của mỗi quả bưởi là $200\,000 - 10\,000x$ và số bưởi bán được là $50 + 50x$.

Lợi nhuận cửa hàng thu được là:

$$\begin{aligned} & (200\,000 - 10\,000x)(50 + 50x) - 150\,000 \cdot (50 + 50x) \\ &= (50\,000 - 10\,000x)(50 + 50x) \\ &= 500\,000 \cdot (5 - x)(1 + x) \\ &= 500\,000 \cdot (5 + 4x - x^2). \end{aligned}$$

Xét hàm $f(x) = 500\,000 \cdot (5 + 4x - x^2)$, với $1 \leq x \leq 20$.

Ta có: $f'(x) = 500\,000 \cdot (4 - 2x)$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	1	2	20
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	4 000 000	4 500 000	- 157 500 000

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[1; 20]} f(x) = f(2) = 4\,500\,000$ tại $x = 2$.

Vậy cửa hàng cần bán bưởi với giá 180 000 đồng/1 quả để số tiền lãi thu được là lớn nhất.

2 Một công ty có 50 căn phòng cho thuê. Biết rằng nếu công ty cho thuê mỗi căn phòng với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì mọi căn phòng đều có người thuê, nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn phòng 100 000 đồng/1 tháng thì có thêm hai căn phòng bị bỏ trống. Công ty phải cho thuê mỗi căn phòng với giá là bao nhiêu để tổng số tiền thu được là lớn nhất?



Để giải quyết bài toán tối ưu trong thực tiễn bằng phương pháp sử dụng đạo hàm, ta có thể làm như sau:

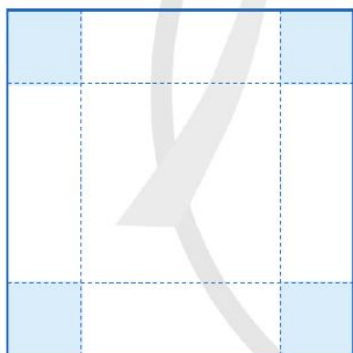
Bước 1. Xây dựng hàm số biểu thị đại lượng biến thiên trong bài toán tối ưu đó.

Bước 2. Sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, hoặc nhỏ nhất của hàm số nhận được ở *Bước 1*.

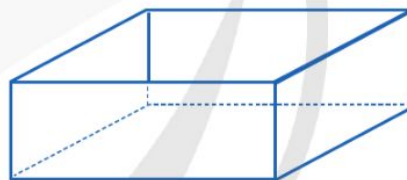
Bước 3. Dựa trên giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của hàm số nhận được ở *Bước 2*, ta có thể xác định được nghiệm cho bài toán tối ưu ban đầu.

BÀI TẬP

1. Bạn Hà có một tấm bìa hình vuông cạnh 60 cm (Hình 2). Bạn muốn làm một cái hộp đựng đồ có dạng hình hộp chữ nhật mà có thể để được vào một ngăn giá sách có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông cạnh bằng 37 cm, chiều cao bằng 28 cm. Bạn cắt bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập lại thành một cái hộp không nắp (Hình 3). Tìm số nguyên dương x để làm được cái hộp đựng đồ có thể tích lớn nhất.

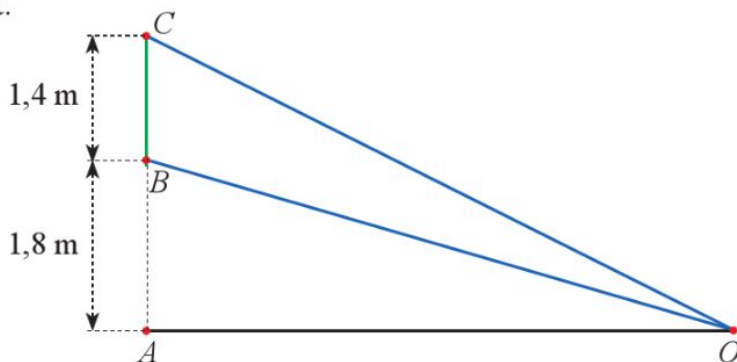


Hình 2



Hình 3

2. Hình 4 minh họa một màn hình BC có chiều cao 1,4 m được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,8$ m. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Hãy tính khoảng cách AO sao cho góc quan sát BOC là lớn nhất.



Hình 4

3. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng:

$$P(n) = 480 - 20n \text{ (gam)}$$

(Nguồn: Giải tích 12 – Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020).

Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

4. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức

$$E(v) = cv^3t,$$

trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất (Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020).

5. Một nhà máy sản xuất xe đạp cho thị trường châu Âu theo đơn giá 120 euro (€). Chi phí mỗi ngày của nhà máy được cho bởi hàm số

$$K(x) = 0,02x^3 - 3x^2 + 172x + 2\,400,$$

trong đó x là số lượng xe đạp sản xuất được trong ngày hôm đó. Mỗi ngày có thể sản xuất tối đa 130 xe đạp. Giả sử số xe đạp sản xuất được trong mỗi ngày đều được bán hết vào cuối ngày đó.

Gọi $G(x)$ là hàm số biểu diễn lợi nhuận hàng ngày của nhà máy (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundlekurs ma-1, Cornelsen 2016).

a) Vẽ đồ thị hàm số $G(x)$ trên đoạn $[0; 140]$.

b) Số lượng xe mỗi ngày cần sản xuất là bao nhiêu chiếc để nhà máy có lãi?

c) Số lượng xe mỗi ngày cần sản xuất là bao nhiêu chiếc để nhà máy có lợi nhuận lớn nhất?

d) Giả sử nhà máy quyết định tận dụng tối đa công suất sản xuất 130 xe đạp mỗi ngày. Nhà máy phải chọn đơn giá là bao nhiêu để có lãi?

6. Một nhà máy sản xuất một loại sản phẩm cho thị trường Mỹ. Biết rằng:

– Chi phí cho các công việc hành chính chung của nhà máy là 90 đô la Mỹ (USD)/1 ngày.

– Chi phí sản xuất là 0,09 USD/1 sản phẩm.

– Các loại chi phí khác trong mỗi một ngày là $\frac{x^2}{10\,000}$ (USD), trong đó x là số sản phẩm nhà máy sản xuất được trong ngày hôm đó.

a) Tính tổng chi phí $U(x)$ của mỗi một sản phẩm.

b) Tìm x sao cho $U(x)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

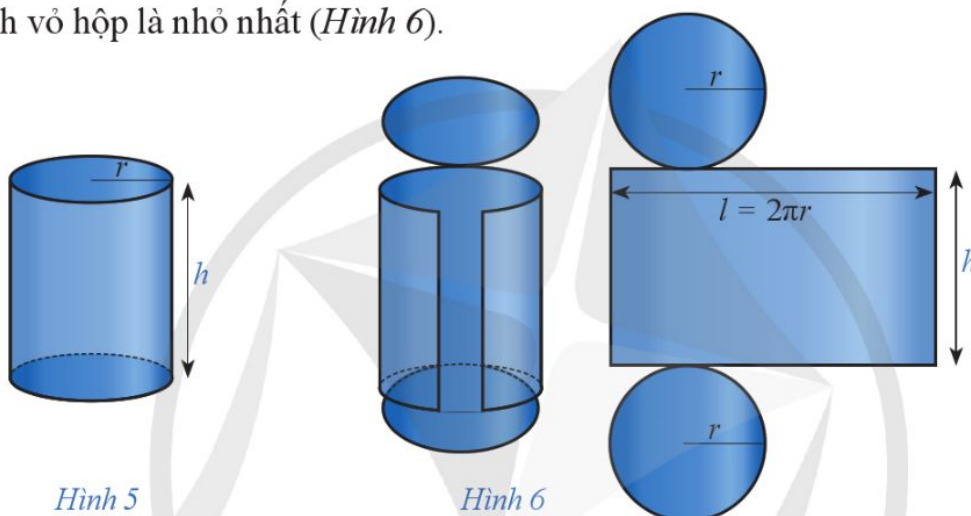
7. Trong một phản ứng hoá học, lượng khí CO_2 thoát ra $V(t)$ được tính theo thời gian t bằng công thức:

$$V(t) = \frac{0,2k_1}{k_1 - k_2} (e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t}),$$

trong đó $V(t)$ được tính theo đơn vị mililit và t được tính theo đơn vị giây; k_1, k_2 là các hằng số sao cho $k_1 > k_2 > 0$ (Nguồn: John W. Cell, *Engineering Problems Illustrating Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, 1943).

Lượng khí CO_2 thoát ra trong phản ứng đó có giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

8. Một doanh nghiệp dự định sản xuất các hộp đựng nước giải khát có dạng hình trụ với dung tích là 500 cm^3 (Hình 5). Hãy tính bán kính đáy và chiều cao của chiếc hộp để diện tích vỏ hộp là nhỏ nhất (Hình 6).



Hình 5

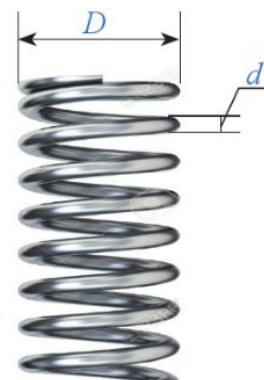
Hình 6

9. Một lò xo được làm từ một sợi dây kim loại. Gọi d là đường kính (trung bình) của sợi dây kim loại và D là đường kính (trung bình) của lò xo (Hình 7). Khi lò xo để thẳng đứng trên mặt đất thì nó bị nén lại bởi trọng lượng P của lò xo, vật chất trong dây kim loại chịu ứng suất lớn nhất S tại các điểm trên bề mặt sợi dây mà khoảng cách từ những điểm đó đến đường tâm của lò xo là nhỏ nhất.

Biết rằng S được cho bởi công thức:

$$S = \frac{8PD}{\pi d^3} \left[\frac{\frac{4D}{d} - 1}{4 \left(\frac{D}{d} - 1 \right)} + \frac{0,615d}{D} \right].$$

(Nguồn: John W. Cell, *Engineering Problems Illustrating Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, 1943).



Hình 7

- a) Giả sử sợi dây kim loại là cố định. Hỏi ta phải cuộn sợi dây kim loại đó thành lò xo với đường kính D bằng bao nhiêu để ứng suất S là nhỏ nhất?
- b) Giả sử lò xo có đường kính D cố định. Hỏi ta phải chọn loại dây kim loại với đường kính d bằng bao nhiêu để ứng suất S là nhỏ nhất?

CHUYÊN ĐỀ III

ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN TÀI CHÍNH

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: vận dụng kiến thức toán học trong việc giải quyết một số vấn đề về lãi suất và vay nợ của các tổ chức tín dụng; vận dụng kiến thức toán học trong việc giải quyết một số vấn đề về đầu tư.

§1 MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TIỀN TỆ, LÃI SUẤT

Cô Hạnh gửi 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng, lãi suất 7,2%/năm. Sau kì hạn 1 năm, tiền lãi của kì hạn đó được cộng vào tiền vốn, rồi đem gửi cho kì hạn 1 năm tiếp theo. Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong hai năm đó.



Ngân hàng Nhà nước Việt Nam
(Nguồn: <https://shutterstock.com>)



Hỏi cô Hạnh nhận được bao nhiêu tiền sau khi gửi hai năm như vậy (làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng)?

I. KHÁI NIỆM VỀ TIỀN TỆ

(Nguồn: G.N.Mankiw, *Macroeconomics, Fifth Edition*, Worth Publisher 2002)



1 Một siêu thị thông báo: Giá bán của một chiếc ti vi là 20 triệu đồng.

Hãy cho biết: Thông báo đó có ý nghĩa gì? Số tiền 20 triệu đồng thể hiện điều gì?

Nhận xét

- Giá trị của mỗi loại hàng hoá được đo lường bằng giá trị của tiền tệ.
- Tiền tệ dùng để đo lường giá trị của các loại hàng hoá.



Tiền tệ là phương tiện trao đổi hàng hoá và dịch vụ được chấp nhận thanh toán trong một khu vực nhất định hoặc giữa một nhóm người cụ thể.

Bản thân tiền tệ không thực sự có giá trị mà thay vào đó chúng có được giá trị từ sự chấp nhận chung từ mọi người ở một khu vực nhất định hoặc giữa một nhóm người cụ thể trong thanh toán để đổi lấy hàng hoá, dịch vụ và hoàn trả các khoản nợ.

Chú ý

- Tiền tệ là *vật trung gian môi giới* trong trao đổi hàng hoá, dịch vụ, là *phương tiện* giúp cho quá trình trao đổi được thực hiện dễ dàng hơn.
- Bản chất của tiền tệ được thể hiện rõ hơn qua hai thuộc tính sau:
 - *Giá trị sử dụng của tiền tệ* thường được hiểu là khả năng thoả mãn nhu cầu trao đổi của xã hội, nhu cầu sử dụng làm vật trung gian trong trao đổi. Giá trị sử dụng của một loại tiền tệ là do xã hội quy định.
 - *Giá trị của tiền tệ* thường được hiểu là khả năng đổi được nhiều hay ít hàng hoá trong trao đổi.
- Trong mỗi quốc gia, tiền tệ có bốn chức năng cơ bản là: phương tiện trao đổi; phương tiện đo lường và tính toán giá trị; phương tiện thanh toán; phương tiện tích lũy.

Ví dụ 1 Một siêu thị thông báo: Giá bán của một chiếc máy giặt là 8 triệu đồng. Hãy cho biết: Số tiền 8 triệu đồng thể hiện điều gì?

Giải

Số tiền 8 triệu đồng thể hiện cả hai thuộc tính của tiền tệ là: Giá trị sử dụng của tiền tệ (ta có thể dùng tiền để mua máy giặt) và giá trị của tiền tệ (với 8 triệu đồng ta “đổi được” một chiếc máy giặt).



1 Gia đình bác Ngọc dành dụm được 100 triệu đồng. Số tiền này thể hiện chức năng nào của tiền tệ?

II. KHÁI NIỆM LÃI SUẤT. CÁCH TÍNH LÃI SUẤT

1. Khái niệm lãi suất



2 Một ngân hàng thông báo: Lãi suất tiền gửi kì hạn 6 tháng là 5,8%. Hãy cho biết: Lãi suất 5,8% thể hiện điều gì?



Lãi suất là tỉ lệ phần trăm của tiền vốn gửi vào ngân hàng mà ngân hàng có trách nhiệm phải trả cho người gửi tiền trong một khoảng thời gian đã xác định, thông thường được tính theo năm.

