

Bài 1: (2,0 điểm)

Cho $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a/ Rút gọn biểu thức P

b/ Tìm x để $P = \frac{2}{7}$

c/ So sánh P^2 với $2P$

Bài 2 (2,0 điểm)

1/ Giải phương trình: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

2/ Trên một mặt phẳng tọa độ, cho các điểm M(2; 1), N(3; -4), P(5; 3) lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và CA của tam giác ABC.

a/ Viết phương trình của đường thẳng AB; BC.

b/ Xác định vị trí điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 3 (2,0 điểm)

1/ Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2014x - 2015y - 2016 = 0$

2/ Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng: Tổng của số đó với các chữ số của nó bằng 2023

Bài 3 (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O;R) cố định, đường kính AB. Lấy điểm I nằm trên tia đối của BA, kẻ tiếp tuyến IC (C là tiếp điểm). Gọi M là 1 điểm cố định thuộc nửa đường tròn đường kính AB không chứa điểm C (M khác A;B). Gọi N là giao điểm thứ 2 của IM với (O); H là hình chiếu của C trên AB; K là hình chiếu của O trên IM, E là giao điểm của CH và OK.

a/ Chứng minh: $IC^2 = IA \cdot IB$

b/ Chứng minh: $IH \cdot IO = IM \cdot IN$

c/ Khi I di động trên tia đối của BA, hãy tìm quỹ tích điểm E.

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh a; b là 2 số chính phương liên tiếp.

----- Hết -----

Bài 1 (2,0đ):

Ý	Đáp án	Điểm
a/	$P = \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3 - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \text{ (với } x \geq 0; x \neq 1)$ $= \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ $= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$ Vậy $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$	0,5đ 0,25đ
b/	Ta có: $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$) $P = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1=7 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)=0 \text{ (vì } x \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x}+3 > 0)$ $\Leftrightarrow x=4$ Vậy với $x=4$ thì $P = \frac{2}{7}$	0,25đ 0,5đ
c/	Ta có: $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$ (Với $x \geq 0; x \neq 1$) Do $x \geq 0; x \neq 1$ nên $x+\sqrt{x}+1 > 0 \Rightarrow P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} > 0$ Ta lại có $x+\sqrt{x} \geq 0$ (vì $x \geq 0; x \neq 1$) $\Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x+\sqrt{x}+1} \leq 1 \Rightarrow P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2$ Ta có $P^2 - 2P = P(P-2) \leq 0$ (vì $0 < P \leq 2$) $\Rightarrow P^2 \leq 2P$ Vậy $P^2 \leq 2P$	0,25đ 0,25đ

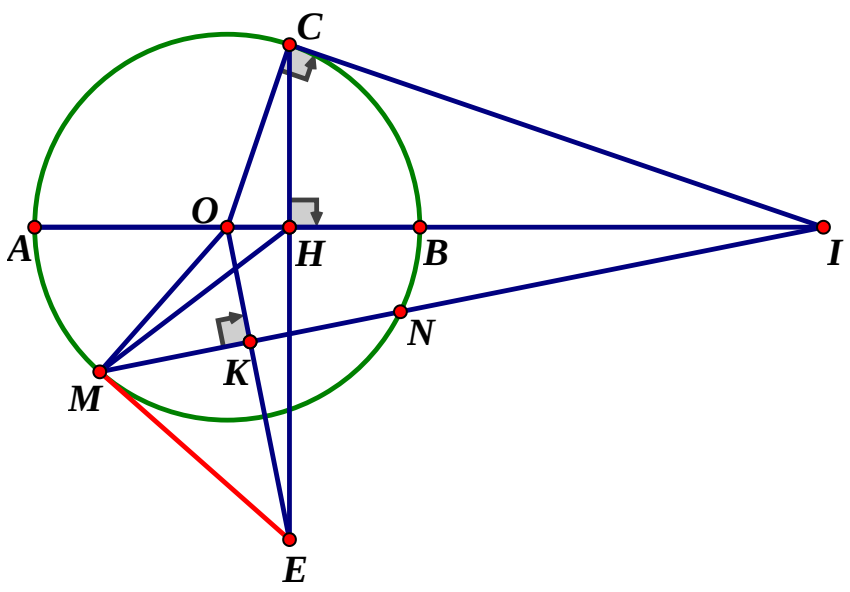
Bài 2 (2,0đ):

