ĐỀ SỐ 24

ĐỀ HSG TOÁN 9 THANH HÓA 2023-2024

Câu 1. (4, 0 điểm)

1. Cho biểu thức $P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0$.

Rút gọn biểu thức P và tìm các giá trị của x để biểu thức P có giá trị là số tự nhiên.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời $a^2+2=b^4;b^2+2=c^4;c^2+2=a^4$.

Tính giá trị biểu thức $B=a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+2022$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $4x^3+13x^2-14x=3-\sqrt{15x+9}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3xy^2+49=0 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên (m, p, q) thỏa mãn: $2^m.p^2+1=q^5$ trong đó

$m>0;p,q$là hai số nguyên tố.

2. Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn a khác b và ab(a +b) chia hết cho a^2+ab+b^2.

Chứng minh rằng $|a-b|>\sqrt[2]{ab}$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn O bán kính R. Đường tròn tâm I đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Các tia BN và CM cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm của IH và MN. Qua I kẻ đường thẳng song song với MN cắt các đường thẳng CM và BN lần lượt ở E và Q.

1, Chứng minh tam giác ANM đồng dạng với tam giác ABC và $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}$.

2. Chứng minh IQ.IE = IC^2 và $\frac{KN}{KM}=\left(\frac{HN}{HM}\right)^2$.

3. Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AD.BN}+\frac{1}{BN.CM}+\frac{1}{CM.AD}\leq\frac{4}{3(R-OH)^2}.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho ba số a, b, c ≥ 1 thỏa mãn $16abc+4(ab+bc+ca)=81+24(a+b+c)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức$Q=\frac{1}{a(\sqrt{a^2-1}+a)}+\frac{1}{b(\sqrt{b^2-1}+b)}+\frac{1}{c(\sqrt{c^2-1}+c)}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x\geq 0$

Rút gọn biểu thức P và tìm các giá tgrij x để biểu thức P có giá trị là số tự nhiên.

Điều kiện $x\geq 0$. Ta có:

$$P=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)+\frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$$

¿ $\frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{9\sqrt{x}+14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

¿ $\frac{2x+11\sqrt{x}+14}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(2\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\left(2\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$

Vậy $P=\frac{\left(2\sqrt{x}+7\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}\,với\,x\geq 0$

Ta có $P=\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)+5}{\left(\sqrt{x}+1\right)}=2+\frac{5}{\sqrt{x}+1}\,vì\,x\geq 0$ nên $0<\frac{5}{\sqrt{x}+1}\leq 5\,suy\,ra\,2<P\leq 7$

Do P $\in N\,nên\,P\in\{3;4;5;6;7\}\Leftrightarrow\frac{5}{\sqrt{x}+1}\in\{1;2;3;4;5\}\Leftrightarrow\sqrt{x}+1\in\left\{5;\frac{5}{2};\frac{5}{3};\frac{5}{4};1\right\}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}\in\left\{4;\frac{3}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{4};0\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$.

Kết hợp với điều kiện ta thấy $x\in\left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$ là giá trị cần tìm.

Vậy để P có giá trị là số tự nhiên thì $x\in\left\{16;\frac{9}{4};\frac{4}{9};\frac{1}{16};0\right\}$.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời $a^2+2=b^4;b^2+2=c^4;c^2+2=a^4$.

Tính giá trị biểu thức $B=a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+2022$.

Từ giả thiết ta suy ra: $\begin{cases}a^2+1=b^4-1=(b^2-1)(b^2+1)\\ b^2+1=c^4-1=(c^2-1)(c^2+1)\\ c^2+1=a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)\end{cases}$

Nhân vế với vế 3 đẳng thức trên với nhau ta được:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)=(b^2-1)(c^2-1)(a^2-1)(b^2+1)(c^2+1)(a^2+1)$$

Do $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)>0\, nên \left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)\left(a^2-1\right)=1$

Khai triển ta được

$a^2b^2c^2-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+a^2+b^2+c^2-1=1 \Leftrightarrow a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)=2.$

Vậy B = 2 + 2022 = 2024

Câu 2. (4,0 điểm)

1.Giải phương trình: $4x^3+13x^2-14x=3-\sqrt{15x+9}$

ĐKXĐ: $x\geq -\frac{3}{5}$.