Ví dụ 2 Cô Hạnh gửi 100 triệu đồng tiền tiết kiệm kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất là 7,2%/năm. Tính số tiền cô Hạnh nhận được sau 12 tháng.

Giải

Số tiền cô Hạnh nhận được sau 12 tháng là:

$$100 + 7,2\% \cdot 100 = 107,2 \text{ (triệu đồng)}.$$



2 Hãy tìm hiểu thông tin về lãi suất tiết kiệm kì hạn 6 tháng, 12 tháng của một ngân hàng nào đó.

2. Cách tính lãi suất

Ở lớp 9, ta cũng đã làm quen với gửi tiền tiết kiệm ở ngân hàng, tính toán lãi suất cho một khoản tiền gửi ngân hàng.

Trong mục này, ta tiếp tục làm quen với những vấn đề liên quan đến lãi suất tiết kiệm.



3 Trong các thể thức tính lãi suất tiết kiệm cho khách hàng của ngân hàng, có thể thức *lãi kép* (hay lãi suất kép), tức là nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được cộng dồn vào số tiền gốc ban đầu để gửi kì tiếp theo. Một người gửi A (đồng) tiền tiết kiệm ở một ngân hàng với lãi suất hàng tháng là r , ở đó r được biểu thị dưới dạng số thập phân.

- a) Tính số tiền người đó nhận được sau 1 tháng.
- b) Tính số tiền người đó nhận được sau 2 tháng.
- c) Tính số tiền người đó nhận được sau 3 tháng.
- d) Dự đoán công thức tính số tiền người đó nhận được sau n tháng.



Nếu một khoản tiền gốc A được gửi tiết kiệm (theo thể thức lãi kép) với lãi suất r mỗi kì (r được biểu thị dưới dạng số thập phân) thì tổng số tiền S nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau n kì gửi cho bởi *công thức lãi kép* sau:

$$S = A(1 + r)^n.$$

Ví dụ 3 Cô Yên gửi 50 triệu đồng tiền tiết kiệm ở một ngân hàng (theo thể thức lãi kép) với lãi suất hàng tháng là 0,41%. Tính số tiền cô Yên nhận được sau 3 tháng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng).

Giải

Ta có: $A = 50\,000\,000$; $r = 0,41\% = 0,0041$.

Áp dụng công thức lãi kép, số tiền cô Yên nhận được sau 3 tháng là:

$$S = 50\,000\,000 \cdot (1 + 0,0041)^3 \approx 50\,618\,000 \text{ (đồng)}.$$



3 Hãy giải bài toán ở phần mở đầu.

Chú ý: Trong thực tế, ngân hàng có nhiều kì hạn gửi tiết kiệm và công bố lãi suất năm, mức lãi suất phụ thuộc vào kì hạn. Khi đó, ta có thể sử dụng công thức sau:



Nếu một khoản tiền gốc A được gửi tiết kiệm (theo thể thức lãi kép) với lãi suất hàng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi k lần trong một năm, thì tổng số tiền S nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau n kì gửi cho bởi công thức lãi kép sau:

$$S = A \left(1 + \frac{r}{k} \right)^n.$$

Ví dụ 4

Cô Lương gửi 50 triệu đồng tiền tiết kiệm kì hạn 6 tháng ở một ngân hàng (theo thể thức lãi kép) với lãi suất là 5,8%/năm. Tính số tiền cô Lương nhận được sau hai kì hạn liên tiếp (làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng), biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong 12 tháng đó.

Giải

Ta có: $A = 50\,000\,000$; $r = 5,8\% = 0,058$.

Áp dụng công thức lãi kép, số tiền cô Lương nhận được sau hai kì hạn liên tiếp là:

$$S = 50\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,058}{2} \right)^2 \approx 52\,942\,000 \text{ (đồng)}.$$



4 Chị Ngân gửi 100 triệu đồng tiền tiết kiệm kì hạn 6 tháng ở một ngân hàng (theo thể thức lãi kép) với lãi suất là 6,2%/năm. Tính số tiền chị Ngân nhận được sau hai kì hạn liên tiếp (làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng), biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong 12 tháng đó.

III. KHÁI NIỆM VỀ LẠM PHÁT. CHỈ SỐ LẠM PHÁT

(Nguồn: G.N.Mankiw, *Macroeconomics, Fifth Edition*, Worth Publisher 2002;

Nguyễn Văn Tiến, *Giáo trình Tài chính – Tiền tệ Ngân hàng*, NXB Thống kê, 2009)

1. Khái niệm về lạm phát



4 Để mua một loại hàng hoá vào tháng 12/2021, bác Anh phải chi 1 200 000 đồng. Đến tháng 12/2022, giá của mặt hàng đó tăng lên thành 1 254 600 đồng. Nếu vẫn chi 1 200 000 đồng vào tháng 12/2022 thì bác Anh chỉ còn mua được bao nhiêu phần trăm của mặt hàng đó?

Nhận xét: Khi giá của hàng hoá tăng cao, một đơn vị tiền tệ sẽ mua được ít hàng hoá hơn hay tiền tệ bị giảm giá trị.



Lạm phát là hiện tượng tăng giá liên tục của hàng hoá, dịch vụ dẫn đến giảm sức mua của đồng tiền. Có thể hiểu một cách đơn giản, khi lạm phát xảy ra, với cùng một số tiền người ta chỉ có thể mua được một số lượng hàng hoá, dịch vụ ít hơn so với trước đây. Do đó, lạm phát phản ánh sự suy giảm sức mua trên một đơn vị tiền tệ.

Ví dụ 5 Giá bán trứng gà ở Hà Nội vào ngày 30/12/2020 là 1 500 đồng/quả và vào ngày 1/12/2022 là 2 100 đồng/quả (Nguồn: <https://www.bachhoaxanh.com>). Từ ngày 30/12/2020 đến ngày 1/12/2022, giá một quả trứng gà đã tăng lên bao nhiêu phần trăm?

Giải

Ta có: $\frac{2\,100}{1\,500} \cdot 100\% = 140\%$. Vậy từ ngày 30/12/2020 đến ngày 1/12/2022, giá một quả trứng gà đã tăng lên là $140\% - 100\% = 40\%$.

2. Chỉ số lạm phát

5 Vào ngày 10/12/2021, bác Mai mua 2 kg gà và 10 quả trứng gà với giá lần lượt là 90 000 đồng/kg, 1 840 đồng/quả. Vào ngày 1/12/2022, bác Ngọc mua 2 kg gà và 10 quả trứng gà với giá lần lượt là 95 000 đồng/kg, 2 100 đồng/quả (Nguồn: <https://www.bachhoaxanh.com> và <https://tienthanhvet.com>). Từ ngày 10/12/2021 đến ngày 1/12/2022, tổng số tiền để mua 2 kg gà và 10 quả trứng gà đã tăng lên bao nhiêu phần trăm?

Để đo lường mức độ lạm phát của một thời kì, người ta đưa ra *chỉ số lạm phát* của thời kì đó. Sau đây, ta sẽ tìm hiểu cách tính chỉ số lạm phát của một thời kì.

a) Trước hết, ta nêu ra một số khái niệm sau:

- Thông qua việc điều tra, các nhà nghiên cứu sẽ xác định những mặt hàng và dịch vụ tiêu biểu mà một người tiêu dùng điển hình sẽ mua ở thời điểm t . Những mặt hàng và dịch vụ đó được gọi là *giỏ hàng hoá và dịch vụ ở thời điểm đó*.
- Chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ ở thời điểm t được tính theo nguyên tắc sau:

Bước 1. Thống kê giá cả của các mặt hàng, dịch vụ trong giỏ hàng hoá đã chọn tại thời điểm t .

Bước 2. Tính toán chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ đã chọn ở **Bước 1** tại thời điểm t .

Việc tính toán này được thực hiện bằng cách lấy giá cả nhân với số lượng mỗi mặt hàng, dịch vụ rồi cộng kết quả lại.

Ví dụ 6 Giả định năm 2022, giỏ hàng hoá và dịch vụ được chọn gồm cam, quýt, cắt tóc nam với giá cả như sau: 1 500 đồng/1 quả cam, 3 000 đồng/1 quả quýt, 50 000 đồng/1 lần cắt tóc nam.

Giả sử ta mua 50 quả cam, 100 quả quýt và cắt tóc 8 lần. Hãy tính chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ đó tại thời điểm năm 2022.

Giải

Chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ đó (với số lượng mỗi mặt hàng, dịch vụ như đã nêu) tại thời điểm năm 2022 là: $50 \cdot 1\,500 + 100 \cdot 3\,000 + 8 \cdot 50\,000 = 775\,000$ (đồng).

- *Chỉ số giá tiêu dùng* (hay CPI, viết tắt cho cụm từ consumer price index trong tiếng Anh) ở thời điểm t là chỉ số được tính từ giá của giỏ hàng hoá và dịch vụ mà một người tiêu dùng mua ở thời điểm đó.

Việc tính toán chỉ số giá tiêu dùng CPI ở thời điểm t (chẳng hạn: CPI của Việt Nam năm 2021) sẽ được thực hiện thông qua các bước sau:

Bước 1. – Cố định giỏ hàng hoá ở thời điểm t và thống kê giá cả của các mặt hàng, dịch vụ trong giỏ hàng hoá đã chọn tại thời điểm đó.

– Cố định số lượng mỗi mặt hàng, dịch vụ được mua (hoặc sử dụng) trong giỏ hàng hoá đã chọn tại thời điểm đó.

Bước 2. Tính toán chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ đã chọn ở *Bước 1* tại thời điểm t .

Bước 3. Tính toán chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ đã chọn ở *Bước 2* tại thời điểm cơ sở.

Lưu ý rằng thời điểm cơ sở sẽ được chọn tùy vào từng nước cụ thể. Chẳng hạn, Việt Nam chọn năm 2010 là thời kì cơ sở.

Bước 4. Tính chỉ số giá tiêu dùng CPI theo công thức sau:

$$\text{CPI ở thời điểm } t = \frac{\text{Chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ ở thời điểm } t}{\text{Chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ ở thời điểm cơ sở}} \times 100$$

Ví dụ 7 Giả sử ta giữ nguyên các giả định năm 2022 như trong *Ví dụ 6*. Giả sử năm 2010, giá cả của giỏ hàng hoá là: 1 000 đồng/1 quả cam, 2 000 đồng/1 quả quýt, 35 000 đồng/1 lần cắt tóc nam. Hãy tính CPI của giỏ hàng hoá, dịch vụ này ở năm 2022.

Giải

Chi phí để mua giỏ hàng hoá, dịch vụ đó (với số lượng mỗi mặt hàng, dịch vụ như đã nêu) tại thời điểm năm 2010 là: $50 \cdot 1\,000 + 100 \cdot 2\,000 + 8 \cdot 35\,000 = 530\,000$ (đồng).

Vậy CPI của giỏ hàng hoá, dịch vụ này ở năm 2022 là: $\frac{775\,000}{530\,000} \cdot 100 \approx 146,2$.

Nhận xét

- Mục đích chính của chỉ số CPI là đo lường mức giá trung bình của giỏ hàng hoá và dịch vụ tại một thời điểm.
- Lưu ý rằng chỉ số giá tiêu dùng CPI chỉ phản ánh tương đối giá cả của hàng hoá, dịch vụ tại một thời điểm vì chỉ số này chỉ dựa vào một giỏ hàng hoá, dịch vụ đại diện cho toàn bộ hàng hoá, dịch vụ.

b) **Chỉ số lạm phát** (hay còn gọi là **tỷ lệ lạm phát**) ở thời điểm t được tính theo công thức sau:

$$\text{Chỉ số lạm phát ở thời điểm } t = \frac{\text{CPI ở thời điểm } t - \text{CPI ở thời điểm } (t-1)}{\text{CPI ở thời điểm } (t-1)} \times 100\%$$

Ví dụ 8 Bảng 1 thống kê số liệu về chỉ số giá tiêu dùng CPI của Việt Nam trong giai đoạn 2016 – 2021. Tính chỉ số lạm phát của Việt Nam năm 2020 và năm 2021 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Năm	Chỉ số giá tiêu dùng CPI
2016	148,41
2017	153,63
2018	159,07
2019	163,52
2020	168,78
2021	171,88

(Nguồn: <https://solieukinhhte.com>)

Bảng 1

Giải

Chỉ số lạm phát của Việt Nam năm 2020 là:

$$\left(\frac{168,78 - 163,52}{163,52} \right) \cdot 100\% \approx 3,22\%.$$

Chỉ số lạm phát của Việt Nam năm 2021 là:

$$\left(\frac{171,88 - 168,78}{168,78} \right) \cdot 100\% \approx 1,84\%.$$

5 Căn cứ vào Bảng 1, tính chỉ số lạm phát hàng năm của Việt Nam trong giai đoạn 2016 – 2019. Sau đó, vẽ biểu đồ cột thống kê các chỉ số lạm phát của Việt Nam trong giai đoạn 2016 – 2021.

IV. CÁC GIÁ TRỊ THỰC CHẤT CÓ TÍNH ĐẾN LẠM PHÁT

Lạm phát có nhiều ảnh hưởng tiêu cực đến nền kinh tế và sự ổn định xã hội, đặc biệt ảnh hưởng đến việc tính các giá trị thực chất trong bối cảnh lạm phát cao. Ta sẽ tìm hiểu vấn đề trên trong hai trường hợp cụ thể sau.

1. Tính lãi suất thực tế



6 Hãy nêu khái niệm về lãi suất.

Dựa theo giá trị thực của số tiền lãi thu được, lãi suất được chia làm hai loại:

- **Lãi suất danh nghĩa** là loại lãi suất biểu thị cho sự tăng trưởng của tiền sau một thời gian nhất định, thông thường là một năm. Khi gửi tiết kiệm ngân hàng, lãi suất danh nghĩa sẽ được ghi rõ trên sổ tiết kiệm.
- **Lãi suất thực tế** (còn gọi là **lãi suất hiệu quả**) là loại lãi suất thực thu được sau khi trừ đi tỷ lệ lạm phát. Vì thế, ta có thể sử dụng công thức sau để tính lãi suất thực tế.



$$\text{Lãi suất thực tế} = \text{Lãi suất danh nghĩa} - \text{Chỉ số lạm phát}$$

Ví dụ 9 Một ngân hàng thông báo lãi suất tiền gửi vào tháng 1/2021 là 5,6%/năm. Chỉ số lạm phát của Việt Nam năm 2021 là 1,84%. Tính lãi suất thực tế (theo kì hạn 1 năm) mà người gửi thực thu được ở năm 2021.

