|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG ARCHIMEDES ACADEMY**  *(Đề thi gồm 02 trang)*  **Đề số 19** | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9**  **NĂM HỌC: 2020 – 2021**  **Môn: Toán 9**  *Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)* |

1. *(5,0 điểm)*

a) Cho đa thức có nghiệm thực .

i) Hỏi, có tồn tại không số thực  khác  thỏa mãn 

ii) Xét đa thức  có nghiệm thực .Chứng minh rằng 

(Học sinh không cần chứng minh hai đa thức và có nghiệm thực trong bài làm. Tuy nhiên sẽ có điểm thưởng cho bạn nào chứng minh được điều này)

b) Tồn tại không các số thực dương  thỏa mãn  và

1. 
2. *(5,0 điểm)*
3. Cho số nguyên dương thỏa mãn  là tích của hai số nguyên dương liên tiếp. Chứng minh rằng  chia 3 dư 1 và  là một số chính phương.
4. Tìm tất cả các số nguyên tố  thỏa mãn là số chính phương
5. Có tồn tại không một lũy thừa của sao cho khi viết lại các chữ số của nó theo một thứ tự thích hợp ( nhưng chữ số không được viết ở đầu ), ta thu được một lũy thừa khác của ?
6. *( 3 điểm)*

a) Cho ba số thực dương , , . Chứng minh rằng

.

b) Xét các số thực , ,  thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

.

1. *(6 điểm)*

Cho tam giác  vuông tại  , có đường cao  . Gọi  là trung điểm của đoạn ,  là trung điểm của đoạn  và  là hình chiếu vuông góc của điểm  trên đường thẳng . Các đường thẳng  và  cắt nhau tại điểm . Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và .

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng  và  vuông góc với nhau.

b) Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Trên đoạn  lấy điểm  sao cho . Chứng minh rằng .

c) Gọi  là điểm đối xứng với điểm  qua điểm . Qua điểm , kẻ đường thẳng song song với đường thẳng  tại điểm . Gọi  là trung điểm của đoạn . Các đường thẳng  và  cắt nhau tại điểm . Chứng minh rằng hai đường thẳng  và  vuông góc với nhau.

1. *(1 điểm)*

Cho bảng ô vuông . Người ta điền các số nguyên dương từ đến  vào mỗi ô vuông của bảng, mỗi ô một số và không có hai ô nào điền số giống nhau. Ở mỗi hàng, người ta chọn ra số lớn thứ tư được điền vào ô vuông của hàng đó. Gọi là tổng của số được chọn ra. Chứng minh rằng tồn tại một hàng nào đó có tổng tất cả các số được điền vào các ô vuông của hàng đó nhỏ hơn .

🙢 **HẾT** 🙠

**HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9**

1. *(5,0 điểm)*

a) Cho đa thức có nghiệm thực .

i) Hỏi, có tồn tại không số thực  khác  thỏa mãn 

ii) Xét đa thức  có nghiệm thực .Chứng minh rằng 

(Học sinh không cần chứng minh hai đa thức và có nghiệm thực trong bài làm. Tuy nhiên sẽ có điểm thưởng cho bạn nào chứng minh được điều này)

b) Tồn tại không các số thực dương  thỏa mãn  và



**Lời giải**

***a) Cho đa thức có nghiệm thực .***

***i) Hỏi, có tồn tại không số thực  khác  thỏa mãn ***

Giả sử tồn tại  sao cho  mà  nên 

 (vô lý) . Suy ra không tồn tại  thỏa mãn bài toán.

***ii) Xét đa thức  có nghiệm thực .Chứng minh rằng ***

Theo giả thiết:

Có  là nghiệm của 

Có  là nghiệm của ******









Suy ra ,  là hai nghiệm của  và  .

***b) Tồn tại không các số thực dương  thỏa mãn  và***

******

Ta xem  là phương trình bậc hai với ẩn là .

Giả sử phương trình  có nghiệm .

Ta có 



Có .

Đặt , .

 trở thành:  (vô lý).

Vậy không tồn tại các số thực dương  thỏa mãn  và thỏa ****.**

1. *(5,0 điểm)*
2. Cho số nguyên dương  thỏa mãn  là tích của hai số nguyên dương liên tiếp. Chứng minh rằng  chia 3 dư 1 và  là một số chính phương.
3. Tìm tất cả các số nguyên tố  thỏa mãn là số chính phương
4. Có tồn tại không một lũy thừa của sao cho khi viết lại các chữ số của nó theo một thứ tự thích hợp ( nhưng chữ số không được viết ở đầu ), ta thu được một lũy thừa khác của ?