Ý	Đáp án	Điểm
1/	ĐK: $\begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases} \\ x \neq 0 \end{cases}$ TH1: $-1 \leq x < 0$. VT < 0; VP > 0 nên PT vô nghiệm. TH2: $x \geq 1$. PT: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ $\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - x = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 2\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)} + 1 = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 2\sqrt{x(x - 1)} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x - 1)} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x(x - 1)} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (vì $x \geq 1$) Vậy $S = \left\{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$	0,25đ
		0,25đ
		0,25đ
		0,25đ
		0,25đ
2-a/	+ Viết được phương trình của đường thẳng MP là $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ + Đường thẳng BC song song với MP nên phương trình có dạng $y = \frac{2}{3}x + b$. Vì N thuộc đường thẳng BC tìm ra $b = -6$. Vậy phương trình của đường thẳng BC là $y = \frac{2}{3}x - 6$.	0,25đ
	+ Tương tự ta có ptđt AB là $y = \frac{7}{2}x - 6$	0,25đ
2-b/	+ Giải hệ $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 6 \\ y = \frac{7}{2}x - 6 \end{cases}$ ta suy ra tọa độ đỉnh B(0; -6)	0,25đ
	Sử dụng công thức tọa độ trung điểm, với P là trung điểm AC nên P là trung điểm của BD, tìm ra tọa độ điểm D(10;12). Vậy D(10;12).	0,25đ

Bài 3 (2,0đ):

Ý	Đáp án	Điểm
1/	Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2014x - 2015y - 2016 = 0$ $\Rightarrow x^2 + xy + x - 2015x - 2015y - 2015 = 1$ $\Rightarrow x(x + y + 1) - 2015(x + y + 1) = 1$ $\Rightarrow (x + y + 1)(x - 2015) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x - 2015 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x - 2015 = -1 \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (2016; -2016)$ hoặc $\Rightarrow (x; y) = (2014; -2016)$ Vậy $(x; y) = (2016; -2016)$ hoặc $(x; y) = (2014; -2016)$.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
2/	Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, biết rằng: Tổng của số đó với các chữ số của nó bằng 2023 Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ ĐK: $a; b; c; d \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b; c; d \leq 9$ Theo bài ra ta có: $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2023$ (1) Vì $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2023$ nên $\overline{abcd} < 3000$ và $1 \leq a \leq 9$ nên $a=1; 2$. TH1: $a=1$. Thay vào (1) ta được: $1\overline{bcd} + 1 + b + c + d = 2023 \Rightarrow \overline{bcd} + b + c + d = 1022$ (2) $\Rightarrow \overline{bcd} = 1022 - (b + c + d) > 1022 - (9 + 9 + 9) = 995$ nên $b=9$. Thay vào (2) ta được: $9\overline{cd} + 9 + c + d = 1022 \Rightarrow \overline{cd} + c + d = 113$ (3) $\Rightarrow \overline{cd} = 113 - (c + d) > 113 - (9 + 9) = 95$ nên $c=9$. Thay vào (3) ta được: $9\overline{d} + 9 + d = 113 \Rightarrow \overline{d} + d = 14 \Rightarrow d = 7$ Suy ra số cần tìm là: 1997. TH2: $a=2$. Thay vào (1) ta được: $2\overline{bcd} + 2 + b + c + d = 2023 \Rightarrow \overline{bcd} + b + c + d = 21$ (4) $\Rightarrow \overline{bcd} = 21 - (b + c + d) < 21 - (0 + 0 + 0) = 21 < 100$ nên $b=0$. Thay vào (4) ta được: $0\overline{cd} + 0 + c + d = 21 \Rightarrow \overline{cd} + c + d = 21$ (5) $\Rightarrow \overline{cd} = 21 - (c + d) < 21 - (0 + 0) = 21$ nên $c=0; 1; 2$. + Nếu $c=0$. Thay vào (5) ta được: $0\overline{d} + 0 + d = 21 \Rightarrow \overline{d} + d = 21 \Rightarrow d = 10,5 \Rightarrow$ (loại). + Nếu $c=1$. Thay vào (5) ta được: $1\overline{d} + 1 + d = 21 \Rightarrow \overline{d} + d = 10 \Rightarrow d = 5$ Suy ra số cần tìm là: 2015. + Nếu $c=2$. Thay vào (5) ta được: $2\overline{d} + 2 + d = 21 \Rightarrow \overline{d} + d = 9 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow$ (loại). Vậy có 2 số tmycbt là: 1997 và 2015.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