Giải

Lãi suất thực tế (theo kì hạn 1 năm) mà người gửi thực thu được ở năm 2021 là:

$$5,6\% - 1,84\% = 3,76\%.$$

Chú ý: Khi chỉ số lạm phát tăng cao, nếu muốn cho lãi suất thực tế là ổn định và thực dương thì lãi suất danh nghĩa phải tăng lên theo chỉ số lạm phát. Việc tăng lãi suất danh nghĩa sẽ dẫn đến hậu quả là các doanh nghiệp phải tăng chi phí sản xuất, giảm sức mua hàng hoá, giảm sức cạnh tranh của nền kinh tế và khó tiếp cận đến các nguồn vốn phục vụ cho sản xuất.

2. Tính tiền lương thực tế



7 Anh Bình kí hợp đồng lao động với một công ty và luôn hoàn thành công việc. Hàng tháng công ty trả cho anh Bình một khoản tiền. Khoản tiền đó được gọi là gì?

Tiền lương (còn gọi là *lương*) là số tiền do người sử dụng lao động trả cho người lao động khi người lao động đã hoàn thành công việc theo thỏa thuận trong hợp đồng lao động. Tiền lương thường được tính bằng số tiền được trả cho công nhân hoặc nhân viên trong một đơn vị thời gian cụ thể, ví dụ như một giờ làm việc hay một tháng làm việc (Nguồn: Bộ luật lao động năm 2019 số 45/2019/QH14). Dựa theo giá trị thực của số tiền thu được, tiền lương được chia làm hai loại:

- **Tiền lương danh nghĩa** là mức lương mà người lao động được cam kết nhận trong một thỏa thuận lao động, thường được ghi nhận trong hợp đồng lao động hoặc được thông báo và trao đổi công khai. Tiền lương danh nghĩa không được điều chỉnh theo chỉ số lạm phát hoặc biến động kinh tế.
- **Tiền lương thực tế** là mức lương thực sự mà người lao động nhận được và có thể sử dụng để mua hàng hoá và dịch vụ. Tiền lương thực tế có tính đến sự ảnh hưởng của mức giá chung và mức độ lạm phát trong nền kinh tế.

Để tính toán tiền lương thực tế, người ta có thể sử dụng công thức sau:



$$\text{Tiền lương thực tế} = (100\% - \text{Chỉ số lạm phát}) \times \text{Tiền lương danh nghĩa}$$

(Nguồn: <https://study.com/learn/lesson/real-wage-formula-calculation-rate.html>)

Ví dụ 10 Một người lao động có tiền lương danh nghĩa là 6 triệu đồng/1 tháng ở năm 2021. Chỉ số lạm phát của Việt Nam năm 2021 là 1,84%. Tính tiền lương thực tế mà người đó thực sự nhận được trong một tháng ở năm 2021.

Giải

Tiền lương thực tế (theo kì hạn 1 năm) mà người gửi thực thu được ở năm 2021 là:

$$(100\% - 1,84\%). 6\,000\,000 = 5\,889\,600 \text{ (đồng)}.$$

Chú ý: Khi lạm phát tăng lên mà tiền lương danh nghĩa không thay đổi thì tiền lương thực tế của người lao động giảm xuống. Vì thế, chống lạm phát tăng cao luôn luôn là phương hướng chủ đạo trong điều hành và giữ ổn định nền kinh tế vĩ mô của chính phủ mỗi quốc gia trên thế giới.



6 Một người lao động có tiền lương danh nghĩa là 7,5 triệu đồng/1 tháng ở năm 2020. Chỉ số lạm phát của Việt Nam năm 2020 là 3,22%. Tính tiền lương thực tế mà người đó thực sự nhận được trong một tháng ở năm 2020.

BÀI TẬP

1. Bảng 2 thống kê số liệu về chỉ số giá tiêu dùng CPI của Hoa Kỳ trong giai đoạn 2015 – 2022.

Năm	Chỉ số giá tiêu dùng CPI	Năm	Chỉ số giá tiêu dùng CPI
2015	237,0	2019	255,7
2016	240,0	2020	258,8
2017	245,1	2021	271,0
2018	251,1	2022	294,4

Bảng 2

(Nguồn: <https://www.minneapolisfed.org>)

- Tính chỉ số lạm phát mỗi năm của Hoa Kỳ trong giai đoạn 2016 – 2022.
 - Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn chỉ số lạm phát của Hoa Kỳ trong giai đoạn 2016 – 2022.
 - Giả sử một người lao động ở Hoa Kỳ có tiền lương danh nghĩa là 2 500 USD/1 tháng ở năm 2022. Tính tiền lương thực tế mà người đó thực sự nhận được trong một tháng ở năm 2022.
- Ông An gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép với kì hạn 1 năm, lãi suất 8%/năm. Sau 5 năm, ông An rút toàn bộ gốc và lãi. Tính số tiền ông An nhận được (làm tròn đến hàng nghìn đồng), biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt 5 năm đó.
 - Cô Hoa gửi 100 triệu đồng tiền tiết kiệm kì hạn 6 tháng ở một ngân hàng (theo thể thức lãi kép) với lãi suất là 5,8%/năm. Hỏi cô Hoa phải gửi ít nhất bao nhiêu kì hạn liên tiếp để nhận được tổng số tiền (cả vốn lẫn lãi) khi thanh toán ít nhất là 120 triệu đồng, biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong 4 năm liền?

§2 TÍN DỤNG. VAY NỢ

Để chuẩn bị cho chuyến đi công tác, bác Minh đến ngân hàng mở một thẻ ngân hàng cho phép chủ thẻ chi tiêu trước, thanh toán lại cho ngân hàng sau trong phạm vi hạn mức tín dụng cho phép.



*Thẻ ngân hàng như vậy
là loại thẻ gì?*

I. THẺ TÍN DỤNG. PHÍ SỬ DỤNG THẺ

1. Thẻ tín dụng

1 Trong những năm gần đây, thanh toán không dùng tiền mặt trong nền kinh tế và trong đời sống xã hội ngày càng đóng vai trò quan trọng. Để thúc đẩy xu thế đó, ngân hàng phát hành thẻ ngân hàng cho khách hàng với đầy đủ các chức năng của thanh toán như: rút tiền mặt, chuyển khoản,... Trong những loại thẻ ngân hàng mà em biết, có loại thẻ nào cho phép chủ thẻ chi tiêu trước, thanh toán lại cho ngân hàng sau trong phạm vi hạn mức tín dụng cho phép?



Thẻ tín dụng là loại thẻ ngân hàng cho phép chủ thẻ chi tiêu trước, thanh toán lại cho ngân hàng sau trong phạm vi hạn mức tín dụng đã được cấp theo thỏa thuận với tổ chức phát hành thẻ. Thẻ tín dụng có chức năng hỗ trợ người dùng chi tiêu, thanh toán mua sắm ngay cả khi tài khoản không có tiền.

Hạn mức tín dụng được cấp tùy thuộc vào các điều kiện tài chính của từng khách hàng (mức thu nhập hàng tháng hoặc các khoản tiền gửi tiết kiệm mở tại ngân hàng đó). Nếu khách hàng đáp ứng đủ điều kiện, ngân hàng sẽ cấp thẻ tín dụng và hạn mức tiêu dùng nhất định.

Chú ý:

- Khách hàng có thể sử dụng thẻ tín dụng để mua hàng trực tuyến, thanh toán các sản phẩm hàng hoá, dịch vụ tại cửa hàng, đại lí, nhà hàng, khách sạn, ... mà có chấp nhận

thanh toán bằng thẻ tín dụng, hoặc rút tiền mặt từ máy ATM, hoặc rút tiền mặt tại quầy giao dịch của ngân hàng phát hành thẻ.

- Khách hàng được chi tiêu trước trong một hạn mức tín dụng mà ngân hàng đã phê duyệt cho khách hàng, sau đó thanh toán lại tổng số tiền đã chi tiêu đúng hạn cho ngân hàng.

 **2** Quan sát bảng sao kê thẻ tín dụng ở Hình 1, cho biết một bảng sao kê như vậy bao gồm những thông tin chính nào.

Tóm tắt sao kê (Statement summary)

Ngày sao kê (Statement Date)

10/03/2023

Ngày đến hạn thanh toán (Payment Due Date)

04/04/2023

Phương thức thanh toán (Payment Method)

Thu nợ tự động

Chi tiết giao dịch (Transaction info)

Ngày giao dịch (Transaction date)	Ngày hạch toán (Post date)	Diễn giải (Details)	Số tiền (VND) (Amount)
09/02/2023	11/02/2023	MPOS*HONSANAFOOD, HÀ NỘI	211,000.00
09/02/2023	11/02/2023	TOM FRUITS, HÀ NỘI	303,000.00
09/02/2023	11/02/2023	CTY CP BE GROUP, QUẬN 1	17,000.00
09/02/2023	11/02/2023	CTY CP BE GROUP, QUẬN 1	22,000.00
10/02/2023	13/02/2023	WINCOMMERCE, HÀ NỘI	355,628.00
10/02/2023	11/02/2023	CTY CP BE GROUP, QUẬN 1	12,000.00
12/02/2023	14/02/2023	WM+ HNI 219 TK CG HN, TP. HÀ NỘI	189,284.00
06/03/2023	06/03/2023	T/loan sao kê MC T02/2023I	CR 28,003,472.00
07/03/2023	09/03/2023	HUNG THINH MART, HÀ NỘI	90,000.00
08/03/2023	10/03/2023	HUNG THINH MART, HÀ NỘI	95,000.00
Phát sinh nợ trong kỳ (VND) (Total Debit Transaction)			15,072,664.00
Phát sinh có trong kỳ (VND) (Total Credit Transaction)			50,003,472.00
Dư nợ kỳ trước (VND) (Previous Balance)			49,843,930.00
Dư nợ cuối kỳ (VND) (End Balance)			14,913,122.00
Thanh toán tối thiểu (VND) (Minimum Payment Due)			7,323,057.00

Hình 1

 Bảng sao kê thẻ tín dụng là hoá đơn để ngân hàng thống nhất các giao dịch trên thẻ tín dụng với khách hàng sử dụng thẻ. Bảng sao kê đó được ngân hàng phát hành thẻ gửi cho khách hàng vào cuối mỗi kì sao kê.

Một bảng sao kê bao gồm những thông tin chính sau.

- Ngày sao kê là một ngày cố định trong tháng mà ngân hàng chốt các phát sinh bằng thẻ tín dụng để gửi cho khách hàng.
- Chu kì sao kê (còn gọi là kì sao kê hay kì thanh toán) là khoảng thời gian giữa hai lần sao kê liên tiếp của ngân hàng, thường được quy định là 1 tháng.

Các giao dịch phát sinh trong kì sao kê sẽ được ngân hàng sao kê và gửi cho khách hàng.

- **Dư nợ kì trước** là số tiền khách hàng còn nợ ngân hàng từ lần sao kê trước chuyển sang.
- Phát sinh nợ trong kì** là tổng số tiền của tất cả các giao dịch đã được thực hiện trên thẻ trong kì sao kê.
- Phát sinh có trong kì** là tổng số tiền khách hàng đã trả cho ngân hàng trong kì sao kê.
- Dư nợ cuối kì** là số tiền khách hàng phải thanh toán cho ngân hàng trong kì sao kê. Như vậy: $\text{Dư nợ cuối kì} = (\text{Dư nợ kì trước} + \text{Phát sinh nợ trong kì}) - \text{Phát sinh có trong kì}$.
- **Ngày đến hạn thanh toán** là ngày cuối cùng khách hàng phải thanh toán toàn bộ dư nợ cuối kì cho ngân hàng. Phần dư nợ cuối kì chưa được thanh toán sẽ bị tính lãi theo quy định của ngân hàng.
- Vào ngày đến hạn thanh toán, nếu khách hàng chưa trả toàn bộ dư nợ cuối kì cho ngân hàng thì khách hàng phải trả một **khoản thanh toán tối thiểu** cho dư nợ cuối kì. Khoản thanh toán tối thiểu là số tiền ít nhất khách hàng phải trả cho dư nợ cuối kì để không bị ảnh hưởng đến uy tín của khách hàng trong lịch sử vay vốn ở các ngân hàng (hay tổ chức tài chính). Thông thường khoản thanh toán tối thiểu là 5% của dư nợ cuối kì, tuy nhiên, cách tính số tiền thanh toán tối thiểu có thể thay đổi tùy theo quy định của từng ngân hàng. Chẳng hạn, trong bảng sao kê ở *Hình 1*, ngân hàng quy định khoản thanh toán tối thiểu là 50% của dư nợ cuối kì.
- Liệt kê chi tiết tất cả các giao dịch đã được thực hiện trên thẻ trong kì sao kê.

Ví dụ 1 Hãy giải thích dư nợ cuối kì trong bảng sao kê ở *Hình 1*.

Giải

Dư nợ cuối kì trong bảng sao kê ở *Hình 1* là:

$$(49\,843\,930 + 15\,072\,664) - 50\,003\,472 = 14\,913\,122 \text{ (đồng)}.$$



1 Khoản thanh toán tối thiểu trong bảng sao kê ở *Hình 1* là bao nhiêu đồng?

2. Phí sử dụng thẻ. Lãi suất thẻ

Khi mở thẻ ngân hàng, ngân hàng sẽ thu phí sử dụng thẻ. Đây là loại phí thu hàng năm nhằm giúp ngân hàng có thể quản lý tài khoản thẻ và cung ứng dịch vụ thanh toán (qua thẻ) cho khách hàng. Ngoài ra, nếu khách hàng sử dụng thẻ tín dụng thì sẽ phải thanh toán lãi suất thẻ.

Sau đây, ta sẽ tìm hiểu về lãi suất thẻ tín dụng.



3 Trong kì sao kê từ ngày 10/01/2023 đến ngày 10/02/2023, anh Dũng sử dụng thẻ tín dụng của mình để trả 10 triệu đồng khi mua sản phẩm. Ngày 15/2/2023, anh Dũng nhận được bản sao kê của ngân hàng yêu cầu thanh toán khoản tiền đó vào ngày 06/03/2023 với số tiền phải trả nhiều hơn 10 triệu đồng. Em hãy giải thích vì sao ngân hàng lại thông báo như thế cho anh Dũng.