Pt đã cho $4x^3+13x^2-14x-3+\sqrt{15x+9}$ = 0

$\Leftrightarrow 4x^3+13x^2-12x-(2x+3)+\sqrt{15x+9}=0$

$\Leftrightarrow (4x^2-3x)(x+4)-\left[(2x+3)-\sqrt{15x+9}\right]=0$

$\Leftrightarrow (4x^2-3x)(x+4)-\frac{(2x+3)^2-(15x+9)}{(2x+3)+\sqrt{15x+9}}=0$

$\Leftrightarrow (4x^2-3x)\left(x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(4x^2-3x)=0(1)\\ x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0(2)\end{array}\right.$

-Pt (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{3}{4}\end{array}\right.(\text{đều thỏa mãn ĐKXĐ})$

Xét pt (2): $+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}=0$

Vì $x\geq -\frac{3}{5}\Rightarrow x+4\geq \frac{17}{5}\, và\, 2x+3+\sqrt{15x+9}\geq \frac{9}{5}\Rightarrow \frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}\leq \frac{5}{9}$

Suy ra $x+4-\frac{1}{2x+3+\sqrt{15x+9}}\geq \frac{128}{45}>0$ nên pt (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{o;\frac{3}{4}\right\}$.

2. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l}x^3+3xy^2+49=0\\ x^2-8xy+y^2=8y-17x\end{array}\right.$

Nhân hai vế của phương trình (2) với 3, rồi cộng với phương trình (1) vế theo vế ta được pt: $x^3+3xy^2+3x^2-24xy+3y^2+49=24y-51x$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+3y^2(x+1)-24y(x+1)+48(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3y^2-24y+48\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^4+48\right]=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ (x+1)^2+3(y-4)^2=0 \end{cases}$

TH1: $\begin{cases} x=-1 \\ x^3+3xy^2=-49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y=4; y=-4 \end{matrix}$

TH2: $\begin{cases} (x+1)^2+3(y-4)^2=0 \\ x^3+3xy^2=-49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y=4 \end{matrix}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x,y) $\in \{(-1;4),(-1;-4)\}$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên (m,p,q) thỏa mãn: $2^m.p^2+1=q^5$ trong đó $m>0; p,q$ là hai số nguyên tố.

Vì $m>0$ và p nguyên tố nên $2^m.p^2+1$ lẻ $\Rightarrow q$ *lẻ*

Nếu p = 2 thì $2^{m+2}+1=q^5 \Leftrightarrow (q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)=2^{m+2}$

Vì q lẻ $\Rightarrow q^4+q^3+q^2+q+1$ lẻ lớn hơn 1 $\Rightarrow 2^{m+2}$ có ước lẻ lớn hơn 1, vô lý.

Do đó p lẻ

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng $(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)=2^m.p^2$

Do $q^4+q^3+q^2+q+1$ lẻ và lớn hơn 1 nên $q^4+q^3+q^2+q+1=p$

hoặc $q^4+q^3+q^2+q+1=p^2$

+ Xét trường hợp $q^4+q^3+q^2+q+1=p \Rightarrow q-1=2^m.p$. Do $2^m.p>p$ *nên* $q-1>q^4+q^3+q^2+q+1$ (vô lý)

+ Xét trường hợp

$q^4+q^3+q^2+q+1=p^2 \Rightarrow 4q^4+4q^3+q^2<4p^2=4q^4+4q^3+4q^2+4q+4$

¿ $4q^4+4q^3+9q^2+4q+4 \Rightarrow (2q^2+q)^2<4p^2<(2q^2+q+2)^2$. Từ đó suy ra

$4p^2=(2q^2+q+1)^2$. Ta được phương trình 4($q^4+q^3+q^2+q+1)=(2q^2+q+1)^2 \Leftrightarrow q^2-2q-3=0$, mà q nguyên tố, suy ra q = 3, từ đó tìm được p = 11; m = 1. Vậy ta có bộ ba số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là: (m,p,q) = (1;11;3).

2. Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn a khác b và ab(a +b) chia hết cho a^2+ab+b^2.

Chứng minh rằng $|a-b|>\sqrt[2]{ab}$.

Đặt d = UCLN(a,b) suy ra a = xd, b = yd với UCLN(x,y) = 1 khi đó:

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}=\frac{dxy(x+y)}{x^2+xy+y^2}\in Z$$

Ta có UCLN$(x^2+xy+y^2;x)=UCLN(y^2;x)=1$

Tương tự UCLN$(x^2+xy+y^2;y)=1$

Đặt d' = UCLN$(x+y,x^2+xy+y^2)$

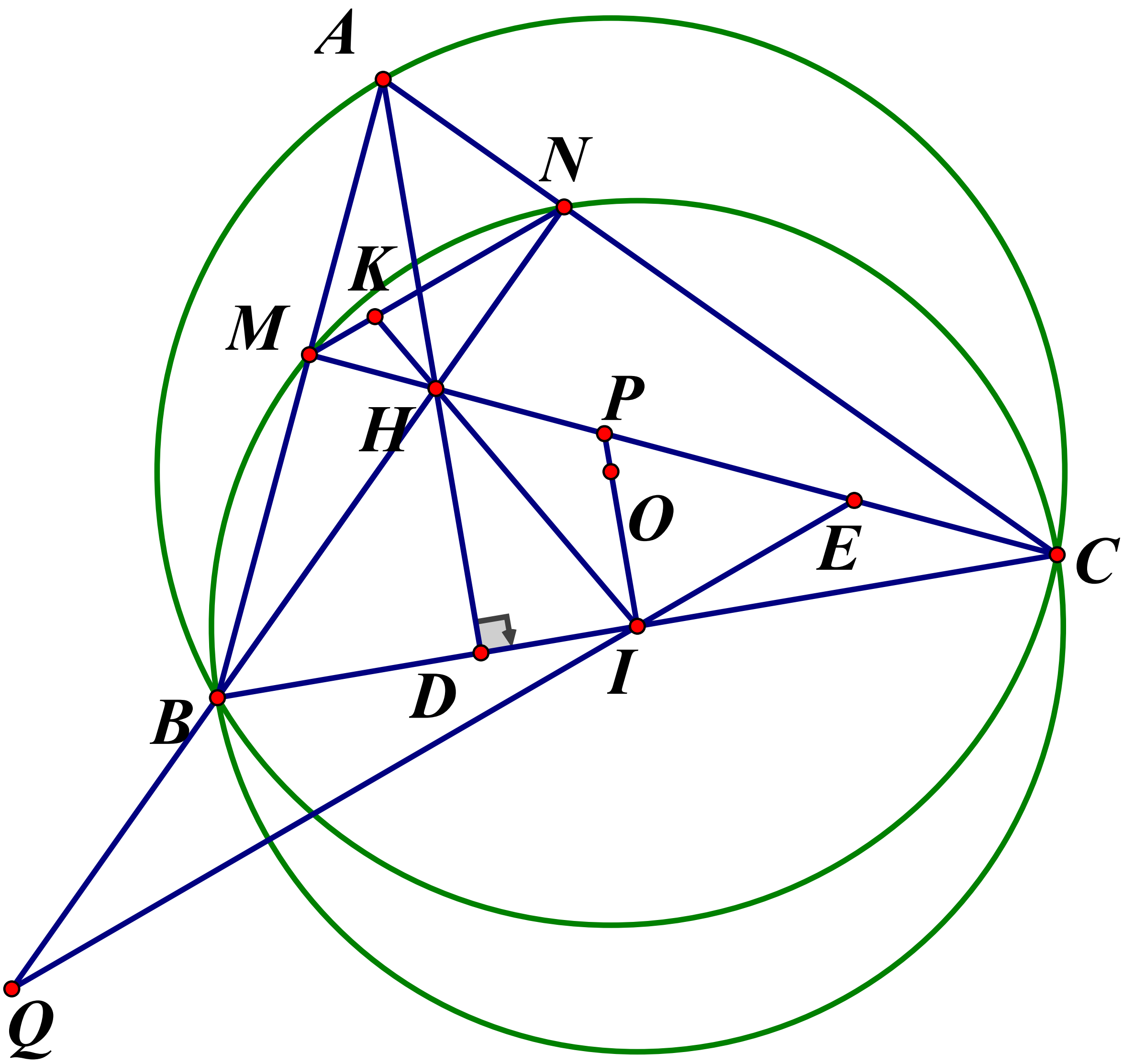
$$\Rightarrow\begin{cases}x+y\,\vdots\,d'\\x^2+xy+y^2\,\vdots\,d'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x^2+xy+y^2)-x(x+y)\,\vdots\,d'\\(x^2+xy+y^2)-y(x+y)\,\vdots\,d'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\,\vdots\,d'\\y^2\,\vdots\,d'\end{cases}\Rightarrow d'=1$$

