

DẠNG 2**Bài toán tương giao đồ thị hàm số 02**

- Câu 1:** Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $[-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.
- Câu 2:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1}$ và $y = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?
- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $(-\infty; 2]$.
- Câu 3:** Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 4:** Cho 2 hàm số $y = x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1$ và $y = |x-2| - x - 2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là
- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 2)$. D. $m \in [2; +\infty)$.
- Câu 5:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}(2\sqrt{3+x}-m) + \sqrt{1-x}(5\sqrt{1-x}+2m) = 4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?
- A. 2019. B. 4032. C. 4039. D. 4033.
- Câu 6:** Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y = \left|2 + \frac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y = \sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?
- A. 35. B. 37. C. 36. D. 34.
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?
- A. 2020. B. 4040. C. 4041. D. 2020.
- Câu 8:** Cho hai hàm số $y = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là
- A. 506. B. 1011. C. 2020. D. 1010.

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

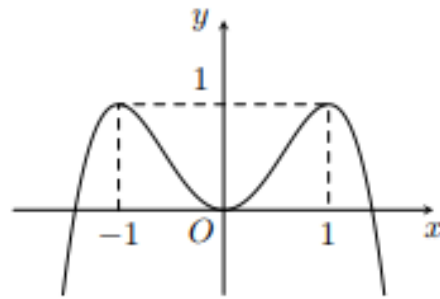
Câu 9: Cho hai hàm số $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

- A. 4040. B. 2020. C. 2021. D. 4041.

Câu 10: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

- A. 2006. B. 2005. C. 2007. D. 2008.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



- A. 3. B. 4. C. 2. D. 0.

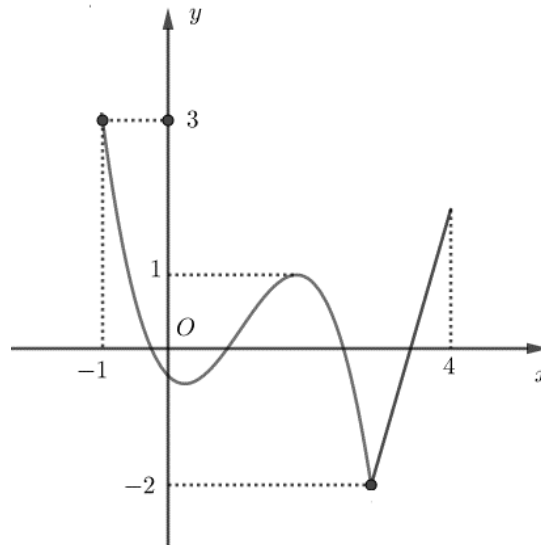
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$							$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 25. B. 30. C. 29. D. 24.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

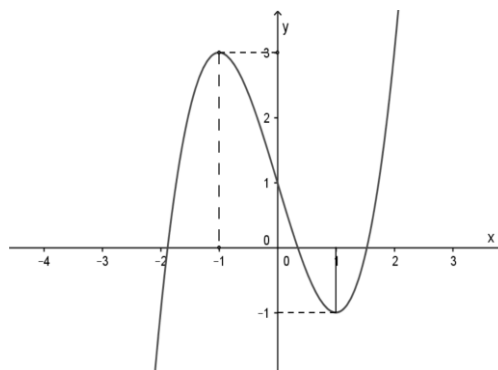
A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 8.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4.

B. -1.

C. 3.

D. 2.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$?

A. 1750.

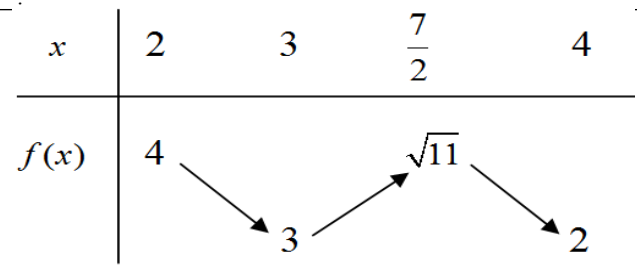
B. 1748.

C. 1747.

D. 1746.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số



- A. 6.
- B. 5.
- C. 4.
- D. 3.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2	0	1	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	-3	2	1,5	1	6	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \\ 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \end{cases}$$

có ba nghiệm phân biệt?