Lãi suất thẻ là một khoản tiền lãi khách hàng phải trả cho phần dư nợ cuối kì chưa được thanh toán cho ngân hàng vào ngày đến hạn thanh toán. Khoản tiền lãi được tính bằng tỉ lệ phần trăm trên phần dư nợ cuối kì chưa được thanh toán.

Ở nước ta hiện nay lãi suất thẻ tín dụng của đa số các ngân hàng dao động trong khoảng 30% – 40%/năm.

Cách tính lãi suất thẻ được quy định như sau:

- Gọi A là khoản dư nợ cuối kì chưa được thanh toán cho ngân hàng vào ngày đến hạn thanh toán, trong đó ngân hàng đã trừ cho khách hàng khoản thanh toán tối thiểu (nếu khách hàng đã nộp) khi tính A .
- Gọi t là số ngày chậm thanh toán so với ngày đến hạn thanh toán.

Chẳng hạn, ngày thanh toán trên bảng sao kê quy định là 4/4/2023 nhưng khách hàng đến thanh toán toàn bộ A vào ngày 14/4/2023 thì $t = 14 - 4 = 10$ (ngày).

- Gọi lãi suất thẻ tín dụng là $r\%/năm$.



Khi đó lãi suất thẻ được tính như sau: $L = A \cdot \frac{r}{100 \cdot 365} \cdot t = \frac{Art}{36\,500}$ (đồng).

Ví dụ 2 Anh Đan sử dụng thẻ tín dụng của một ngân hàng với lãi suất thẻ tín dụng là 25%/năm.

Ngày 10/3/2023, anh Đan nhận được bản sao kê thẻ tín dụng cho kì sao kê từ 09/02/2023 đến 08/3/2023 với những thông tin sau:

Ngày sao kê: 10/3/2023. Ngày đến hạn thanh toán: 04/4/2023.

Dư nợ cuối kì: 16 500 000 đồng. Thanh toán tối thiểu: 825 000 đồng.

Ngày 02/4/2023 anh Đan thanh toán cho ngân hàng số tiền 1 000 000 đồng. Vì những lí do cá nhân nên đến ngày 24/4/2023 anh Đan mới thanh toán nốt dư nợ cuối kì cho ngân hàng.

- Hỏi khi đó anh Đan sẽ phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền (làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng) vào ngày 24/4/2023?
- Số tiền phát sinh thêm do thanh toán chậm là bao nhiêu phần trăm của dư nợ cuối kì (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Giải

- Khoản dư nợ cuối kì chưa được thanh toán cho ngân hàng vào ngày 04/4/2023 là:

$$A = 16\,500\,000 - 1\,000\,000 = 15\,500\,000 \text{ (đồng)}.$$

Do anh Đan thanh toán nốt dư nợ cuối kì cho ngân hàng vào ngày 24/4/2023 nên số ngày chậm thanh toán so với ngày 04/4/2023 là: $t = 24 - 4 = 20$ (ngày).

Áp dụng công thức tính lãi suất thẻ, số tiền lãi suất thẻ được tính là:

$$L = \frac{15\,500\,000 \cdot 25 \cdot 20}{36\,500} \approx 212\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy anh Đan phải trả cho ngân hàng vào ngày 24/4/2023 số tiền xấp xỉ là:

$$15\,500\,000 + 212\,000 = 15\,712\,000 \text{ (đồng)}.$$

b) Tỷ số phần trăm của số tiền phát sinh thêm do thanh toán chậm so với dư nợ cuối kì là:

$$\frac{212\,000}{16\,500\,000} \cdot 100\% \approx 1,28\%.$$

Chú ý

• Những rủi ro khi sử dụng thẻ tín dụng của ngân hàng là:

+ Nếu khách hàng không thanh toán toàn bộ dư nợ cuối kì đúng hạn, khách hàng sẽ phải trả thêm một khoản tiền lãi. Thời gian trả nợ càng dài, khoản tiền lãi phát sinh càng lớn. Vì vậy, hãy nhớ rằng không nên mang một khoản nợ dài hạn trên thẻ tín dụng!

Chẳng hạn, ở Ví dụ 2, chỉ sau có 20 ngày, khoản tiền lãi phát sinh đã chiếm 1,28% dư nợ cuối kì.

+ Với thẻ tín dụng, mỗi chúng ta đều có thể chi tiêu nhiều hơn số tiền mà ta thực sự cần. Trước khi mở thẻ, hãy cân nhắc cách chúng ta sẽ vượt qua những cám dỗ trong chi tiêu như thế nào và xem xét đó có phải là loại thẻ phù hợp dành cho chúng ta hay không. Một khi đã đưa ra quyết định sử dụng thẻ tín dụng, mỗi chúng ta nên đặt ra một số quy tắc cho bản thân về chi tiêu. Những quy tắc này có thể tương đối đơn giản, chẳng hạn như: chỉ chi tiêu một số tiền nhất định ở mỗi tháng hoặc chỉ sử dụng thẻ cho các trường hợp khẩn cấp hay những mua sắm có giá trị lớn.

Hãy nhớ rằng trong trường hợp chi tiêu quá đà và không có khả năng chi trả, chúng ta có thể mắc nợ ngân hàng một số tiền lớn. Hơn nữa, việc cộng thêm lãi suất quá hạn sẽ khiến chúng ta càng khó hoàn trả hơn.

+ Nếu có nhu cầu cấp bách, ta có thể rút tiền mặt bằng thẻ tín dụng từ các máy ATM (hoặc quầy giao dịch của



2 Bác Ninh sử dụng thẻ tín dụng của một ngân hàng với lãi suất thẻ là 25%/năm.

Ngày 02/12/2022, bác Ninh nhận được bản sao kê thẻ tín dụng cho kì sao kê từ 01/11/2022 đến 30/11/2022 với những thông tin sau:

Ngày sao kê: 02/12/2022.
Ngày đến hạn thanh toán: 15/12/2022.

Dư nợ cuối kì: 18 500 000 đồng. Thanh toán tối thiểu: 925 000 đồng.

Ngày 12/12/2022 bác Ninh thanh toán cho ngân hàng số tiền 1 000 000 đồng. Tuy nhiên đến ngày 18/01/2023 bác Ninh mới thanh toán nốt dư nợ cuối kì cho ngân hàng.

a) Hỏi khi đó bác Ninh sẽ phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

b) Số tiền phát sinh thêm do thanh toán chậm là bao nhiêu phần trăm của dư nợ cuối kì (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

ngân hàng phát hành thẻ) và phải trả phí rút tiền mặt lẫn lãi rút tiền mặt. Tuy nhiên nên hạn chế tối đa việc rút tiền bởi phí rút tiền vô cùng cao. Thông thường các ngân hàng thu phí là từ 2% đến 4% số tiền rút, đồng thời số tiền đã rút sẽ bị tính lãi ngay từ thời điểm chủ thẻ rút tiền.

- Bên cạnh việc phát hành thẻ tín dụng, ngân hàng còn phát hành thẻ ghi nợ (tiếng Anh: Debit card) cho chủ thẻ để thanh toán thay cho tiền mặt với đầy đủ các chức năng của một thẻ thanh toán: rút tiền mặt, chuyển khoản, xem số dư tài khoản, in sao kê,... Thẻ ghi nợ liên kết trực tiếp với nguồn tiền từ tài khoản ngân hàng của khách hàng. Trong tài khoản ngân hàng của khách hàng có bao nhiêu tiền, thì khách hàng chỉ có thể sử dụng bấy nhiêu, không thể sử dụng vượt mức khách hàng có.

Khác với thẻ tín dụng, thẻ ghi nợ không có tính năng chi tiêu trước, trả tiền sau, ta cần hiểu rõ để tránh sự nhầm lẫn. Nhìn từ góc độ rủi ro tài chính cá nhân, những ai chưa có nguồn thu nhập ổn định (như các bạn học sinh, sinh viên) chỉ nên sử dụng thẻ ghi nợ.

II. VAY NỢ

1. Một số khái niệm về tín dụng, vay tín dụng

(Nguồn: Luật Các tổ chức tín dụng số 47/2010/QH12; Luật số: 17/2017/QH14;
Văn bản hợp nhất số 20/VBHN-NHNN ngày 22/5/2014 của Ngân hàng Nhà nước)



4 Gia đình cô Hạnh quyết định vay ngân hàng để mua nhà. Hợp đồng tín dụng giữa đại diện ngân hàng (bên cho vay) và gia đình cô Hạnh (bên vay) nêu rõ những điều khoản sau:

- Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 1,8 tỉ đồng.
- Thời hạn cho vay là 60 tháng tính từ ngày gia đình cô Hạnh nhận được khoản tiền vay trên.
- Lãi suất cho vay là 10,99%/năm và không thay đổi trong suốt thời hạn hợp đồng (là 60 tháng).
- Mục đích vay là để mua nhà.
- Hình thức trả lãi: Trả lãi cuối kì khi kết thúc hợp đồng.
- Hình thức trả gốc: Trả gốc cuối kì khi kết thúc hợp đồng.

Hợp đồng nói trên thể hiện mối quan hệ như thế nào giữa bên cho vay và bên vay?

Trước khi tìm hiểu về vay tín dụng, ta cần tìm hiểu một số khái niệm về tín dụng.

a) Tín dụng là việc chuyển giao một lượng tài sản (có thể là hàng hoá hoặc tiền, chủ yếu là tiền) dựa trên cơ sở tín nhiệm và theo nguyên tắc hoàn trả, theo đó, người cho vay chuyển giao quyền sử dụng lượng tài sản đó cho người vay trong một thời hạn nhất định.

Tín dụng thể hiện mối quan hệ giữa vay và cho vay. Trong đó, người vay có thể là cá nhân (hoặc tổ chức), còn người cho vay là ngân hàng (hoặc tổ chức tín dụng).

b) Vay tín dụng là hoạt động cho vay của ngân hàng (hoặc tổ chức tín dụng) đối với khách hàng. Đây là hình thức cho vay phổ biến nhất, có quy mô lớn nhất trong đời sống xã hội.

Nhà nước đã quy định cụ thể về cho vay của tổ chức tín dụng đối với khách hàng như sau:

“Cho vay là một hình thức cấp tín dụng, theo đó tổ chức tín dụng giao cho khách hàng sử dụng một khoản tiền để sử dụng vào mục đích và thời gian nhất định theo thoả thuận với nguyên tắc có hoàn trả cả gốc và lãi” (Theo khoản 1, Điều 3, Văn bản hợp nhất số 20/VBHN-NHNN ngày 22/5/2014 của Ngân hàng Nhà nước).

c) Lãi suất tín dụng thường đi kèm theo tín dụng. Lãi suất tín dụng là tỉ lệ phần trăm tính theo một kì hạn xác định, dựa theo đó để tính toán lợi tức mà người đi vay phải trả cho bên cho vay. Nếu hiểu theo nghĩa đơn giản hơn, lãi suất chính là giá cả (tính trên một đơn vị tiền tệ) mà người đi vay phải trả cho bên cho vay để được sử dụng nguồn tiền trong một khoảng thời gian nhất định.

Lãi suất tín dụng của mỗi khoản vay đều được quy định bởi bên cho vay và nằm trong mức lãi suất mà Ngân hàng Nhà nước cho phép.

Lãi suất tín dụng có ý nghĩa vô cùng quan trọng đối với nền kinh tế. Mức lãi suất giúp cho cả ngân hàng và các cá nhân, doanh nghiệp đưa ra những quyết định đầu tư quan trọng. Lãi suất tín dụng là công cụ giúp chính phủ điều phối luồng di chuyển nguồn vốn và hàng hoá giữa các khu vực trong và ngoài nước, giúp điều tiết sự ổn định của tỉ giá, đảm bảo điều hoà các quan hệ có lợi cho nền kinh tế cả nước.

2. Vay nợ theo hình thức vay ngân hàng (hoặc tổ chức tín dụng)

 **5** Bác Chính vay ngân hàng một khoản tiền gốc là 500 triệu đồng trong hai kì hạn với lãi suất mỗi kì hạn đều là 8,5%. Hỏi tổng số tiền bác Chính phải trả (cả vốn lẫn lãi) cho ngân hàng khi kết thúc hợp đồng tín dụng là bao nhiêu?

Tương tự như công thức lãi kép, ta cũng có công thức sau:



Nếu vay ngân hàng một khoản tiền gốc A trong n kì hạn với lãi suất r mỗi kì hạn (r được biểu thị dưới dạng số thập phân) thì tổng số tiền S phải trả (cả vốn lẫn lãi) cho ngân hàng khi kết thúc hợp đồng tín dụng cho bởi công thức sau:

$$S = A(1 + r)^n.$$

Ví dụ 3 Ở bài toán nêu trong *Hoạt động 4*, hãy cho biết:

a) Số tiền lãi gia đình cô Hạnh phải thanh toán cho ngân hàng khi kết thúc hợp đồng tín dụng là bao nhiêu tiền (làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng)?

- b) Số tiền lãi đó chiếm bao nhiêu phần trăm tổng số tiền được vay ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Giải

- a) Số tiền ngân hàng nhận được khi kết thúc hợp đồng với gia đình cô Hạnh cũng chính là tổng số tiền S nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau 5 kì hạn gửi tiết kiệm (theo thể thức lãi kép) khoản tiền gốc 1,8 tỉ đồng với lãi suất 10,99%/năm.

Áp dụng công thức lãi kép, số tiền ngân hàng nhận được khi kết thúc hợp đồng là:

$$S = 1\,800\,000\,000 \cdot (1 + 0,1099)^5 \approx 3\,031\,739\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy số tiền lãi gia đình cô Hạnh phải thanh toán cho ngân hàng khi kết thúc hợp đồng tín dụng là:
 $3\,031\,739\,000 - 1\,800\,000\,000 = 1\,231\,739\,000 \text{ (đồng)}.$

- b) Tỷ số phần trăm của số tiền lãi đó và số vốn được vay ban đầu là:

$$\frac{1\,231\,739\,000}{1\,800\,000\,000} \cdot 100\% \approx 68,4\%.$$

3 Anh Huy quyết định vay tín dụng ngân hàng để mua xe máy. Hợp đồng tín dụng giữa đại diện ngân hàng và anh Huy có hai điều khoản sau: Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 20 triệu đồng; thời hạn cho vay là 24 tháng tính từ ngày anh Huy nhận được khoản tiền vay trên. Lãi suất cho vay là 9%/năm và không thay đổi trong suốt thời hạn hợp đồng (là 24 tháng).

