

Người làm: Nguyễn Thị Thu  
Zalo: Nguyễn Thị Thu- số dt zalo: 0393588422  
Email: thuhienkhai@gmail.com

## CD6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

### Dạng 1. Chứng minh một số(một tổng) là số chính phương

#### A. Trắc nghiệm (không có)

#### B. Tự luận

#### Câu 1. (HSG 7 huyện Vũ Thư, tỉnh Thái Bình, 2022- 2023)

Cho đa thức:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Biết  $a, b, c$  là các số nguyên và  $2a + b = 0$ . Chứng minh rằng:  $f(5) \cdot f(-3)$  là số chính phương.

#### Lời giải

Vì  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , nên:

$$f(5) = 25a + 5b + c$$

$$f(-3) = 9a - 3b + c \quad (1)$$

$$\text{Mà: } 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a \quad (2)$$

$$f(5) = 15a + c$$

$$f(-3) = 15a + c$$

Do đó:  $f(5) \cdot f(-3) = (15a + c)^2$  là số chính phương (vì  $a, c$  đều là số nguyên)

### Dạng 2. Chứng minh một số không phải là số chính phương

### Dạng 3. Tìm số chính phương

#### Câu 1. (HSG 7 huyện Lâm Thao, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên  $m$  để  $(m+1)(m^2 + 2m)$  là một số chính phương.

#### Lời giải

Ta có  $(m+1)(m^2 + 2m)$  là một số chính phương.

$$(m+1)(m^2 + 2m) = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra

$$\text{Vì } k^2 \geq 0 \Rightarrow (m+1)(m^2 + 2m) \geq 0$$

$$\text{Với } m < -2 \Rightarrow (m+1)(m^2 + 2m) < 0 \quad (\text{loại})$$

$$\text{Với } m \in [-2; -1; 0] \text{ ta đều có } k^2 = 0 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Với  $m > 0$  ta có  $k^2 = (m+1)(m^2 + 2m)$

Gọi  $d$  là một ước chung nguyên tố của  $m+1$  và  $m^2 + 2m$

$$\begin{cases} m+1;d \\ m^2+2m;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1;d \\ m;d \end{cases} \Rightarrow 1;d \Rightarrow d=1$$

Suy ra

Nên  $(m+1)(m^2 + 2m)$  là một số chính phương khi  $m+1$  và  $m^2 + 2m$  đều là số chính phương.

Để  $m^2 + 2m$  là số chính phương thì  $m^2 + 2m = a^2 \ (a \in \mathbb{Z})$ .

Suy ra  $(m+1)^2 - 1 = a^2 \Rightarrow (m+1+a)(m+1-a) = 1 \Rightarrow m+1+a = m+1-a \Rightarrow a=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy  $m \in \{-2; -1; 0\}$  thì  $(m+1)(m^2 + 2m)$  là một số chính phương.

## Câu 2. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh, trường, 2022 - 2023)

Cho  $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ . Tìm số tự nhiên  $x$  lớn nhất sao cho  $A$  là số chính phương.

### Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên  $x$  để  $A$  là số chính phương.

\* Xét  $x \geq 27$ :

Ta có:  $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^{27} (1 + 4^{973} + 4^{x-27})$

$$= (2^2)^{27} \left[ (2^{x-27})^2 + 2 \cdot 2^{x-27} \cdot 1 + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$= (2^2)^{27} \left[ (2^{x-27})^2 + 2^{x-27} + 2^{x-27} + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$= (2^2)^{27} \left[ 2^{x-27} (2^{x-27} + 1) + (2^{x-27} + 1) + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$= (2^{27})^2 \left[ (2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

Ta có:  $(2^{27})^2$  là số chính phương.

Với  $x \geq 27$  và  $x \in \mathbb{N}$  thì  $1 + 4^{973} + 4^{x-27} \in \mathbb{N}$  nên để  $A$  là một số chính phương thì

$B = (2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27}$  cũng là một số chính phương

$$\Rightarrow B \geq 0 \text{ mà } (2^{x-27} + 1)^2 \geq 0 \text{ nên } 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^{1946} - 2^{x-26} \geq 0$$

$$\Rightarrow x - 26 \leq 1946$$

$$\Rightarrow x \leq 1972$$

Kết hợp với điều kiện ta có:  $27 \leq x \leq 1972$

Vì  $x$  là số tự nhiên lớn nhất nên  $x = 1972$ .

Thay  $x = 1972$  vào  $A$  ta được  $A = \left[ 2^{27} \cdot (2^{1945} + 1) \right]^2$  là số chính phương (1)

\*Xét  $0 \leq x < 27$ :

Giả sử tồn tại  $x$  thỏa mãn  $0 \leq x < 27$  để  $A$  là số chính phương

$$\begin{aligned} A &= 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^x (4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1) \\ &= (2^2)^x \left[ (2^{27-x})^2 + 2 \cdot 2^{27-x} \cdot 1 + 1 + (2^2)^{1000-x} - 2 \cdot 2^{27-x} \right] \\ &= (2^x)^2 \left[ (2^{27-x})^2 + 2^{27-x} + 2^{27-x} + 1 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \right] \\ &= (2^x)^2 \left[ (2^{27-x} + 1)^2 + (2^{2000-2x} - 2^{28-x}) \right] \end{aligned}$$

Ta có:  $(2^x)^2$  là số chính phương.

Với  $0 \leq x < 27$  và  $x \in \mathbb{N}$  thì  $4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1 \in \mathbb{N}$

Nên để  $A$  là một số chính phương thì  $C = (2^{27-x} + 1)^2 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x}$  cũng là một số chính phương

$$\begin{aligned} \Rightarrow C \geq 0 \text{ mà } (2^{27-x} + 1)^2 &\geq 0 \text{ nên} \\ \Rightarrow 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \geq 0 &\Rightarrow 2000 - 2x \geq 28 - x \Rightarrow x \leq 1972 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $x = 1972$  là số lớn nhất để  $A$  là số chính phương.

### Câu 3. (HSG 7 thị xã Bình Long, 2022 - 2023)

Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

#### Lời giải

Gọi số chính phương có 4 chữ số, biết 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau cần tìm là  $\overline{aabb}$  ( $1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$ )

Vì  $\overline{aabb}$  là số chính phương nên:  $\overline{aabb} = n^2$ .

Ta có:  $n^2 = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b) \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n : 11$

Mà  $999 < n^2 < 10000 \Rightarrow 31 < n < 100$ . Do  $n : 11$  nên  $n \in \{33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$

Thử trực tiếp chỉ có  $n = 88 \Rightarrow n^2 = 88^2 = 7744$ .

Vậy số cần tìm là 7744.

(Hết)

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com  
<https://www.vnteach.com>