SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
Năm học: 2023 -2024
Môn thi: TOÁN
Lớp 9 THCS
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Đề này có 01 trang, gồm 05 câu.

THỜI ĐIỂM THÁNG 12/2024(đề 5)

Câu 1: (4 điểm).

Cho biểu thức: $P = \dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{b}{b-\sqrt{ab}} + \dfrac{a}{\sqrt{ab}+a} \right) - \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}}{2}$.

1) Rút gọn P.

2) Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $P = 3 - \sqrt{ab}$

Câu 2: (4 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}$

b) (Trong căn là $5X^2+14x+9$)

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{y^2 - 7x - 6} - \sqrt[3]{y(x-6)} = 1 \\ \sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{x+1} \end{cases}$.

Câu 3: (4 điểm).

a/ Giải phương trình nghiện nguyên: $\left(x + y\sqrt{5}\right)^z = \sqrt{1+\sqrt{5}}$.

b/ Tất tất cả các số nguyên tố p để $p^2 + 2^p$ và $p^3 + 2$ đều là các số nguyên tố.

Câu 4: (6 điểm): Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH, E là giao điểm của BI với HD

a. Chứng minh $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$

c. Chứng minh $HE.HD = HC^2$

c. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (2 điểm): Cho $\begin{cases} x,y,z > 0 \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} + \dfrac{1}{xyz} = 4 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{1}{2x^3 + y^3 + 9} + \dfrac{1}{2y^3 + z^3 + 9} + \dfrac{1}{2z^3 + x^3 + 9}$

----------------- Hết------------------

Họ tên thí sinh: ………………………………………

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2023 – 2024
MÔN THI: TOÁN - LỚP 9
Thời gian làm bài 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)
(Hướng dẫn chấm gồm có 07 trang)

Câu	Nội dung	Biểu điểm
Câu 1	1) Rút gọn biểu thức P. Với a, b > 0, a ≠ b ta có: $P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right) - \frac{\left\lvert\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\rvert}{2}$ $P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{(a+b)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} - \frac{\left\lvert\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\rvert}{2}$ $P = \frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{2(a+b)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} - \frac{\left\lvert\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\rvert}{2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{\left\lvert\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\rvert}{2}$ - Nếu $\sqrt{a}-\sqrt{b} > 0 \Leftrightarrow a > b$ thì $P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} = 0$ - Nếu $\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0 \Leftrightarrow a < b$ thì $P = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ 2) Tìm các số nguyên dương a, b sao cho $P = 3 - \sqrt{ab}$ _ Nếu $a > b > 0$ thì $P = 3 - \sqrt{ab} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{ab} = 0 \Leftrightarrow ab = 9$ Mà a, b là các số nguyên dương nên $(a,b) = (9;1)$ - Nếu $0 < a < b$ thì $P = 3 - \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 3 - \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}+1\right) = 2$ $\Rightarrow 0 < \sqrt{a} - 1 = \frac{2}{\sqrt{b}+1} \le 2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{a} \le 3 \Leftrightarrow 1 < a \le 9.$ Mà a là số nguyên dương nên $a \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Thử trực tiếp các trường hợp Của a để tìm b, với $b = \frac{2}{\sqrt{a}-1} - 1; \left(a < b; a,b \in Z_+\right)$ ta thấy không thỏa mãn. Vậy $(a,b) = (9;1)$	0,25 0,25 0.5 0,5 0,5 0.5 0,5 0.5 0.5

Câu 2	**Bài 1:** Điều kiện $x \ge 5$. Chuyển vế bình phương ta được: $2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$ Ta viết lại phương trình: $2(x^2-4x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$.	0,5
	Chia hai vế cho $x+4>0$ ta thu được: $2\left(\frac{x^2-4x-5}{x+4}\right)-5\sqrt{\left(\frac{x^2-4x-5}{x+4}\right)}+3=0$ Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{x^2-4x-5}{x+4}\right)}\ge 0$ ta thu được phương trình: $2t^2-5t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{3}{2} \end{array}\right.$	0,5
	Trường hợp 1: $t=1 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x-5}{x+4}=1 \Leftrightarrow x^2-5x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5+\sqrt{61}}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$	0,5
	Trường hợp 2: $t=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-4x-5}{x+4}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow 4x^2-25x-56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$ Kết hợp điều kiện ta suy ra các nghiệm của phương trình là: $x=8; x=\frac{5+\sqrt{61}}{2}$	0,5
	Bài 2: $\left\{\begin{array}{ll} \sqrt{y^2-7x-6}-\sqrt[3]{y(x-6)}=1 & (1) \\ \sqrt{2(x-y)^2+6x-2y+4}-\sqrt{y}=\sqrt{x+1} & (2) \end{array}\right.$	
	Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x\ge -1 \\ y\ge 0 \\ y^2-7x-6\ge 0 \end{array}\right.$.	0,25
	Ta viết lại phương trình (2) thành: $\sqrt{2(x-y)^2+6x-2y+4}-\sqrt{y}=\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow \sqrt{2(x-y)^2+6x-2y+4}=\sqrt{y}+\sqrt{x+1}$. Bình phương 2 vế ta thu được: $2x^2-4xy+2y^2+6x-2y+4=x+y+1+2\sqrt{y(x+1)}$ $\Leftrightarrow 2\left[(x+1)^2-2y(x+1)+y^2\right]+(x+1+y)=2\sqrt{y(x+1)}$ $\Leftrightarrow 2(x+1-y)^2+(\sqrt{x+1}-\sqrt{y})^2=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1=y \\ \sqrt{x+1}=\sqrt{y} \end{array}\right. \Leftrightarrow x+1=y$	0,5
	Thay vào phương trình (2) ta có:	