Hỏi khi kết thúc hợp đồng, anh Huy phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền? Trung bình mỗi tháng anh Huy phải trả lãi cho ngân hàng bao nhiêu tiền?

Để tạo chi phí thấp hơn cho khách hàng khi thanh toán hợp đồng, trong những năm gần đây các ngân hàng đưa ra loại hợp đồng vay tín dụng theo hình thức “dư nợ giảm dần”.

Ta sẽ tìm hiểu vấn đề này qua ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ 4 Gia đình cô Mai quyết định vay ngân hàng để mua nhà trả góp. Hợp đồng tín dụng giữa đại diện ngân hàng (bên cho vay) và gia đình cô Mai (bên vay) nêu rõ những điều khoản sau:

- Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 1,2 tỉ đồng, tức là khoản vay gốc là 1,2 tỉ đồng.
- Thời hạn cho vay là 12 tháng tính từ ngày gia đình cô Mai nhận được khoản tiền vay gốc trên.
- Thanh toán hợp đồng tín dụng như sau:
 - + Ba tháng thứ nhất thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 100% khoản vay gốc với lãi suất là 8,35%/năm.
 - + Ba tháng thứ hai thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 75% khoản vay gốc với lãi suất là 8,35%/năm.
 - + Ba tháng thứ ba thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 50% khoản vay gốc với lãi suất là 8%/năm.

+ Ba tháng thứ tư thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 25% khoản vay gốc với lãi suất là 8,5%/năm.

- a) Hỏi khi kết thúc hợp đồng, gia đình cô Mai phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền?
- b) Giả sử gia đình cô Mai lựa chọn hình thức thanh toán một lần, trả cả vốn và lãi vào cuối kì 12 tháng với lãi suất cho vay là 8,35%/năm và không thay đổi trong cả 12 tháng của hợp đồng. Khi đó, gia đình cô Mai phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền? Từ đó, nêu nhận xét về hai hình thức thanh toán đó.

Giải

- a) Số tiền gia đình cô Mai thanh toán cho ngân hàng ở ba tháng thứ nhất là:

$$25\% \cdot 1\,200\,000\,000 + \frac{0,0835}{4} \cdot 1\,200\,000\,000 = 325\,050\,000 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền gia đình cô Mai thanh toán cho ngân hàng ở ba tháng thứ hai là:

$$25\% \cdot 1\,200\,000\,000 + \frac{0,0835}{4} \cdot 900\,000\,000 = 318\,787\,500 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền gia đình cô Mai thanh toán cho ngân hàng ở ba tháng thứ ba là:

$$25\% \cdot 1\,200\,000\,000 + \frac{0,08}{4} \cdot 600\,000\,000 = 312\,000\,000 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền gia đình cô Mai thanh toán cho ngân hàng ở ba tháng thứ tư là:

$$25\% \cdot 1\,200\,000\,000 + \frac{0,085}{4} \cdot 300\,000\,000 = 306\,375\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy khi kết thúc hợp đồng, gia đình cô Mai phải trả cho ngân hàng tổng số tiền là:

$$S_1 = 325\,050\,000 + 318\,787\,500 + 312\,000\,000 + 306\,375\,000 = 1\,262\,212\,500 \text{ (đồng)}.$$

- b) Áp dụng công thức tính số tiền khi kết thúc hợp đồng tín dụng, gia đình cô Mai phải trả cho ngân hàng (khi kết thúc hợp đồng 12 tháng) tổng số tiền là:

4 Gia đình chị Vinh quyết định vay ngân hàng để mở rộng sản xuất. Hợp đồng tín dụng giữa đại diện ngân hàng (bên cho vay) và gia đình chị Vinh (bên vay) nêu rõ những điều khoản sau:

- Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 1,2 tỉ đồng, tức là khoản vay gốc là 1,2 tỉ đồng.
- Thời hạn cho vay là 12 tháng tính từ ngày gia đình chị Vinh nhận được khoản tiền vay gốc trên.
- Thanh toán hợp đồng tín dụng như sau:

+ Bốn tháng thứ nhất thanh toán 30% khoản vay gốc và tiền lãi của 100% khoản vay gốc với lãi suất là 8%/năm.

+ Bốn tháng thứ hai thanh toán 30% khoản vay gốc và tiền lãi của 70% khoản vay gốc với lãi suất là 8,25%/năm.

+ Bốn tháng thứ ba thanh toán 30% khoản vay gốc và tiền lãi của 40% khoản vay gốc với lãi suất là 8,35%/năm.

Hỏi khi kết thúc hợp đồng, gia đình chị Vinh phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền?

$$S_2 = 1\,200\,000\,000 \cdot (1 + 0,0835) = 1\,300\,200\,000 \text{ (đồng)}.$$

Do $S_1 < S_2$ nên hình thức thanh toán thứ nhất có lợi hơn cho gia đình cô Mai.

Chú ý: Những rủi ro khi vay ngân hàng là:

- Lãi suất tín dụng của các hợp đồng cho vay tiêu dùng cá nhân, đặc biệt là cho vay mua bất động sản, thường rất cao. Vì thế, số tiền chúng ta phải trả cho ngân hàng khi thanh toán hợp đồng là lớn. Chẳng hạn, trong *Ví dụ 5*, số tiền lãi gia đình cô Hạnh phải thanh toán cho ngân hàng lên tới (xấp xỉ) 68,4% tổng số tiền được vay ban đầu.
- Các khoản vay ngân hàng đòi hỏi người vay phải có tài sản đảm bảo khoản vay (vay thế chấp tài sản). Những tài sản này phải là tài sản có giá trị lớn (quyền sử dụng đất, quyền sở hữu nhà ở, xe ô tô, ...). Tuy nhiên, số tiền mà ngân hàng duyệt vay thường chỉ bằng 70% giá trị tài sản thế chấp.
- Trước khi vay nợ, ta phải cân nhắc kỹ lưỡng khả năng thanh toán khoản vay nợ đó, bởi lẽ việc thanh toán khoản vay nợ có thể dẫn đến không quản lý được chi tiêu của bản thân (hoặc của gia đình) và gây thiếu hụt tài chính.

BÀI TẬP

1. Anh Bình quyết định vay ngân hàng để mua ô tô kinh doanh vận tải.

- Ngân hàng giới thiệu với anh Bình hợp đồng tín dụng thứ nhất với những điều khoản sau:
 - Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 800 triệu đồng.
 - Thời hạn cho vay là 24 tháng tính từ ngày anh Bình nhận được khoản tiền vay trên.
 - Lãi suất cho vay là 9%/năm và không thay đổi trong suốt thời hạn hợp đồng (là 24 tháng).
 - Hình thức trả lãi: Trả lãi cuối kì khi kết thúc hợp đồng.
 - Hình thức trả gốc: Trả gốc cuối kì khi kết thúc hợp đồng.
- Ngân hàng giới thiệu với anh Bình hợp đồng tín dụng thứ hai với những điều khoản sau:
 - Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 800 triệu đồng, tức là khoản vay gốc là 800 triệu đồng.
 - Thời hạn cho vay là 24 tháng tính từ ngày anh Bình nhận được khoản tiền vay gốc trên.
 - Thanh toán hợp đồng tín dụng như sau:
 - + Sáu tháng thứ nhất thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 100% khoản vay gốc với lãi suất là 9%/năm.

- + Sáu tháng thứ hai thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 75% khoản vay gốc với lãi suất là 9%/năm.
- + Sáu tháng thứ ba thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 50% khoản vay gốc với lãi suất là 8,5%/năm.
- + Sáu tháng thứ tư thanh toán 25% khoản vay gốc và tiền lãi của 25% khoản vay gốc với lãi suất là 9,5%/năm.

- a) Hỏi khi kết thúc hợp đồng tín dụng thứ nhất, anh Bình phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền?
- b) Hỏi khi kết thúc hợp đồng tín dụng thứ hai, anh Bình phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền?
- c) Trong hai hợp đồng tín dụng đó, hợp đồng tín dụng nào có lợi hơn cho anh Bình?

2. Gia đình bác Tư quyết định vay ngân hàng để sửa chữa và nâng cấp nhà ở. Hợp đồng tín dụng giữa đại diện ngân hàng (bên cho vay) và gia đình bác Tư (bên vay) nêu rõ những điều khoản sau:

- Tổng số tiền ngân hàng cho vay một lần là 900 triệu đồng.
- Thời hạn cho vay là 18 tháng tính từ ngày gia đình bác Tư nhận được khoản tiền vay trên và được chia thành 18 kì (mỗi kì là một tháng).
- Mục đích vay là để sửa chữa và nâng cấp nhà ở.
- Lãi suất cho vay: trong 6 kì đầu tiên là 8,0%/năm; trong 6 kì tiếp theo là 10,0%/năm; trong 6 kì cuối cùng là 11,5%/năm.
- Hình thức trả gốc: Trả gốc theo kì với số tiền là 50 triệu đồng/kì.
- Hình thức trả lãi: Trả lãi theo kì căn cứ vào dư nợ gốc và lãi suất cho vay ở kì đó (cho đến khi kết thúc hợp đồng). Cụ thể như sau:
- + Lãi suất năm được xác định trên cơ sở một năm là 365 ngày.
- + Lãi phải trả trong kì =

$$\frac{(\text{Dư nợ gốc trong kì}) \times (\text{Lãi suất cho vay trong kì}) \times (\text{Số ngày vay thực tế trong kì})}{365}$$

Giả sử số ngày vay thực tế trong mỗi kì đều là 30 ngày.

- a) Trong kì 1, hãy tính: dư nợ gốc; số tiền lãi; tổng gốc lãi phải trả cho ngân hàng.
- b) Trong kì 2, hãy tính: dư nợ gốc; số tiền lãi; tổng gốc lãi phải trả cho ngân hàng.
- c) Hoàn thành bảng kê chi tiết lịch trả dự kiến cho toàn bộ hợp đồng của gia đình bác Tư theo mẫu sau (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị):

Bảng kê chi tiết lịch trả dự kiến

Kì	Dư nợ gốc	Gốc trả/kì	Lãi suất kì	Số tiền lãi suất tạm tính/kì	Tổng gốc lãi tạm tính/kì
1	900 000 000	50 000 000	8,0%	?	?
2	850 000 000	50 000 000	8,0%	?	?
...	...	...	...	...	...
18	50 000 000	50 000 000	11,5%	?	?

d) Tính số tiền gia đình bác Tư phải trả cho ngân hàng khi kết thúc hợp đồng.

3. Anh Trung sử dụng thẻ tín dụng của một ngân hàng với lãi suất thẻ là 30%/năm.

Ngày 02/4/2023, anh Trung nhận được bản sao kê thẻ tín dụng cho kì sao kê từ 01/3/2023 đến 31/3/2023 với những thông tin sau:

Ngày sao kê: 02/4/2023. Ngày đến hạn thanh toán: 15/4/2023.

Dư nợ cuối kì: 21 800 000 đồng. Thanh toán tối thiểu: 11 400 000 đồng.

Ngày 12/4/2023 anh Trung thanh toán cho ngân hàng số tiền 1 000 000 đồng. Tuy nhiên đến ngày 18/5/2023 anh Trung mới thanh toán nốt dư nợ cuối kì cho ngân hàng.

a) Hỏi khi đó anh Trung sẽ phải trả cho ngân hàng tổng cộng bao nhiêu tiền (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

b) Số tiền phát sinh thêm do thanh toán chậm là bao nhiêu phần trăm của dư nợ cuối kì (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

§3

ĐẦU TƯ TÀI CHÍNH. LẬP KẾ HOẠCH TÀI CHÍNH CÁ NHÂN

Cô Hạnh có 500 triệu đồng. Có ba phương án để cô Hạnh cân nhắc:

Phương án 1: Đem số tiền đó gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm.

Phương án 2: Đầu tư vào chứng khoán của công ty A với lãi suất kì vọng là 12% năm nhưng rủi ro cao.

Phương án 3: Dành ra một khoản tiền để gửi tiết kiệm, khoản tiền còn lại đầu tư chứng khoán.



Hỏi cô Hạnh nên lựa chọn phương án nào để khoản tiền ban đầu đó vừa sinh ra lợi nhuận vừa đảm bảo an toàn, tránh rủi ro?



I. MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐẦU TƯ TÀI CHÍNH

1. Khái niệm đầu tư tài chính



1 Hãy cho biết đầu tư tài chính là gì?



Đầu tư tài chính là bỏ tiền của cá nhân, tổ chức vào một doanh nghiệp hay một hoạt động kinh doanh để có được lợi nhuận hoặc để tiến hành thành công hoạt động kinh doanh đó.

Ví dụ 1 Hãy nêu sự khác biệt giữa tiết kiệm và đầu tư.

Giải

Tiết kiệm và đầu tư là nền tảng cho các hoạt động về tài chính. Ta có thể hiểu như sau:

- Tiết kiệm là việc lưu giữ giá trị, biến sức mua hiện tại thành sức mua trong tương lai.
- Đầu tư là bỏ tiền của cá nhân, tổ chức vào một doanh nghiệp hay một hoạt động kinh doanh.



1 Bạn Ánh nói rằng gia đình bạn đầu tư tài chính bằng cách gửi tiết kiệm 100 triệu đồng và đầu tư chứng khoán là 100 triệu đồng. Bạn Ánh nói như thế có chính xác hay không? Vì sao?

2. Khái niệm về chứng khoán

(Nguồn: Luật Chứng khoán năm 2019 số 54/2019/QH14)

 **2** Hãy cho biết cổ phiếu của ngân hàng Ngoại thương Việt Nam (Vietcombank, mã chứng khoán VCB) có phải là chứng khoán hay không?



- *Chứng khoán* là chứng từ có giá trị dài hạn xác nhận sở hữu hợp pháp của người sở hữu (gọi chung là nhà đầu tư) với tài sản của doanh nghiệp hoặc tổ chức phát hành.
- *Thị trường chứng khoán* là nơi diễn ra các giao dịch mua bán trao đổi các loại chứng khoán. Chứng khoán là hàng hoá của thị trường chứng khoán.

Ví dụ 2 Hãy giải thích vì sao thị trường chứng khoán có vai trò rất lớn cho nền kinh tế đất nước.