- A. 9.
- B. 11.
- C. 10.
- D. 8.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.C	4.A	5.B	6.C	7.B	8.A	9.C	10.A
11.B	12.B	13.C	14.D	15.A	16.C	17.D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x = -m \quad (1)$$

Xét $f(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$

Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - 2, x \in (-2; +\infty) \cup D = D_1 \\ \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + 2x + 2, x \in (-\infty; -2) \cup D = D_2 \end{cases}$

Có $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in D_1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + 2, \forall x \in D_2 \end{cases}$

Để thấy $f'(x) > 0, \forall x \in D_1 \cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Câu 2: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $(2x^2 + 1)\sqrt{x-1} = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq \frac{4}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow (2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 = m$

Xét hàm số $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11$ trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $\left[1; \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}; 2\right), (2; +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } f'(x) &= \left((2x^2 + 1)\sqrt{x-1} - \frac{11}{3x-4} + \frac{1}{2-x} - 11 \right)' \\ &= 4x\sqrt{x-1} + (2x^2 + 1)\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{10x^2 - 8x + 1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{33}{(3x-4)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} > 0 \end{aligned}$$

với $\forall x \in [1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

Suy ra, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \setminus \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$.

Bảng biến thiên

x	1	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	+
$f(x)$	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y = (2x^2 + 1)\sqrt{x-1}$ và $y = \frac{11}{3x-4} - \frac{1}{2-x} + 11 + m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m \in (-\infty; 1]$.

Câu 3: Chọn C

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + 2) = 0$ thì hàm số $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2 + bx + 2) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x+2)(ax^2 + bx + 2) = 0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$

Lí luận tương tự có $h(x) = (x-1)(ax^2 + bx + 2) = 0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$

$$\text{Từ và ta có hệ } \begin{cases} a+b+2=0 \\ 4a-2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

$$\text{Với } \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \text{ có } f(x) = (x-1)(x+2)(-x^2 - x + 2) = -(x-1)^2(x+2)^2 \leq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a; b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^7 + x^5 + x^3 + 3m - 1 = |x - 2| - x - 2m \Leftrightarrow x^7 + x^5 + x^3 - |x - 2| + x = -5m + 1 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - |x - 2| + x$.

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} x^7 + x^5 + x^3 + 2 & \text{khi } x \in [2; +\infty) \\ x^7 + x^5 + x^3 + 2x - 2 & \text{khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 > 0 & \text{khi } x \in (2; +\infty) \\ 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0 & \text{khi } x \in (-\infty; 2) \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m \in \mathbb{R}$.

Câu 5: Chọn B

Đk: $x \in [-3; 1]$.

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} + m(2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x}) = 0.$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{1-x} - \sqrt{3+x} = g(x), \text{ với } x \in [-3; 1] \Rightarrow 11 - 3x - 4\sqrt{(3+x)(1-x)} = t^2 + 4.$$

$$\text{Có } g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{3+x}} < 0, \forall x \in (-3; 1). \text{ Suy ra } g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-3; 1).$$

$$\Rightarrow \min_{[-3; 1]} g(x) = g(1) = -2; \quad \max_{[-3; 1]} g(x) = g(-3) = 4 \Rightarrow t \in [-2; 4].$$

$$\text{Từ } \Rightarrow t^2 + mt + 4 = 0.$$

$$\text{Nếu } t = 0 \Rightarrow 0 + 4 = 0.$$

$$\text{Nếu } t \in [-2; 4] \setminus \{0\}, \text{ ta có } m = \frac{-t^2 - 4}{t} = -t - \frac{4}{t} = f(t).$$

$$\text{Có } f'(t) = \frac{4-t^2}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

Bảng biến thiên

t	-2	0	2	4	
$f'(t)$	0	+	+	0	-
$f(t)$	4	$+\infty$	$-\infty$	-4	-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} m \in [-2019; 2019] \\ m \geq 4 \\ m \leq -4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; -4; 4; \dots; 2018; 2019\}.$$

Vậy có $(2019 - 4 + 1) \cdot 2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m .