Do đó $d:x^2+xy+y^2\Rightarrow d\geq x^2+xy+y^2$

Mặt khác $|a-b|^3=d^3|x-y|^3=d^2|x-y|^3.d\geq d^2.1(x^2+xy+y^2)>d^2.xy=ab.$

Vậy $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$

Câu 4. (6,0 điểm)



1. Chứng minh ΔANM đồng dạng với ΔABC và $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}$.

Ta có: $\Delta ANM\sim\Delta AMC\,(g.g)\Rightarrow\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{AB}{AC}$

Xét ΔANM và ΔABC có:

$\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{AB}{AC}$; $\widehat{A}$ là góc chung

$\Rightarrow\Delta ANM\sim\Delta ABC\,(c.g.c)\,(đpcm)$

Vì $\Delta ANM\sim\Delta ABC\Rightarrow\widehat{ANM}=\widehat{ABC}$

Mà $\widehat{ANM}+\widehat{MNB}=\widehat{ABC}+\widehat{MCB}=90°$ (Do BN
$\perp AC\,;CM\perp AB)\Rightarrow\widehat{MNB}=\widehat{MCB}$ mà $\widehat{MNB}=\widehat{BQI}$ (2 góc so le trong)

$\Rightarrow\widehat{BQI}=\widehat{MCB}$ hay $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}$ (đpcm)

2. Chứng minh IQ.IE = IC^2 và $\frac{KN}{KM}=\left(\frac{HN}{HM}\right)^2$.

Theo câu a, $\widehat{BQI}=\widehat{ECI}$ lại có $\widehat{BIQ}=\widehat{EIC}$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta BIQ \sim \Delta EIC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{IQ}{IC}=\frac{IB}{IE} \Rightarrow IQ\,.\,IE=IC\,.\,IB\; mà\; IB=IC\,(¿) \Rightarrow IQ\,.\,IE=IC^2$

$\Rightarrow \frac{IQ}{IE}=\left(\frac{IC}{IE}\right)^2$(1)

Áp dụng ệ quả Ta – Lét ta có: $\frac{KN}{IQ}=\frac{HK}{HI}=\frac{KM}{IE} \Rightarrow \frac{KN}{KM}=\frac{IQ}{IE}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{KN}{KM}=\left(\frac{IC}{IE}\right)^2$

Trên cạnh EM lấy P sao cho IP = IE(P≠ E) $\Rightarrow \Delta IPE\; cân\, tại\; I \Rightarrow \widehat{IPC}=\widehat{IEP}$

Mà $\widehat{IEP}=\widehat{HNM}$(2 góc so le trong, MN//EQ) $\Rightarrow \widehat{HMN}=\widehat{IPE}\; hay \Rightarrow \widehat{HMN}=\widehat{IPC}$

Lại có: $\widehat{HNM}=\widehat{ICP} \Rightarrow IP=IE$ (cách lấy điểm P) $\Rightarrow \frac{IC}{IE}=\frac{HN}{HM}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{KN}{KM}=\left(\frac{HN}{HM}\right)^2$ (đpcm)

3. Gọi D là giao điểm của AH với BC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AD\,.\,BN}+\frac{1}{BN\,.\,CM}+\frac{1}{CM\,.\,AD}\leq\frac{4}{3(R-OH)^2}$$