	$\sqrt{y^2-7y+1}-\sqrt[3]{y(y-7)}=1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-7y+1}=\sqrt[3]{y(y-7)}+1$. Đặt $a=\sqrt[3]{y(y-7)}$ ta có phương trình: $\sqrt{a^3+1}=a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -1 \\ a^3-a^2-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \\ a=2 \end{array}\right. \end{cases}$ Với $a=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=-1 \\ y=7 \Rightarrow x=6 \end{array}\right.$ Với $a=-1 \Rightarrow y^2-7y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{5-3\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{5+3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ Với $a=2 \Rightarrow y^2-7y-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \quad \text{(L)} \\ y=8 \Rightarrow x=7 \end{array}\right.$	1,0
	Hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $(x;y)=(-1;0),(6;7),\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2};\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2};\frac{7+3\sqrt{5}}{2};\right),(7;8)$	0,25
Câu 3	**Bài 1:** • Nhận thấy với $z=0$ phương trình trên không có nghiệm.	0,25
	• Nếu z là một số nguyên dương thì tồn tại các số nguyên dương a, b để $\left(x+y\sqrt{5}\right)^z=a+b\sqrt{5}$ Khi đó ta được $a+b\sqrt{5}=\sqrt{1+\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}=1+\sqrt{5}$. Do a, b là các số nguyên dương và $\sqrt{5}$ là số vô tỷ. Nên ta được $a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}=1+\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a^2+5b^2=1 \\ 2ab\sqrt{5}=\sqrt{5} \end{cases}$, hệ phương trình không có nghiệm nguyên.	0,75
	• Nếu z là một số nguyên âm thì tồn tại các số nguyên dương a, b để $\left(x+y\sqrt{5}\right)^z=\frac{1}{\left(x+y\sqrt{5}\right)^{-z}}=\frac{1}{a+b\sqrt{5}}$ Khi đó ta được	0,75

$$\frac{1}{a+b\sqrt{5}}=\sqrt{1+\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left(a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=1 \Leftrightarrow 4\left(a^2+4b^2+2ab\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-1$$

Do a, b là các số nguyên dương và $\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

Nên ta được $4\left(a^2+4b^2+2ab\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-1 \Rightarrow \begin{cases} 4a^2+20b^2=-1 \\ 8ab\sqrt{5}=\sqrt{5} \end{cases}$

(hệ phương trình không có nghiệm nguyên).

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên. 0,25

Bài 2: Ta có: $p^2+2^p=p^2-1+2^p+1=(p-1)(p+1)+2^p+1$ 0,25

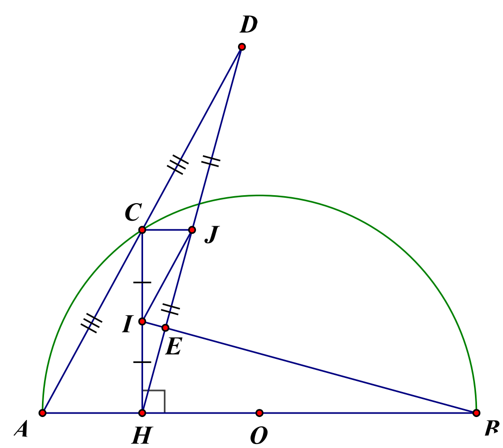
Nếu $p=2$ thì $p^2+2^p=8$ là hợp số. 0,25

Khi $p\geq 3$, xét 3 số liên tiếp $p(p-1)(p+1)$ luôn phải có một số chia hết cho 3. 1,0

Nếu $(p-1)$ hoặc $(p+1)$ chia hết cho 3 thì $(p-1)(p+1)=p^2-1$ chia hết cho 3 và $p^2+2^p=p^2-1+2^p+1=(p-1)(p+1)+2^p+1$

$2^p+1 \vdots 3$ nên $p^2+2^p \vdots 3$ mà $p^2+2^p \vdots 3$ nên p^2+2^p là hợp số, trái với giả thiết.