Câu 6: Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 10 \\ x \geq \frac{m}{4} \end{cases}$$

Xét trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$$\left| 2 + \frac{2}{x-10} \right| = \sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2.$$

$$\text{Đặt } g(x) = 4x - \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2 \text{ với } x \in (0; +\infty) \setminus \{10\}.$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 4 \left(1 + \frac{2x-18}{(x-10)^3} \right); g''(x) = \frac{-4x+34}{(x-10)^4}.$$

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{17}{2}$	10	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-	-
$g'(x)$	4,072	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			$-\infty$	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\frac{17}{2}; 10 \right)$. Lại có $g'(9,22) > 0$ nên $\alpha \in (9,22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty) \setminus \{10\}$:

x	0	9	α	10	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	0	-	+
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		36	$g(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\frac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

$$\text{Trên khoảng } (9,22;10) \text{ thì } \begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < \left(\frac{2x-18}{x-10} \right)^2 \end{cases} \text{ nên } g(x) < 37 \Rightarrow g(\alpha) \in (36;37).$$

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; ...; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 7: Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x) = 0$ thì phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ vô nghiệm.

$$\text{Do đó: } f'(x) = m \cdot f(x) \Leftrightarrow m = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots + \frac{1}{x-2020}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{-1}{(x-3)^2} + \dots + \frac{-1}{(x-2020)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3; \dots; 2020\}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	...	2020	$+\infty$
$g'(x)$	-		-		-		-
$g(x)$	0	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$
		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$	

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020; 2020]$ nên $m \in \{n \in \mathbb{Z} \mid -2020 \leq n \leq 2020, n \neq 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln \left| \frac{x-2}{x} \right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 4m - 2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi có duy nhất một nghiệm.

$$+ \text{ Xét hàm số } y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = \begin{cases} g_1(x) = \ln(x-2) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x > 2 \\ g_2(x) = \ln(2-x) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } 0 < x < 2 \\ g_3(x) = \ln(2-x) - \ln(-x) - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Ta có
$$\begin{cases} g_1'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x > 2 \\ g_2'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0 < x < 2, \text{ do vậy } y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \\ g_3'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0	+
y	0	$\ln 3$	$+\infty$	4	$+\infty$	0

+ Qua bảng biến thiên này ta có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4m - 2020 = 4 \\ 4m - 2020 = \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 506 \in \mathbb{Z} \\ m = \frac{2020 + \ln 3}{4} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

+ Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m = 506$.

Câu 9: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) :

$$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|) = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình.

Với $x \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

$$\text{Suy ra: } f'(x) = -2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \begin{cases} -4 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0; +\infty) \\ -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\} \end{cases} \text{ và } f'(x) \text{ không}$$

xác định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$-$
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 15x$ (*).

Nếu $x = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \neq 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \frac{1}{x^3} = \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{m-15x})^3 + 3\sqrt{m-15x}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{m-15x}$ (2).

Nếu $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x > 0$.

Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ x + \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ nên (2) $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = m - 15x \Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x$.

Đặt $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x, x > 0$. $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + 15$.

Phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
g'			$-$	0	$+$
g		$+\infty$		$\frac{55}{4}$	$+\infty$

Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{55}{4}$.

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

Câu 11: Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

$$\text{Từ đồ thị} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 0 \\ e = 0 \\ a + c + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2.$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x}) = x^2 + 2x \text{ và } f(\sqrt{f(x)}) = f^2(x) + 2f(x).$$

$$\text{Nhu vậy phương trình } f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0 \text{ với } f(x) \geq 0.$$

Đặt $t = f(x) (t \geq 0)$ ta được phương trình $g(t) = 0$ với $g(t) = t^2 - 3t - 2\sqrt{t} + 1$.

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1; 4)$.

Mà $g(t) = 0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0; 1)$. Suy ra $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0; 1)$. Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0; 1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

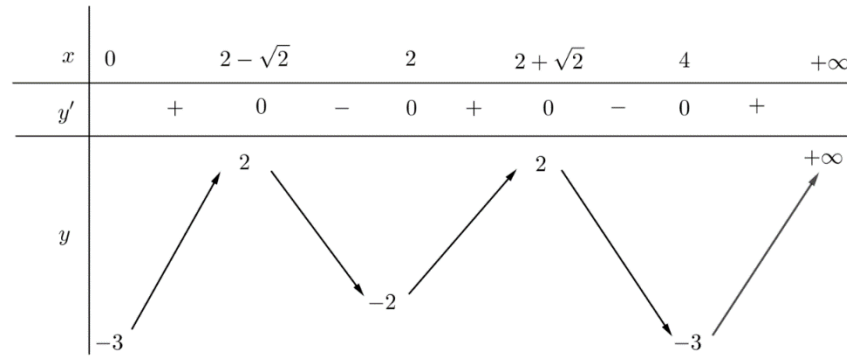
Câu 12: Chọn B

Ta đặt: $g(x) = f(x^2 - 4x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x - 4)f'(x^2 - 4x) = 2(x - 2)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x) \\ &= 2(x - 2)^3(x^2 - 4x + 2)x(x - 4). \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } g(0) = f(0) = -3; g(2 - \sqrt{2}) = g(2 + \sqrt{2}) = f(-2) = 2; g(2) = f(-4) = -2;$$

$$g(4) = f(0) = -3. \text{ Ta có bảng biến thiên:}$$



Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3 < \frac{m}{6} \leq 2$

$\Leftrightarrow -18 < m \leq 12$. Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Chọn C

