|  |  |
| --- | --- |
| UBND HUYỆN PHÚC THỌ  **PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **ĐỀ THI CHÍNH** | **KÌ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 8**  Môn: Toán  Thời gian làm bài: 120 phút |

**Bài 1.(5 điểm)**

Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện x > 0, y < 0 và x + y = 1.

a) Rút gọn biểu thức .

b) Chứng minh rằng: A < - 4.

**Bài 2. (2 điểm)**

Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

4x2 + 2y2 + 2z2 – 4xy – 4xz + 2yz – 6y – 10z + 34 = 0,

Tính gia trị của biểu thức T = (x – 4)2014 + (y – 4)2014 + (z – 4)2014.

**Bài 3.(2 điểm)**

Cho số nguyên tố p > 3. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số pn có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

**Bài 4.( 8 điểm)**

Cho hình vuông ABCD cạnh a và điểm N trên cạnh AB. Cho biết tia CN cắt tia DA tại E, tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF.

1. Chứng minh CE = CF;
2. Chứng minh B, D, M thẳng hàng;
3. Chứng minh ΔEAC đồng dạng với ΔMBC;
4. Xác định vị trí điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác ACFE có diện tích gấp 3 lần diện tích hình vuông ABCD.

**Bài 5. (3 điểm)**

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn 3x – y3 = 1
2. Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện 0 ≤ a, b, c ≤ 2 và a + b + c = 3

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = a2 + b2 + c2.

--------------------- *Hết* ---------------------

*(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)*

*Họ và tên thí sinh: .........................................................*

*Số báo danh:.........................*

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bài** | **Nội dung** | **Biểu điểm** |
| **Bài 1** | a) Với x + y = 1, biến đổi và thu gọn A. | 3(điểm) |
| b)  (vì x > 0; y < 0 và x + y = 1)  Suy ra A < - 4. | 2(điểm) |
| **Bài 2** | 4x2 + 2y2 + 2z2 – 4xy – 4xz + 2yz – 6y – 10z + 34 = 0  ⇔ [4x2 – 4x(y + z) + (y + z)2]+ (y2 + z2 – 6y – 10z + 34) = 0  ⇔ (2x – y – z)2 + (y – 3)2 + (z – 5)2 = 0  …  ⇔ y = 3; z = 5; x = 4  Khi đó T = (4 – 4)2014 + (3 – 4)2014 + (5 – 4)2014 = 2. | 2(điểm) |
| **Bài 3** | Do p là số nguyên tố và p > 3 nên p không chia hết cho 3. (\*)  pn có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau.  Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số pn. Như vậy tổng các chữ số của số pn là: 2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 903 nên pn 3  Điều này mâu thuẫn (\*).  Vậy trong số pn phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau. | 2(điểm) |
| **Bài 4** | a) Chứng minh được  ΔCDE = ΔCBF (g.c.g)  ⇒ CE = CF. | 2(điểm) |
| b) Chỉ ra  ⇒ M thuộc đường trung trực BD của đoạn AC. Vậy B, D, M thẳng hàng. | 2(điểm) |
| c) Chỉ ra ∠ACE = ∠BCM ⇒ ΔEAC ~ ΔMBC (g.g).  Chỉ ra ∠CAE = ∠CBM | 2(điểm) |
| d) Đặt BN = x ⇒ AN = a – x.  \*)Tính SAEFC = SACE + SECF =  - Tính AE: Lý luận để có    - Tính CE2: Lý luận để có CE2 = CD2 + DE2 = a2 + (a + AE)2  ⇒  Do đó SAEFC =  \*) Tính SABCD = a2.  Lý luận với SAEFC = 3SABCD để có  6x2 – ax – a2 = 0 ⇔ (2x – a)(3x + a) = 0 ⇔  (vì a, x > 0).  KL: N là trung điểm của AB thì SAEFC = 3SABCD. | 2(điểm) |
| **Bài 5** | a) 3x – y3 = 1 ⇔ 3x = y3 + 1 (1)  - Dễ thấy x = y = 0 là một nghiệm của (1).  - Nếu x < 0 thì 3x =  ( n nguyên dương, n = - x)  suy ra 0 < 3x < 1. Mà y3 + 1 là số nguyên, suy ra (1) không có nghiệm nguyên.  - Nếu x > 0 thì 3x 3  (1) ⇔ 3x = (y + 1)3 – 3y(y + 1) ⇒ (y + 1)3 3 nên y + 1 3  Đặt y + 1 = 3k ( k nguyên), suy ra y = 3k – 1. Thay vào (1) ta được: 3x = (3k – 1)3 + 1 = 9k(3k2 – 3k + 1) nên 3k2 – 3k + 1 là ước của 3x mà 3k2 – 3k + 1 3 và 3k2 – 3k + 1=  nên 3k2 – 3k + 1 = 1 ⇔ 3k(3k – 1) = 0 ⇔ k = 0 hoặc k = 1.  Với k = 0 thì y = - 1 suy ra 3x = 0 phương trình vô nghiệm.  Với k = 1 thì y = 2 suy ra 3x = 9 nên x = 2.  Vậy các cặp số nguyên (x, y) ∈ {(0; 0), (2; 2)}. | 1.5(điểm) |
| b) Từ giả thiết 0 ≤ a, b, c ≤ 2 suy ra (2 – a)(2 – b)(2 – c) + abc ≥ 0  ⇔ 8 – 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) ≥ 0  ⇔ 8 – 12 + 2ab + 2bc + 2ac ≥ 0 (vì a + b + c = 3)  ⇔ 2ab + 2bc + 2ac ≥ 4  ⇔ a2 + b2 + c2  + 2ab + 2bc + 2ac ≥ 4 + a2 + b2 + c2  ⇔ ( a + b + c)2 ≥ 4 + a2 + b2 + c2  ⇔ a2 + b2 + c2 ≤ 5 (vì a + b + c = 3)  Dấu đẳng thức xảy ra ⇔ (a; b; c) = (0; 1; 2) và các hoán vị của bộ số này.  Vậy P có GTLN nhất là 5 ⇔ (a; b; c) = (0; 1; 2) và các hoán vị của bộ số này. | 1.5(điểm) |

*Chú ý: - Điểm được lấy đến 0.25.*

*- Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa*.