=> $p \vdots 3$, do p là số nguyên tố suy ra $p=3$. Thử lại ta thấy $p^2+2^p=9+8=17, p^3+2=29$ là các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán. 0,5



a. Chứng minh $\widehat{CIJ}=\widehat{CBH}$ 1,5

Vì ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC\perp BC$

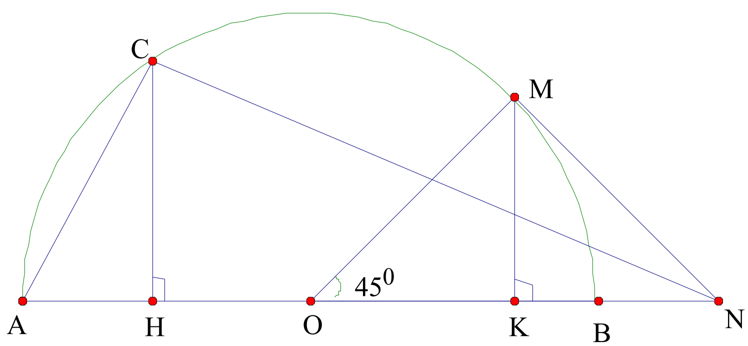
Suy ra $BC\perp CD$ (1)

Xét ΔHCD có I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH

Suy ra IJ là đường trung bình của ΔHCD

$\Rightarrow IJ // CD$ (2)

	Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$ Suy ra $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$ (cùng phụ với $\widehat{HCB}$) (đpcm) (3)	0,5
	b. Chứng minh ΔCJH đồng dạng với ΔHIB Xét ΔCBH vuông tại H, ta có: $\tan\widehat{CBH} = \dfrac{CH}{BH}$ (4) Xét ΔDAH có C là trung điểm của DA, J là trung điểm của DH Suy ra CJ là đường trung bình của ΔDAH hay $CJ // AB$ (Do $H \in AB$) Mà $CH \perp AB$ (gt) Suy ra $CJ \perp CH \Rightarrow \widehat{HCJ} = 90^\circ$ Trong tam giác CIJ vuông tại C có $\tan\widehat{CIJ} = \dfrac{CJ}{CI} = \dfrac{CJ}{HI} (CI = HI)$ (5) Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \dfrac{CH}{HB} = \dfrac{CJ}{HI}$ Xét ΔCJH và ΔHIB có: $\widehat{HCJ} = \widehat{BHI} = 90^\circ$ $\dfrac{CH}{HB} = \dfrac{CJ}{HI}$ (cmt) Do đó $\Delta CJH \backsim \Delta HIB$ (g-c-g)	1,0

	Vì $\Delta CJH \backsim \Delta HIB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{CHJ} = \widehat{HBI}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{CHJ} = \widehat{HBE}$ Mà $\widehat{CHJ} + \widehat{EHB} = 90^\circ$ nên $\widehat{EHB} + \widehat{HBE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{HEI} = 90^\circ$ Xét ΔHEI và ΔHCJ có: $\widehat{HEI} = \widehat{HCJ} = 90^\circ$ $\widehat{H}$ là góc chung Do đó $\Delta HEI \backsim \Delta HCJ$ (g-g)	0,5
	Suy ra $\dfrac{HE}{HC} = \dfrac{HI}{HJ}$ $\Rightarrow HE.HJ = HI.HC$ Mà $HJ = \dfrac{1}{2}HD;\ HI = \dfrac{1}{2}HC$ Suy ra $HE.HD = HC^2$ (đpcm)	0,5
	c. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.  Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOM} = 45^\circ$ Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định. Kẻ $MK \perp AB$ tại K Ta được ΔMON vuông cân tại $M \Rightarrow MO = MN$ và $\widehat{MNK} = 45^\circ$ Ta có ΔKMN vuông tại K, có $\widehat{MNK} = 45^\circ$ $\Rightarrow \Delta KMN$ vuông cân tại K $\Rightarrow KM = KN$	1,0
	+ Xét $C \equiv M$ Ta có $C \equiv M$ nên $H \equiv K$ Do đó $AH + CH = AK + KM = AK + KN = AN$ (không đổi) + Xét C khác M. Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM Do đó $\widehat{ANC} < \widehat{ANM} = 45^\circ$ Xét ΔHNC có $\widehat{NHC} = 90^\circ$ nên $\widehat{HNC} + \widehat{HCN} = 90^\circ$ Mà $\widehat{HNC} < 45^\circ$ nên $\widehat{HCN} > 45^\circ$	1,0

	Suy ra $\widehat{HNC} < \widehat{HCN}$ Suy ra $HC < HN$ Do đó $AH + CH < AH + HN = AN$ Vậy khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOC} = 45^\circ$ thì $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.	
Câu 5	Từ giả thiết => $4xyz = x+y+z+1 \geq 3\sqrt[3]{xyz}+1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt[3]{xyz}+1\right)^2\left(\sqrt[3]{xyz}-1\right) \geq 0 \Rightarrow xyz \geq 1$	0,5
	Đặt: $x^3 = a^4; y^3 = b^4 \Rightarrow 2x^3 + y^3 + 9 = (a^4+b^4+1+1) + (a^4+1+1+1) + 4 \geq 4(ab+a+1)$	0,5
	$A = \sum \frac{1}{2x^3+y^3+9} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1}\right)$ $= \frac{1}{4}\left(\frac{ac}{a.abc+abc+ac} + \frac{a}{abc+ca+a} + \frac{1}{ca+a+1}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{ac+a+1}{ac+a+1}\right) = \frac{1}{4}$	0,5
	Dấu "=" xảy ra x = y = z = 1 Kết luận:	0,5