Bài 4 (3,0đ):

Ý	Đáp án	Điểm
		0,25đ
a/	Chứng minh: $IC^2 = IA \cdot IB$ Chỉ ra: $IC^2 = IO^2 - OC^2 = IO^2 - OA^2 = (IO + OA)(IO - OA) = IA \cdot IB \Rightarrow \text{đpcm.}$	0,75
b/	Chứng minh: $IH \cdot IO = IM \cdot IN$ Chỉ ra: $\triangle OCI$ vuông tại C, đường cao CH nên $IC^2 = IH \cdot IO$ (1) Chỉ ra: $IM \cdot IN = (IK + KM)(IK - KN) = IK^2 - KM^2$ $= IK^2 - (OA^2 - OK^2) = (IK^2 + OK^2) - OA^2 = IO^2 - OA^2$ $= (IO + OA)(IO - OA) = IA \cdot IB = IC^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $IH \cdot IO = IM \cdot IN \Rightarrow \text{đpcm.}$	0,25đ 0,5đ 0,25đ
c/	Khi I di động trên tia đối của BA, hãy tìm quỹ tích điểm E. + Chỉ ra: $\triangle OHE$ đồng dạng với $\triangle OKI$ suy ra $OK \cdot OE = OH \cdot OI$ (3) + $\triangle OCI$ vuông tại C, đường cao CH nên $OH \cdot OI = OC^2 = OM^2$. (4) + Từ (3); (4) suy ra: $OK \cdot OE = OM^2$. Chỉ ra $\triangle OKM$ đồng dạng với $\triangle OME$. Nên $\angle OME = \angle OKM = 90^\circ$ suy ra: $ME \perp OM$. Vì (O); AB; M cố định nên đường thẳng đi qua M và vuông góc với OM cũng cố định tức là đường thẳng ME cố định. Nên quỹ tích điểm E là nằm trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với OM. Giới hạn quỹ tích: Phần đường thẳng ME nằm giới hạn giữa 2 đường tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

Bài 5 (1,0đ): Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh a; b là 2 số chính phương liên tiếp. (1đ SX)

Ý	Đáp án	Điểm
	Cho 2 số nguyên a,b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 - 2ab + 2a - 2b = 4a$ $\Leftrightarrow (a - b + 1)^2 = 4a \quad . \text{ Suy ra } a \geq 0.$ $(a - b + 1)^2 = 4a$ là số chính phương suy ra a là số chính phương Nên đặt $a = x^2$ (x là số nguyên). Khi đó: $(x^2 - b + 1)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - b + 1 = \pm 2x$ $\Leftrightarrow b = (x \mp 1)^2$ Ta thấy x và (x+1) hoặc (x-1) và x là các số nguyên liên tiếp. Suy ra: x^2 và $(x+1)^2$ hoặc $(x-1)^2$ và x^2 là các số chính phương liên tiếp. Vậy a và b là hai số chính phương liên tiếp	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ

Ghi chú: Các cách giải khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.