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}$ đúng

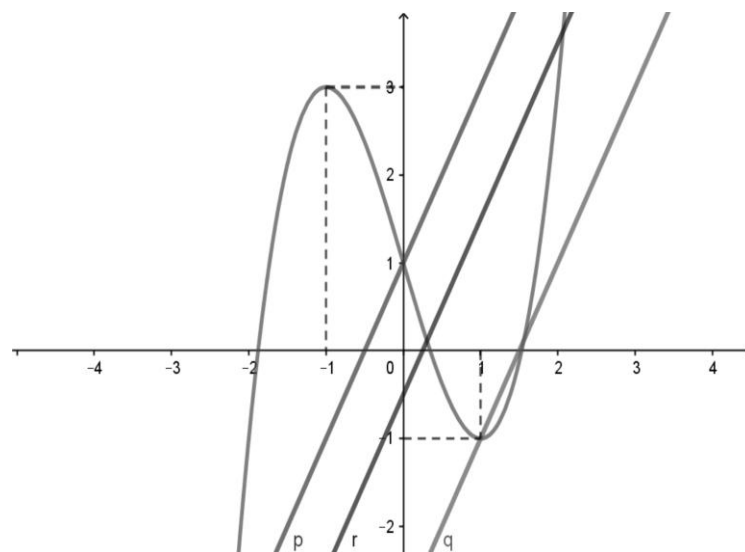
$$\text{với mọi } x \text{ thuộc đoạn } [-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min_{[-1; 4]} f(x) = -2$; $\max_{[-1; 4]} f(x) = 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy trên đoạn $[-10; 10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 14: Chọn D



Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Ta được phương trình: $f(t) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f(t) = 2t + m - 2$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2$ (r).

Gọi (p): $y = 2x + 1$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi q : $y = 2x - 3$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

Để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình phải có nghiệm $t \in (0;1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p

$$\Rightarrow -3 \leq m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Câu 15: Chọn A

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x)$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0 \quad (1)$$

Xét $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $h'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) + 3x^2 = f'(x)[3f^2(x) + 1] + 3x^2$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in [-1; 2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1; 2]$ nên $\min_{[-1; 2]} h(x) = h(-1) = m - 1, \max_{[-1; 2]} h(x) = h(2) = m + 1748$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1; 2]} h(x) \cdot \max_{[-1; 2]} h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(-1) \cdot h(2)$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(1748 + m) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{-1748; -1747; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16: Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[2; 4]} f(x) = f(4) = 2$ và $\max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2; 4]$

Suy ra $\min_{[2; 4]} g(x) = g(2) = 2$ và $\max_{[2; 4]} g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = m$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2; 4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x=2$ nên

$$\underset{[2;4]}{\text{Min}} h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{\text{Min}} g(x)}{\underset{[2;4]}{\text{Max}} f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x=4$ nên

$$\underset{[2;4]}{\text{Max}} h(x) = \frac{\underset{[2;4]}{\text{Max}} g(x)}{\underset{[2;4]}{\text{Min}} f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 17: Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9-4x^2}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-4x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

$$\text{Xét phương trình } 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x - m = 0 \Leftrightarrow m = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x, \text{ với } x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = -12f'(-2x+1) - 24x^2 + 6 = -6[2f'(-2x+1) + 4x^2 - 1]$$

$$\text{Từ giả thiết ta suy ra } f'(-2x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < 2 \\ -2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$$

$$f'(-2x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < -2x+1 < 0 \\ 2 < -2x+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Bảng biến thiên của hàm số } g(x) = 6f(-2x+1) - 8x^3 + 6x \text{ trên } \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}.$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

x	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
$f'(-2x+1)$	+	0	-	-	0	+
$4x^2-1$	+	0	-	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	+	0	-
$g(x)$	54			14		-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ có đúng ba nghiệm $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 14 \\ m \neq 9 \end{cases}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 13. \text{ Vậy có 8 số nguyên } m.$$