**Lời giải**

a) Ta có 

TH1:  vì   ( vô lý)

TH2:  vì  là số chính phương.

b) Theo bài là các số nguyên tố và  là số chính phương



Ta có 

Vậy trong ba số phảo có ít nhất một số bằng 2 không mất tính tổng quát giả sử

  phải có ít nhất một số bằng 2 giả sử 

 ( vô lý)

Vậy không có bộ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) giả sử có hai số  thỏa mãn yêu cầu bài toán 

Vì hai số  có các chữ số giống nhau 

Thử lần lượt các giá trị  Ta thấy không thỏa mãn . Vậy không có số thỏa mãn.

1. *( 3 điểm)*

a) Cho ba số thực dương , , . Chứng minh rằng

.

b) Xét các số thực , ,  thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

.

**Lời giải**

a) Đặt .

Ta có 







(Do  và , ).

Do đó . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi .

Vậy ta có đpcm.

b) Ta có .

Tương tự ; .

Do đó nếu  thì  .

Ta xét trường hợp 





Ta chứng minh bổ đề  (\*).

Thật vậy .

Do đó ta cần chứng minh







 (luôn đúng).

Như vậy ta có (\*) luôn đúng.

Áp dụng (\*) với , ,  ta có



.

Đặt , , khi đó .

Lại có .

 (2).

Từ (1) và (2) suy ra . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi .

Vậy GTLN của P là 1.

1. *(6 điểm)*

Cho tam giác  vuông tại  , có đường cao  . Gọi  là trung điểm của đoạn ,  là trung điểm của đoạn  và  là hình chiếu vuông góc của điểm  trên đường thẳng . Các đường thẳng  và  cắt nhau tại điểm . Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và .

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng  và  vuông góc với nhau.

b) Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Trên đoạn  lấy điểm  sao cho . Chứng minh rằng .

c) Gọi  là điểm đối xứng với điểm  qua điểm . Qua điểm , kẻ đường thẳng song song với đường thẳng  tại điểm . Gọi  là trung điểm của đoạn . Các đường thẳng  và  cắt nhau tại điểm . Chứng minh rằng hai đường thẳng  và  vuông góc với nhau.

**Lời giải**



***a) Chứng minh rằng hai đường thẳng  và  vuông góc với nhau.***

Có  (do cùng vuông góc ).

 và  , mà .



Ta có 





hay 

, có ,  (so le).

.

.

***b) Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Trên đoạn  lấy điểm  sao cho . Chứng minh rằng .***

Gọi  là giao điểm của  và .

 có hai đường cao ,  cắt nhau tại .

 là trực tâm  nên .

Có .

.

, có  (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc).

.

 (g.g) .

.

****** hay ***.***

***c) Gọi  là điểm đối xứng với điểm  qua điểm . Qua điểm , kẻ đường thẳng song song với***  cắt  ***đường thẳng  tại điểm . Gọi  là trung điểm của đoạn . Các đường thẳng  và  cắt nhau tại điểm . Chứng minh rằng hai đường thẳng  và  vuông góc với nhau.***

Gọi  là trung điểm ,  là giao điểm của  với ,  là giao điểm của  với .

Có  (do ).

Có  (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

 (g.g).

, có , .

.

 (c.g.c).

 ,  (đồng vị) .

 (g.g).

.

 có hai đường cao  và  cắt nhau tại .

 là trực tâm .

.

1. *(1 điểm)*

Cho bảng ô vuông . Người ta điền các số nguyên dương từ đến  vào mỗi ô vuông của bảng, mỗi ô một số và không có hai ô nào điền số giống nhau. Ở mỗi hàng, người ta chọn ra số lớn thứ tư được điền vào ô vuông của hàng đó. Gọi là tổng của số được chọn ra. Chứng minh rằng tồn tại một hàng nào đó có tổng tất cả các số được điền vào các ô vuông của hàng đó nhỏ hơn .

**Lời giải**

Ta gọi là số hạng lớn thứ tư trong mỗi hàng thứ . Không mất tính tổng quát giả sử

. Ta có nhận xét :

 ( vì  lớn hơn 14 số trong hàng đó)

 ( vì  lớn hơn 14 số trong hàng đó và lớn hơn 15 số trong hàng có )

Tương tự như vậy ta có .

Gọi  là các số trong hàng chứa . Không mất tính tổng quát giả sử 

Ta có : 

 ( giữa hai giá trị  và  có ít nhất 13 giá trị)

Tương tự như vậy ta có .

Xét hiệu 

. Vậy có ít nhất một hàng có tổng nhỏ hơn .

🙢 **HẾT** 🙠