Vì BN $\perp AC\,; CM \perp AB$; $\{H\}=BN\cap CM \Rightarrow H$ là trực tâm ΔABC

$\Rightarrow$AH $\perp BC\; hay\; AD\perp BC$

Do đó ta có: $\frac{HD}{AD}+\frac{HN}{BN}+\frac{HM}{CM}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{H_{ABC}}=1$

$\Rightarrow \frac{AD-HD}{AD}+\frac{BN-BH}{BN}+\frac{CM-CH}{CM}=1 \Leftrightarrow \frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BN}+\frac{CH}{CM}=2$

Do H là trực tân ΔABC nhọn nên H nằm trong ΔABC

$\Rightarrow \begin{cases} AH\geq AO-OH=R-OH>0 \\ BH\geq BO-OH=R-OH>0 \\ CH\geq CO-OH=R-OH>0 \end{cases}$ **(BĐT ba điểm)**

$\Rightarrow 2=\frac{AH}{AD}+\frac{BH}{BN}+\frac{CH}{CM}\geq(R-OH)\left(\frac{1}{AD}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}\right)\Rightarrow\frac{1}{AD}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}\leq\frac{2}{R-OH}$ (5)

Với mọi x, y ta có: $(x+1)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy$

Chứng minh tương tự: $y^2+z^2\geq 2yz\,; z^2+x^2\geq 2zy$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được:

$2\left(x^2+xy+y^2\right)\geq 2\left(xy+z+zx\right) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)^2\geq 3\left(xy+yz+zx\right)$

Áp dụng BĐT trên với $x=\frac{1}{AD}; y=\frac{1}{BN}; z=\frac{1}{CM}$ ta suy ra được:

$$\left(\frac{1}{AD}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}\right)^2\geq 3\left(\frac{1}{AD.BN}+\frac{1}{BN.CM}+\frac{1}{CM.AD}\right)\leq\frac{4}{3\left(R-OH\right)^2} \text{ (npcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" của các bất đẳng thức trên đồng thời xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Câu 5. (2,0 điểm)

Ta có:

$$Q=\frac{\sqrt{a^2-1}-a}{a\left(a^2-1-a^2\right)}+\frac{\sqrt{b^2-1}-b}{b\left(b^2-1-b^2\right)}+\frac{\sqrt{c^2-1}-c}{c\left(c^2-1-c^2\right)}$$

$$¿\frac{\sqrt{a^2-1}-a}{-a}+\frac{\sqrt{b^2-1}-b}{-b}+\frac{\sqrt{c^2-1}-c}{-c}$$

$$¿3-\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}\right)$$

$Q-3=-\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}\right)=-P$. Với $P=\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}\right)$

sử dụng bất đẳng thức: Với x,y,z ≥ 0, ta luôn có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{3\left(x+y+z\right)}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y = z.

Từ bất đẳng thức đã cho ta có:

Suy ra

$$P=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{c^2}}\leq\sqrt{3\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right]}=\sqrt{9-3\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right]}$$

$$P\leq\sqrt{9-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

Từ giả thiết 16abc +4(ab+bc+ca) = 81 +24(a+b+c)

$$\Leftrightarrow 16=\frac{18}{abc}+24\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-4\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \text{ (*)}$$

Ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$ và $\frac{1}{abc}\le\frac{1}{21}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Đặt $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};0<t\le3$ (Vì a, b, c ≥1). Từ (*) ta có

$16\le3t^3+8t^2-4t\Leftrightarrow3t^3+8t^2-4t-16\ge0\Leftrightarrow(3t-4)(t+2)^2\ge0\Leftrightarrow t\ge\frac{4}{3}$ (Vì $0<t\le3$)

Suy ra $P\le\sqrt{9-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}\le\sqrt{9-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{3}\Rightarrow Q-3=-P\ge-\frac{\sqrt{65}}{3}\Leftrightarrow Q\ge\frac{9-\sqrt{65}}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}16abc+4(ab+bc+ca)=81+24(a+b+c)\\ a=b=c\\ a,b,c\ge1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{9-\sqrt{65}}{3}$ khi a = b = c = $\frac{9}{4}$