Giải

Thị trường chứng khoán tại Việt Nam có những vai trò quan trọng sau:

- Giúp tăng cường tích tụ, tập trung vốn trung và dài hạn cho nền kinh tế, giảm áp lực cho hệ thống ngân hàng.
- Giúp cho hoạt động của các doanh nghiệp niêm yết trên thị trường chứng khoán được cải thiện.
- Giảm chi phí vốn cho nền kinh tế.
- Giúp cho phân phối vốn hiệu quả hơn.
- Tăng các công cụ mới cho thị trường tài chính



2 Hãy giải thích vì sao thị trường chứng khoán có thể giúp cho phân phối vốn hiệu quả hơn.

3. Đầu tư chứng khoán thông qua mua bán cổ phiếu

(Nguồn: Luật Chứng Khoán năm 2019 số 54/2019/QH14; Luật Doanh nghiệp 2020;
<https://www.vndirect.com.vn/kien-thuc-co-ban/>)

 **3** Hãy cho biết: Đầu tư chứng khoán là gì? Cổ phiếu là gì? Giá trung bình của cổ phiếu là gì? Cổ tức là gì? Có các hình thức nào để trả cổ tức?



- *Đầu tư chứng khoán* là đầu tư vào các sản phẩm trên thị trường chứng khoán, cụ thể là cổ phiếu, trái phiếu, ...
- *Cổ phiếu* là một loại chứng khoán (được coi là tài sản) và cũng là đối tượng giao dịch trên sàn chứng khoán.
- *Giá trung bình* của cổ phiếu trong một ngày giao dịch được tính bằng trung bình cộng của giá cao nhất và giá thấp nhất của cổ phiếu trong ngày giao dịch đó.



- **Cổ tức** là khoản lợi nhuận ròng được trả cho mỗi cổ phần bằng tiền mặt hoặc bằng tài sản khác.

Chú ý

- Bản chất của đầu tư chứng khoán là mua sản phẩm với giá thấp và bán lại với giá cao, từ đó nhận được lợi nhuận đầu tư.
- Đầu tư chứng khoán tuy cần bỏ nhiều công sức để học hỏi, nhưng là một kỹ năng cực kì hữu ích, vì nó cho phép nhà đầu tư gây dựng quỹ tích lũy lâu dài, đa dạng hoá nguồn thu nhập, cập nhật hiểu biết về các vấn đề tài chính kinh tế,...
- Có hai hình thức chi trả cổ tức phổ biến nhất, đó là: trả bằng tiền và trả bằng cổ phiếu.
 - + Trả cổ tức bằng tiền là việc doanh nghiệp trả cổ tức bằng tiền trực tiếp vào tài khoản chứng khoán cho cổ đông.
 - + Trả cổ tức bằng cổ phiếu.

Ví dụ 3 Ngày 26/4/2023, Ngân hàng Thương mại Cổ phần Tiên Phong có mã cổ phiếu là TPB chi trả cổ tức năm 2023 bằng tiền mặt với tỉ lệ 25% (Nguồn: <https://tuoitre.vn>). Hãy cho biết một cổ phiếu TPB sẽ nhận được bao nhiêu tiền.

Giải

Một cổ phiếu TPB sẽ nhận được số tiền là:

$$25\% \times 10\,000 = 2\,500 \text{ (đồng)}.$$

Chú ý

Tại thị trường chứng khoán Việt Nam, khi một doanh nghiệp công bố tỉ lệ trả cổ tức bằng tiền, doanh nghiệp đó dựa trên mệnh giá cổ phiếu, tức là 10 000 đồng/cổ phiếu.

Ví dụ 4 Cô Hạnh dự định đầu tư vào chứng khoán của doanh nghiệp X. Mỗi cổ phiếu của doanh nghiệp đó có giá trung bình tại một số thời điểm được thống kê trong **Bảng 3**:

Thời điểm	12/4/2020	12/4/2021	12/4/2022	12/4/2023
Giá trung bình mỗi cổ phiếu (đồng)	70 600	98 900	82 400	88 300

Bảng 3

3 Ngày 30/01/2023, Ngân hàng Ngoại Thương Việt Nam (Vietcombank, mã chứng khoán: VCB) thông báo trả cổ tức năm 2020 bằng cổ phiếu với tỉ lệ 18,1% (Nguồn: <https://vnba.org.vn>). Hãy cho biết một cổ đông nắm giữ 100 cổ phiếu VCB sẽ nhận được thêm bao nhiêu cổ phiếu mới.

Vào ngày 12/4/2020, cô Hạnh mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X. Vào ngày 12/4/2021, cô Hạnh tiếp tục mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X.

- a) Số tiền cô Hạnh đã đầu tư để mua 20 000 cổ phiếu nói trên là bao nhiêu?
- b) • Nếu cô Hạnh bán toàn bộ 20 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 12/4/2022 thì cô Hạnh sẽ bị lỗ bao nhiêu tiền?
- Tính số tiền lãi cô Hạnh thu được nếu bán toàn bộ 20 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 12/4/2023.
- c) Giả sử cô Hạnh đem số tiền đầu tư chứng khoán gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép tại một ngân hàng với kì hạn 12 tháng và lãi suất như sau:
- Lãi suất kì hạn 12 tháng vào ngày 12/4/2020 là 6,6%/năm;
 - Lãi suất kì hạn 12 tháng vào ngày 12/4/2021 là 5,5%/năm;
 - Lãi suất kì hạn 12 tháng vào ngày 12/4/2022 là 5,5%/năm.

Hãy tính số tiền cô Hạnh nhận được vào thời điểm 12/4/2022 và vào thời điểm 12/4/2023. Sau đó, so sánh số tiền cô Hạnh có được do gửi tiết kiệm với số tiền cô Hạnh có được do đầu tư chứng khoán.

Giải

- a) Số tiền cô Hạnh đã đầu tư để mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào ngày 12/4/2020 là: $S_1 = 70\,600 \cdot 10\,000 = 706\,000\,000$ (đồng).
- Số tiền cô Hạnh đã đầu tư để mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào ngày 12/4/2021 là: $S_2 = 98\,900 \cdot 10\,000 = 989\,000\,000$ (đồng).
- Vậy đến ngày 12/4/2021, tổng số tiền cô Hạnh đã đầu tư để mua 20 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X là: $S = S_1 + S_2 = 706\,000\,000 + 989\,000\,000 = 1\,695\,000\,000$ (đồng).
- b) • Số tiền cô Hạnh bị lỗ nếu bán toàn bộ 20 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 12/4/2022 là: $1\,695\,000\,000 - 82\,400 \cdot 20\,000 = 47\,000\,000$ (đồng).
- Số tiền lãi cô Hạnh thu được nếu bán toàn bộ 20 000 cổ phiếu của doanh nghiệp X vào thời điểm 12/4/2023 là: $88\,300 \cdot 20\,000 - 1\,695\,000\,000 = 71\,000\,000$ (đồng).



4 a) Ngày 12/4/2022, cô Bình mua 10 000 cổ phiếu của doanh nghiệp A với giá 40 980 đồng/1 cổ phiếu. Đến ngày 12/4/2023, cô Bình bán toàn bộ số cổ phiếu đó với giá 44 340 đồng/1 cổ phiếu. Tính số tiền lãi cô Bình nhận được sau khi bán.

b) Giả sử ngày 12/4/2022 cô Bình đem số tiền tiết kiệm 409 800 000 đồng gửi tiết kiệm ở một ngân hàng theo kì hạn 12 tháng với lãi suất là 5,5%/năm. Tính số tiền lãi cô Bình nhận được sau khi thanh toán tiết kiệm vào ngày 12/4/2023. Từ đó hãy cho biết, trong hai phương án kinh doanh trên, phương án nào có số tiền lãi nhiều hơn.

- c) • Nếu gửi tiết kiệm số tiền $S_1 = 706\,000\,000$ (đồng) thì đến ngày 12/4/2021 cô Hạnh nhận được số tiền là: $706\,000\,000 + 706\,000\,000 \cdot 6,6\% = 752\,596\,000$ (đồng). Số tiền này tiếp tục được cô Hạnh gửi tiết kiệm nên đến ngày 12/4/2022 cô Hạnh nhận được số tiền là:

$$752\,596\,000 + 752\,596\,000 \cdot 5,5\% = 793\,988\,780 \text{ (đồng)}.$$

Nếu gửi tiết kiệm số tiền $S_2 = 989\,000\,000$ (đồng) thì đến ngày 12/4/2022 cô Hạnh nhận được số tiền là: $989\,000\,000 + 989\,000\,000 \cdot 5,5\% = 1\,043\,395\,000$ (đồng).

Vậy đến ngày 12/4/2022 cô Hạnh nhận được tổng số tiền là:

$$S' = 793\,988\,780 + 1\,043\,395\,000 = 1\,837\,383\,780 \text{ (đồng)}.$$

So với số vốn bỏ ra ban đầu là $S = 1\,695\,000\,000$ (đồng) thì cô Hạnh đã nhận được số tiền lãi là:

$$S' - S = 1\,837\,383\,780 - 1\,695\,000\,000 = 142\,383\,780 \approx 142\,384\,000 \text{ (đồng)}.$$

- Vào ngày 12/4/2022, cô Hạnh tiếp tục gửi tiết kiệm số tiền là 1 837 383 780 đồng thì đến ngày 12/4/2023 cô Hạnh nhận được tổng số tiền là:

$$1\,837\,383\,780 + 1\,837\,383\,780 \cdot 5,5\% = 1\,938\,439\,887,9 \text{ (đồng)}.$$

So với số vốn bỏ ra ban đầu là $S = 1\,695\,000\,000$ (đồng) thì cô Hạnh đã nhận được số tiền lãi là:

$$1\,938\,439\,887,9 - 1\,695\,000\,000 = 243\,439\,887,9 \approx 243\,440\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy ta có các nhận xét sau:

+ Đến ngày 12/4/2022, thay vì đầu tư chứng khoán bị lỗ 47 000 000 đồng, nếu đem gửi tiết kiệm cô Hạnh sẽ nhận được số tiền lãi là 142 384 000 đồng.

+ Đến ngày 12/4/2023, thay vì đầu tư chứng khoán chỉ lãi 71 000 000 đồng, nếu đem gửi tiết kiệm cô Hạnh sẽ nhận được số tiền lãi là 243 440 000 đồng.

Nhận xét: Đầu tư chứng khoán là một công việc phức tạp và có nhiều rủi ro.

II. GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐẦU TƯ TÀI CHÍNH

Trong đầu tư tài chính, lợi nhuận luôn gắn liền với *rủi ro* (tiếng Anh: risk). Thông thường, lợi nhuận càng cao rủi ro càng lớn. Vì vậy, một trong những công việc vô cùng quan trọng khi tiến hành đầu tư là phải đánh giá được rủi ro và có biện pháp để kiểm soát rủi ro.

1. Đánh giá rủi ro trong hoạt động đầu tư tài chính của doanh nghiệp

 **4** Hãy nêu cách thức xác định mức độ rủi ro trong hoạt động đầu tư tài chính của doanh nghiệp.

Nhận xét: Đánh giá mức độ rủi ro trong đầu tư phụ thuộc vào tiêu chí xác định rủi ro. Trong cùng một điều kiện đầu tư, khi thay đổi tiêu chí xác định rủi ro ta có thể nhận được những mức độ rủi ro rất khác nhau.

Ta sẽ tìm hiểu vấn đề trên qua những ví dụ sau:

Ví dụ 5 Lãi suất đầu tư là tỉ lệ phần trăm (%) của lợi nhuận so với vốn đầu tư.

Ở một thời điểm nào đó, một doanh nghiệp kinh doanh bất động sản đánh giá như sau:

- Xác suất lãi suất đầu tư kinh doanh bất động sản của doanh nghiệp từ 14% trở lên là 0,8.
- Xác suất lãi suất đầu tư kinh doanh bất động sản du lịch (Căn hộ khách sạn hay Condotel) của doanh nghiệp từ 12% trở lên là 0,55.

Để thúc đẩy việc bán các căn hộ khách sạn cho các nhà đầu tư, doanh nghiệp đưa ra quảng cáo sau: Trong điều kiện đầu tư kinh doanh bất động sản của doanh nghiệp đạt lãi suất đầu từ 14% trở lên, doanh nghiệp sẽ thuê lại căn hộ khách sạn của nhà đầu tư với lãi suất là 12%/năm.

Bác Linh dự định mua căn hộ khách sạn của doanh nghiệp theo quảng cáo đó. Bác Linh xác định rủi ro cho dự định đầu tư của mình theo tiêu chí sau: Lãi suất cho thuê lại căn hộ khách sạn dưới 12%, biết rằng lãi suất đầu tư kinh doanh bất động sản của doanh nghiệp đó từ 14% trở lên.

Hãy cho biết tỉ lệ rủi ro của bác Linh khi đầu tư căn hộ khách sạn theo quảng cáo của doanh nghiệp là bao nhiêu phần trăm?

Giải

Xét các biến cố:

A: “Lãi suất cho thuê lại căn hộ khách sạn của nhà đầu tư từ 12% trở lên”;

B: “Lãi suất đầu tư kinh doanh bất động sản của doanh nghiệp từ 14% trở lên”.

Khi đó, $P(\bar{A} | B)$ chính là xác suất để lãi suất cho thuê lại căn hộ khách sạn dưới 12%, biết rằng lãi suất đầu tư kinh doanh bất động sản của doanh nghiệp đó từ 14% trở lên.

Theo giả thiết ta có: $P(B) = 0,8$; $P(A \cap B) = 0,55$.

Suy ra: $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,55 = 0,25$,

$$P(\bar{A} | B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,8} = 0,3125 = 31,25\%.$$

Vậy tỉ lệ rủi ro của bác Linh khi đầu tư căn hộ khách sạn theo quảng cáo của doanh nghiệp là 31,25%.

Ví dụ 6 Theo dõi hiệu quả kinh doanh của một công ty qua nhiều năm, các chuyên gia thiết lập bảng phân bố xác suất của lãi suất đầu tư X ở công ty đó như sau:

$X(\%)$	9	10	11	12	13	14	15
P	0,08	0,12	0,2	0,3	0,18	0,1	0,02

- a) Khả năng đầu tư vào công ty đó để đạt lãi suất ít nhất 12% là bao nhiêu?
- b) Tìm mức lãi suất nhiều khả năng nhất và mức lãi suất trung bình khi đầu tư vào công ty đó.
- c) Việc đầu tư gặp rủi ro khi lợi nhuận thu được từ việc đầu tư thấp hơn mức lãi suất ngân hàng. Giả sử lãi suất ngân hàng là 10%. Tìm xác suất rủi ro khi đầu tư X vào công ty đó.

Giải

a) Ta có: $P(X \geq 12)$
 $= P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)$
 $= 0,3 + 0,18 + 0,1 + 0,02 = 0,6 = 60\%.$

Vậy khả năng đầu tư vào công ty đó để đạt lãi suất ít nhất 12% là 60%.

- b) • Mức lãi suất nhiều khả năng nhất là $X = 12$
 và $P(X = 12) = 0,3$.

• Ta có:

$$E(X) = 9 \cdot 0,08 + 10 \cdot 0,12 + 11 \cdot 0,2 + 12 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,18 + 14 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,02 = 11,76.$$

Vậy mức lãi suất trung bình khi đầu tư vào công ty đó là 11,76 %.

- c) Xác suất rủi ro khi đầu tư vào công ty đó là $P(X < 10) = P(X = 9) = 0,08 = 8\%.$

Ví dụ 7 Giả sử X, Y (đơn vị: triệu đồng) là hai biến ngẫu nhiên rời rạc lần lượt chỉ lợi nhuận thu được (tính trên 1 tỉ đồng vốn đầu tư) vào dự án thứ nhất, dự án thứ hai. Dưới đây là bảng phân bố xác suất tương ứng của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y .

X	-200	-100	100	300
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Y	-200	-100	100	200
P	0,2	0,1	0,2	0,5

Trong kinh tế học, người ta có thể coi $V(X), V(Y)$ lần lượt đo mức độ rủi ro khi đầu tư vào dự án thứ nhất, dự án thứ hai (Nguồn: R.S. Pindyck, D.L. Rubinfeld. *Microeconomics (second edition)*, Macmillan Publishing Company, New York 1992).

- a) Nếu chỉ dựa trên tiêu chí ưu tiên trung bình lợi nhuận thu được cao và chấp nhận mức độ rủi ro và bạn là nhà đầu tư, bạn nên chọn dự án nào?
- b) Nếu chỉ dựa trên tiêu chí ưu tiên mức độ rủi ro thấp và bạn là nhà đầu tư, bạn nên chọn dự án nào?

Giải

- a) Trung bình lợi nhuận thu được khi đầu tư vào dự án thứ nhất là:

$$E(X) = (-200) \cdot 0,1 + (-100) \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,3 + 300 \cdot 0,4 = 110.$$



5 Bảng phân bố xác suất của lãi suất đầu tư X ở một công ty như sau:

X (%)	7	8	9	10	11
P	0,12	0,18	0,23	0,3	0,17

Việc đầu tư gặp rủi ro khi lợi nhuận thu được từ việc đầu tư thấp hơn mức lãi suất ngân hàng. Giả sử lãi suất ngân hàng là 9%. Tìm mức độ rủi ro khi đầu tư vào công ty đó.

Trung bình lợi nhuận thu được khi đầu tư vào dự án thứ hai là:

$$E(Y) = (-200) \cdot 0,2 + (-100) \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,2 + 200 \cdot 0,5 = 70.$$

Suy ra $E(X) > E(Y)$.

Vậy nếu chỉ dựa trên tiêu chí ưu tiên trung bình lợi nhuận thu được cao và chấp nhận mức độ rủi ro, ta nên chọn đầu tư vào dự án thứ nhất.

b) Mức độ rủi ro khi đầu tư vào dự án thứ nhất là:

$$V(X) = (-200)^2 \cdot 0,1 + (-100)^2 \cdot 0,2 + 100^2 \cdot 0,3 + 300^2 \cdot 0,4 - 110^2 = 32\,900.$$

Mức độ rủi ro khi đầu tư vào dự án thứ hai là:

$$V(Y) = (-200)^2 \cdot 0,2 + (-100)^2 \cdot 0,1 + 100^2 \cdot 0,2 + 200^2 \cdot 0,5 - 70^2 = 26\,100.$$

Suy ra $V(X) > V(Y)$.

Vậy nếu chỉ dựa trên tiêu chí ưu tiên mức độ rủi ro thấp, ta nên chọn đầu tư vào dự án thứ hai.

2. Kiểm soát rủi ro trong đầu tư chứng khoán



5 Hãy nêu khái niệm về cổ tức, hình thức chi trả cổ tức phổ biến nhất.

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm về tỉ suất cổ tức.

Tỉ suất cổ tức (hay tỉ suất lợi nhuận yêu cầu trên cổ phiếu) là tỉ suất sinh lợi mà người mua có thể nhận được từ cổ tức nếu mua cổ phiếu ở mức giá hiện tại.

Công thức tính tỉ suất cổ tức là:

$$\text{Tỉ suất cổ tức} = \frac{\text{Cổ tức trên 1 cổ phiếu}}{\text{Giá thị trường của 1 cổ phiếu}} \times 100\%.$$

Ví dụ 8 Công ty Cổ phần Sữa Việt Nam (VNM) dự kiến trả cổ tức bằng cổ phiếu năm 2018 tỉ lệ 30%, tương ứng 3 000 đồng/cổ phiếu (Nguồn: <https://tienphong.vn>). Giá đóng cửa của cổ phiếu VNM vào ngày 11/12/2018 là 89 600 đồng/cổ phiếu. Hãy tính tỉ suất cổ tức của cổ phiếu đó.

Giải

Tỉ suất cổ tức của cổ phiếu VNM bằng $\frac{3\,000}{89\,600} \times 100\% \approx 3,35\%$.

Đối với các nhà đầu tư chứng khoán, khi họ đầu tư mua cổ phiếu, họ sẽ kì vọng nhận được hai loại nguồn tiền, đó là: nguồn tiền cổ tức nhận được trong thời gian nắm giữ và nguồn tiền nhận được khi bán cổ phiếu. Điều đó phụ thuộc vào cổ tức kì vọng trên mỗi cổ phiếu trong thời gian nắm giữ và giá kì vọng cho mỗi cổ phiếu khi bán. Nhưng để tránh rủi ro, ta cần phải biết liệu có thể đạt được những kì vọng đó hay không.

Có nhiều phương pháp để giải quyết vấn đề trên. Một trong những phương pháp quan trọng và phổ biến để kiểm soát rủi ro trong đầu tư chứng khoán là định giá cổ phiếu khi đầu tư bằng cách chiết khấu dòng cổ tức về hiện tại, từ đó xác định giá trị hiện tại của cổ phiếu.

• *Mô hình cổ tức một giai đoạn (mô hình cổ tức 1 năm)*

Công thức tính là:

$$V_0 = \frac{D_1}{(1+r)^1} + \frac{P_1}{(1+r)^1} = \frac{D_1 + P_1}{(1+r)^1} \quad (*)$$

Trong đó:

V_0 : giá trị của một cổ phiếu tại thời điểm hiện tại;

P_1 : giá bán kì vọng của một cổ phiếu tại thời điểm kết thúc 1 năm;

D_1 : cổ tức kì vọng trên mỗi cổ phiếu cho một năm, giả định sẽ được trả vào cuối năm thứ nhất;

r : tỉ suất lợi nhuận yêu cầu trên cổ phiếu.

Ví dụ 9 Một người muốn mua cổ phiếu (cp) A với kì vọng sau 1 năm nhận cổ tức 2 000 đồng/cp, bán được với giá 50 000 đồng/cp và tỉ suất lợi nhuận yêu cầu là 8%. Hỏi giá trị hiện tại của 1 cổ phiếu A cần phải là bao nhiêu đồng để người đó có thể mua cổ phiếu đó được (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Áp dụng công thức (*), giá trị hiện tại của 1 cổ phiếu A là:

$$V_0 = \frac{2\,000 + 50\,000}{(1 + 8\%)^1} \approx 48\,148 \text{ (đồng)}.$$

Vậy giá trị hiện tại của 1 cổ phiếu A cần phải là 48 148 đồng để người đó có thể mua cổ phiếu đó được.

Chú ý: Giá trị 48 148 đồng/1 cổ phiếu ở Ví dụ 9 thường được gọi là *ngưỡng an toàn* đối với giá trị hiện tại của cổ phiếu để người mua có thể đạt được kì vọng của mình khi đầu tư vào cổ phiếu đó.

• *Mô hình cổ tức nhiều giai đoạn (mô hình cổ tức n năm)*

Mô hình cổ tức nhiều giai đoạn là mở rộng của mô hình trên khi người mua dự định nắm giữ cổ phiếu trong n năm.



6 Một người muốn mua cổ phiếu A với kì vọng sau 1 năm nhận cổ tức 1 500 đồng/cp, bán được với giá 45 000 đồng/cp và tỉ suất lợi nhuận yêu cầu là 9%. Hỏi giá trị hiện tại của 1 cổ phiếu A cần phải là bao nhiêu đồng để người đó có thể mua cổ phiếu đó được (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Công thức tính là:

$$V_0 = \frac{D_1}{(1+r)^1} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_n}{(1+r)^n} + \frac{P_n}{(1+r)^n} \quad (**)$$

Trong đó:

V_0 : giá trị của một cổ phiếu tại thời điểm hiện tại;

P_n : giá bán kì vọng của một cổ phiếu tại thời điểm kết thúc năm thứ n ;

D_k : cổ tức kì vọng trên mỗi cổ phiếu cho năm thứ k , giả định sẽ được trả vào cuối năm thứ k ($1 \leq k \leq n$);

r : tỉ suất lợi nhuận yêu cầu trên cổ phiếu.

Ví dụ 10 Một người muốn nắm giữ cổ phiếu A với cổ tức kì vọng ở năm thứ nhất: 2 000 đồng/cp, ở năm thứ hai: 3 000 đồng/cp, ở năm thứ ba: 2 500 đồng/cp, ở năm thứ tư: 3 500 đồng/cp và giá bán kì vọng ở năm thứ tư là 100 000 đồng, tỉ suất lợi nhuận yêu cầu là 9%. Hỏi giá trị hiện tại của cổ phiếu A cần phải là bao nhiêu đồng để người đó có thể mua cổ phiếu đó được (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Giải

Áp dụng công thức (**), giá trị hiện tại của 1 cổ phiếu A là:

$$V_0 = \frac{2\,000}{(1+9\%)^1} + \frac{3\,000}{(1+9\%)^2} + \frac{2\,500}{(1+9\%)^3} + \frac{3\,500}{(1+9\%)^4} + \frac{100\,000}{(1+9\%)^4} \approx 79\,612 \text{ (đồng)}.$$

Vậy giá trị hiện tại của 1 cổ phiếu A cần phải là 79 612 đồng để người đó có thể mua cổ phiếu đó được.

III. LẬP KẾ HOẠCH TÀI CHÍNH CÁ NHÂN

Ở lớp 8 (Hoạt động thực hành và trải nghiệm, Chủ đề 1, Toán 8 – tập 1, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm 2023) và ở môn Giáo dục kinh tế và pháp luật lớp 10, các em đã được tìm hiểu về lập kế hoạch tài chính cá nhân trên những khía cạnh sau:

- Khái niệm về tài chính cá nhân, quản lí tài chính cá nhân;
- Ý nghĩa của lập kế hoạch tài chính cá nhân;
- Các loại kế hoạch tài chính cá nhân;
- Các bước lập kế hoạch tài chính cá nhân.

Trong đó, việc lập một bản kế hoạch tài chính cá nhân về cơ bản bao gồm các bước sau:

Bước 1. Xác định mục tiêu và thời hạn của kế hoạch tài chính cá nhân.

Bước 2. Xác định tình hình tài chính hiện tại, thu và chi thường xuyên của cá nhân.

Bước 3. Thiết lập quy tắc thu chi cá nhân cụ thể.

Bước 4. Tuân thủ kế hoạch tài chính cá nhân.

(Nguồn: Giáo dục kinh tế và pháp luật 10, Nhà xuất bản Đại học Huế 2022).

1. Nguyên tắc SMART

(Nguồn tham khảo: <https://www.pace.edu.vn/tin-kho-tri-thuc/muc-tieu-smart-la-gi/>)

Để thực hiện *Bước 1* có hiệu quả, người ta thường áp dụng nguyên tắc SMART. Nguyên tắc SMART được viết tắt từ các chữ cái đầu tiên của 5 tiêu chí sau đây:

• **S – Specific:** Cụ thể.

Một mục tiêu thông minh đầu tiên phải được xác định một cách cụ thể, rõ ràng. Mục tiêu càng cụ thể và rõ ràng, chứng tỏ khả năng đạt được càng cao.

• **M – Measurable:** Đo lường, định lượng được.

Nghĩa là mục tiêu phải được gắn liền với những con số, có thể cân, đo, đong, đếm được. Chúng ta biết được chính xác những gì mình cần đạt là bao nhiêu.

• **A – Attainable:** Có thể hoàn thành được, khả thi.

Tính khả thi cũng là một yếu tố rất quan trọng khi ta đưa ra một mục tiêu. Nghĩa là chúng ta phải suy nghĩ về khả năng của bản thân trước khi đề ra một mục tiêu để tránh tình trạng bỏ cuộc giữa chừng.

• **R – Relevant:** Thực tế.

Cần tính toán xem khả năng, vật chất, thời gian, nguồn hỗ trợ, ... có cho phép thực hiện được mục tiêu không.

• **T – Timebased:** Đặt ra khung thời gian thực hiện.

Khung thời gian thực hiện giúp chúng ta biết được đang đi đến đâu trong tiến trình triển khai công việc và kịp thời chấn chỉnh mức độ phấn đấu.

2. Phương pháp chi tiêu 50/20/30

(Nguồn tham khảo: <https://topi.vn/quy-tac-50-20-30.html>)

Để thực hiện *Bước 3* có hiệu quả, người ta thường áp dụng phương pháp chi tiêu 50/20/30 như sau:

– Sử dụng đến 50% nguồn tài chính cá nhân để đáp ứng những nhu cầu thiết yếu trong cuộc sống như: ăn, ở, đi lại, hoá đơn tiện ích,... Nếu một người chi tiêu vượt quá ngưỡng đó thì người đó có thể đang bị thâm hụt ngân sách và cần điều chỉnh lại quá trình chi tiêu sao cho khoản chi tiêu thiết yếu nằm trong mức cho phép.

– Sử dụng đến 20% nguồn tài chính cá nhân cho mục tiêu tài chính cá nhân như: trả nợ,

tiết kiệm, đầu tư. Đây là những khoản nằm trong mục đầu tư và tích lũy cho tương lai. Những khoản này sẽ giúp mỗi người đảm bảo tài chính cá nhân trong tương lai. Nhưng nếu chi tiêu ở khoản này quá lớn thì rủi ro cao và những chi tiêu cần thiết cho hiện tại cũng sẽ bị ảnh hưởng. Vì vậy 20% tổng số thu nhập cho chi tiêu vào mục này là hợp lý.

– Sử dụng đến 30% nguồn tài chính cá nhân để đáp ứng những nhu cầu chi tiêu cá nhân như: mua sắm, giải trí, du lịch, học tập,...



Khoản chi tiêu cá nhân là những khoản chi tiêu linh hoạt, nhu cầu cá nhân lại luôn là rất lớn. Vì vậy, cần tiết chế chi tiêu sao cho mục này chiếm khoảng 30% là hợp lý nhất.

Ví dụ 11 Gia đình anh Nam dự kiến các khoản mục chi tiêu của gia đình bao gồm:

- Chi cho các nhu cầu thiết yếu;
- Cho tiết kiệm và đầu tư;
- Chi cho mua sắm cá nhân;
- Chi cho học tập của các con, dịch vụ y tế và chăm sóc sức khỏe.

Theo em, mỗi khoản mục chi tiêu của gia đình anh Nam nên chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm là hợp lý? Sau đó, vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn tỉ lệ các khoản mục chi tiêu đó.

Giải

Áp dụng phương pháp chi tiêu 50/20/30, kế hoạch chi tiêu hàng tháng của gia đình anh Nam có thể được lập như sau:

Khoản chi tiêu	Tỉ lệ (%)
Chi cho các nhu cầu thiết yếu	50
Tiết kiệm và đầu tư	20
Mua sắm cá nhân	14
Chi cho học tập của các con, dịch vụ y tế và chăm sóc sức khỏe	16



1. a) Ngày 18/4/2022, cô Bình mua 10 000 cổ phiếu của một doanh nghiệp với giá 21 000 đồng/1 cổ phiếu. Đến ngày 18/4/2023, cô Bình bán toàn bộ số cổ phiếu đó với giá 27 000 đồng/1 cổ phiếu. Tính số tiền lãi cô Bình nhận được sau khi bán.
- b) Giả sử ngày 18/4/2022 cô Bình đem số tiền 210 000 000 đồng gửi tiết kiệm ở một ngân hàng theo kì hạn 12 tháng với lãi suất là 6,3%/năm. Tính số tiền lãi cô Bình nhận được sau khi thanh toán tiết kiệm vào ngày 18/4/2023. Từ đó hãy cho biết, trong hai phương án kinh doanh trên, phương án nào có số tiền lãi nhiều hơn.
2. Anh Vinh dự định xin làm việc tại một doanh nghiệp kinh doanh hàng hoá theo đúng một trong hai công việc A và B . Doanh nghiệp đưa ra các thông tin như sau:
- Đối với công việc A :
 - + Mức lương thứ nhất là 18 triệu đồng/tháng và xác suất để anh Vinh được nhận mức lương này là 0,5. Tuy nhiên, mức lương này có điều kiện đòi hỏi anh Vinh phải đạt doanh số bán hàng hàng tháng là cao.
 - + Mức lương thứ hai là 8 triệu đồng/tháng và xác suất để anh Vinh được nhận mức lương này là 0,5. Mức lương này không có điều kiện đòi hỏi gì.
 - Đối với công việc B :
 - + Mức lương thứ nhất là 12 triệu đồng/tháng và xác suất để anh Vinh được nhận mức lương này là 0,8. Mức lương này không có điều kiện đòi hỏi gì.
 - + Mức lương thứ hai là 17 triệu đồng/tháng và xác suất để anh Vinh được nhận mức lương này là 0,2. Tuy nhiên, mức lương này có điều kiện đòi hỏi anh Vinh phải làm việc ngày 9 tiếng.
- Gọi X là mức lương mà doanh nghiệp có thể trả cho anh Vinh đối với công việc A . Gọi Y là mức lương mà doanh nghiệp có thể trả cho anh Vinh đối với công việc B .
- a) Lập bảng phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y .
- b) Hãy tính mức lương trung bình mà doanh nghiệp đưa ra đối với công việc A và đối với công việc B .
- c) Giả sử $V(X), V(Y)$ lần lượt đo mức độ rủi ro đối với mức lương mà doanh nghiệp đưa ra cho công việc A và cho công việc B . Mức độ rủi ro đối với mức lương của công việc nào là cao hơn?

3. Giả sử X, Y (đơn vị: triệu đồng) là hai biến ngẫu nhiên rời rạc lần lượt chỉ lợi nhuận thu được (tính trên 1 tỉ đồng vốn đầu tư) vào dự án thứ nhất, dự án thứ hai. Dưới đây là bảng phân bố xác suất tương ứng của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X, Y .

X	-200	-100	200	400
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Y	-200	-100	100	300
P	0,2	0,1	0,2	0,5

Việc đầu tư gặp rủi ro khi bị lỗ, tức là lợi nhuận thu được là âm.

Dựa trên hai tiêu chí ưu tiên là trung bình lợi nhuận cao và mức độ rủi ro thấp, nếu bạn là nhà đầu tư, bạn nên chọn dự án nào?

4. Một người muốn mua cổ phiếu A với kì vọng sau 1 năm nhận cổ tức 2 000 đồng/1 cổ phiếu, bán được với giá 40 000 đồng/1 cổ phiếu và tỉ suất lợi nhuận yêu cầu là 9%. Hãy tính “ngưỡng an toàn” đối với giá trị hiện tại của cổ phiếu A để người mua có thể đạt được kì vọng của mình khi đầu tư vào cổ phiếu đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
5. Một người muốn nắm giữ cổ phiếu A với cổ tức kì vọng ở năm thứ nhất: 2 000 đồng/1 cổ phiếu, ở năm thứ hai: 2 500 đồng/1 cổ phiếu, ở năm thứ ba: 3 000 đồng/1 cổ phiếu, ở năm thứ tư: 3 500 đồng/1 cổ phiếu và giá bán kì vọng ở năm thứ tư là 95 000 đồng/1 cổ phiếu, tỉ suất lợi nhuận yêu cầu là 9%. Hãy tính “ngưỡng an toàn” đối với giá trị hiện tại của cổ phiếu A để người mua có thể đạt được kì vọng của mình khi đầu tư vào cổ phiếu đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
6. Gia đình anh Dũng dự kiến các khoản mục chi tiêu của gia đình như sau:

Khoản chi tiêu	Tỉ lệ (%)
Chi cho học tập của các con, dịch vụ y tế và chăm sóc sức khỏe	5
Chi cho các nhu cầu thiết yếu	50
Mua sắm cá nhân	40
Tiết kiệm	5

Theo em, việc lập kế hoạch tài chính cá nhân của gia đình anh Dũng có hợp lí không? Mỗi khoản mục chi tiêu của gia đình anh Dũng nên chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm là hợp lí? Sau đó, vẽ biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn tỉ lệ các khoản mục chi tiêu do em đề xuất.



Về mã SWIFT của các ngân hàng

Trong thời đại chuyển đổi số, giao dịch tài chính qua hệ thống ngân hàng nhằm hạn chế sử dụng tiền mặt ngày càng phổ biến ở nước ta và các nước trên thế giới.

Hiệp hội viễn thông tài chính và liên ngân hàng toàn cầu (tiếng Anh là: Society for Worldwide Interbank and Financial Telecommunication, viết tắt: SWIFT) cung cấp một mạng lưới cho phép các tổ chức tài chính trên toàn thế giới gửi và nhận thông tin về các giao dịch tài chính trong một môi trường an toàn, tiêu chuẩn và đáng tin cậy. Tổ chức này được thành lập ngày 3/5/1973 tại Bỉ với sự tham gia của 239 ngân hàng ở 15 nước và tính đến cuối tháng 1/2023, có hơn 11 000 tổ chức tài chính ở trên 200 quốc gia, vùng lãnh thổ kết nối với SWIFT. SWIFT giúp thương mại quốc tế, thanh toán xuyên biên giới và chuyển tiền quốc tế trở nên dễ dàng hơn.

Mỗi ngân hàng tham gia vào SWIFT đều được xác định bởi một địa chỉ BIC cụ thể (tiếng Anh là: Bank Identifier Code, viết tắt: BIC, hay còn gọi là mã SWIFT code). Thông qua địa chỉ này, các ngân hàng có thể trao đổi nghiệp vụ thanh toán quốc tế và các dịch vụ khác do SWIFT cung cấp.

Địa chỉ BIC có hai loại: loại 8 kí tự dùng cho các ngân hàng độc lập và loại 11 kí tự dùng cho các chi nhánh. Ngoài ra, không có loại nào khác.

Chẳng hạn, đối với Ngân hàng Ngoại Thương Việt Nam (Vietcombank), mã SWIFT có cấu trúc như sau:

BFTV	VN	VX	XXX
Mã ngân hàng	Mã quốc gia	Mã địa điểm	Mã chi nhánh

Ví dụ cụ thể:

- Mã BIC (hay mã SWIFT code) của Hội Sở Ngân hàng Vietcombank (tại 198 phố Trần Quang Khải, Hà Nội) là BFTV VN VX.
- Mã BIC (hay mã SWIFT code) của Ngân hàng Vietcombank, chi nhánh Ba Đình, Hà Nội (tại 39 Đào Tấn, Ba Đình, Hà Nội) là BFTV VNVX061.

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
bài toán quy hoạch tuyến tính	bài toán tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của hàm mục tiêu	21
biến ngẫu nhiên rời rạc	hàm số xác định trên tập hợp Ω (Ω là không gian mẫu có hữu hạn phần tử trong phép thử T), nhận giá trị bằng số thuộc một tập hợp hữu hạn nào đó và mỗi giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được	6
chỉ số giá tiêu dùng	chỉ số được tính từ giá cả của giỏ hàng hoá và dịch vụ mà một người tiêu dùng mua	43
chứng khoán	chứng tử có giá trị dài hạn xác nhận sở hữu hợp pháp của người sở hữu với tài sản của doanh nghiệp hoặc tổ chức phát hành	60
cho vay	hình thức cấp tín dụng, theo đó tổ chức tín dụng giao cho khách hàng sử dụng một khoản tiền để sử dụng vào mục đích và thời gian nhất định theo thoả thuận với nguyên tắc có hoàn trả cả gốc và lãi	53
đầu tư tài chính	việc mua một tài sản tài chính với hi vọng rằng nó sẽ tạo ra thu nhập hoặc đánh giá cao trong tương lai và được bán với giá cao hơn	59
lãi suất tín dụng	tỉ lệ phần trăm tính theo một kì hạn xác định, dựa theo đó để tính toán lợi tức mà người đi vay phải trả cho bên cho vay	53
lạm phát	hiện tượng tăng giá liên tục của hàng hoá, dịch vụ dẫn đến giảm sức mua của đồng tiền	42
thị trường chứng khoán	nơi diễn ra các giao dịch mua bán trao đổi các loại chứng khoán	60
tỉ suất cổ tức	tỉ suất sinh lợi mà người mua có thể nhận được từ cổ tức nếu mua cổ phiếu ở mức giá hiện tại	66
tiền tệ	phương tiện trao đổi hàng hoá và dịch vụ được chấp nhận thanh toán trong một khu vực nhất định hoặc giữa một nhóm người cụ thể	39
tín dụng	việc chuyển giao một lượng tài sản (có thể là hàng hoá hoặc tiền, chủ yếu là tiền) dựa trên cơ sở tín nhiệm và theo nguyên tắc hoàn trả	52

BẢNG TRA CỬU TỪ NGỮ

	TỪ NGỮ	TRANG		TỪ NGỮ	TRANG
B	bài toán quy hoạch tuyến tính	21	K	kế hoạch tài chính cá nhân	68
	bảng phân bố xác suất	7		kì vọng	9
	bảng sao kê thẻ tín dụng	48		kiểm soát rủi ro trong đầu tư chứng khoán	66
	biến ngẫu nhiên rời rạc	6	L	lãi suất thẻ	50
C	chỉ số giá tiêu dùng	43		lãi suất tín dụng	53
	cho vay	53		lạm phát	42
	chu kì sao kê	48	G	ngày sao kê	48
	cổ phiếu	60		phát sinh có trong kì	49
	cổ tức	61		phát sinh nợ trong kì	49
	công thức Bernoulli	15	P	phân bố Bernoulli	13
D	dư nợ cuối kì	49		phân bố nhị thức	16
	dư nợ kì trước	48		phép thử lặp	14
Đ	đầu tư tài chính	59	R	rủi ro khi đầu tư tài chính	63
	độ lệch chuẩn	10	T	tỉ suất cổ tức	66
G	giá trung bình của cổ phiếu	60		tiền tệ	39
H	hàm mục tiêu	21		tín dụng	52

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:
CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập viên:

LÊ HUY ĐẠM

Thiết kế sách:

ĐÌNH THỊ BÌNH

Trình bày bìa:

TRẦN TIỂU LÂM – NGUYỄN MẠNH HÙNG

Sửa bản in:

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 12

Mã số:

ISBN

In cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại

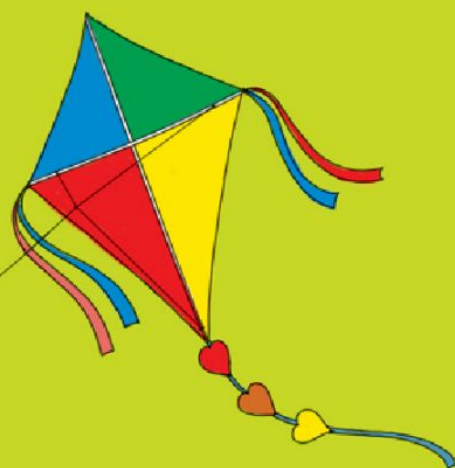
Địa chỉ:

Số xác nhận đăng ký xuất bản:

Quyết định xuất bản số:

In xong và nộp lưu chiểu tháng năm 20.....

Mang cuộc sống vào bài học Đưa bài học vào cuộc sống



*S*ách Toán 12 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 12, thuộc bộ sách giáo khoa “Cánh Diều”, thực hiện theo “Chương trình Giáo dục phổ thông 2018”.

Sách gồm hai tập và chuyên để học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.



SỬ DỤNG
TEM CHỐNG GIẢ

1. Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: www.hoc10.com
2. Vào mục Hướng dẫn (www.hoc10.com/huong-dan) để kiểm tra sách giả và xem hướng dẫn kích hoạt sử dụng học liệu điện tử.