

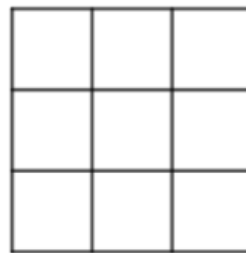
ĐỀ 47(7/9/2022)

Câu 1 (3,0 điểm).

Cho phương trình $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} + x^2 + m = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thực.

Câu 2 (2,0 điểm).

Cho một bảng gồm 9 ô vuông đơn vị như hình bên. Một em bé cầm 4 hạt đậu đặt ngẫu nhiên vào 4 ô vuông đơn vị trong bảng. Tính xác suất để bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có hạt đậu

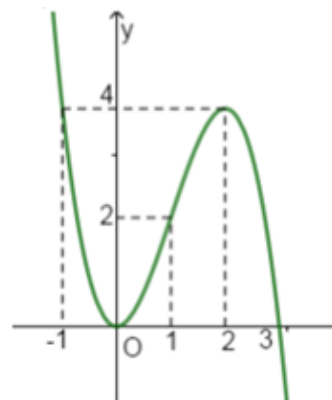


Câu 3 (6,0 điểm).

a) Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Tìm tham số m để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để phương trình

$$f(x+1) - \frac{m^2}{x^2 + 3x + 5} = 0 \text{ có nghiệm trên khoảng } (-1; 1) ?$$



Câu 4 (6,0 điểm).

a) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 2$; $AC = \sqrt{3}$. Góc $CAA' = 90^\circ$, $BAA' = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' . Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích lăng trụ đã cho.

b) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O ; cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Câu 5 (1.5 điểm). Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = a$. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' (khác điểm S). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{1}{SA'SB'} + \frac{1}{SB'SC'} + \frac{1}{SC'SA'}$$

Câu 6 (1.5 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c . tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

--- Hết ---

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

Đáp án đề 16

Câu 1 (3,0 điểm).

Cho phương trình $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} + x^2 + m = 0$.

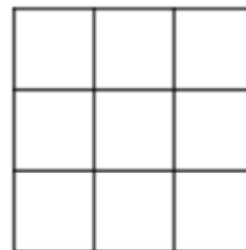
Tìm các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thực.

Giải

ĐKXĐ: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}$ (*)	0,5
$t' = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \leq t \leq 2$	0,5
Ta có: (*) $\Rightarrow x^2 = \frac{-t^4 + 4t^2}{16}$	0,5
Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^4 - 4t^2 - 16t = 16m$	
Xét hàm số $f(t) = t^4 - 4t^2 - 16t$ với $t \in [\sqrt{2}; 2]$ Ta có hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[\sqrt{2}; 2]$. $f'(t) = 4t^3 - 8t - 16$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$	0,5
Suy ra $\min_{[\sqrt{2}; 2]} f(t) = -32$, $\max_{[\sqrt{2}; 2]} f(t) = -4 - 16\sqrt{2}$	0,5
Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $-32 \leq 16m \leq -4 - 16\sqrt{2}$ Suy ra giá trị cần tìm của m là: $-2 \leq m \leq \frac{-1 - 4\sqrt{2}}{4}$	0,5

Câu 2.

Cho một bảng gồm 9 ô vuông đơn vị như hình bên. Một em bé cầm 4 hạt đậu đặt ngẫu nhiên vào 4 ô vuông đơn vị trong bảng. Tính xác suất để bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có hạt đậu



Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_9^4$.

Gọi biến cố A: “Bất kỳ hàng nào và cột nào cũng có hạt đậu”.

Biến cố đối $\bar{A}$: “Có ít nhất một hàng hoặc một cột không có hạt đậu”.

Nhận xét: Có đúng một hàng hoặc một cột không có hạt đậu.

Có cột không có hạt đậu có $3.C_6^4$ cách xếp.

Có hàng không có hạt đậu có $3.C_6^4$ cách xếp.

Có một hàng và một cột không có hạt đậu có $C_3^1.C_3^1.C_4^4$ cách.

Suy ra : $n(\bar{A}) = 3.C_6^4 + 3.C_6^4 - C_3^1.C_3^1.C_4^4 = 81.$

Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{81}{C_9^4} = \frac{5}{14}.$

Câu 3. a

$$y' = 3x^2 - 2mx - m^2$$

$$\Delta' = m^2 + 3m^2 = 4m^2.$$

Do đó phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{m+2m}{3} = m, x_2 = \frac{m-2m}{3} = -\frac{m}{3}.$

Để hàm số có cực trị thì $m \neq 0$

Trường hợp 1: $m > 0$, khi đó $x_1 > x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 = m$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_1) > 0$.

Hay $m^3 - m^3 - m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow 8 - m^3 > 0 \Leftrightarrow m < 2.$

Kết hợp điều kiện ta được $0 < m < 2$.

Trường hợp 2: $m < 0$, khi đó $x_1 < x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_2 = -\frac{m}{3}.$

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_2) > 0$.

Hay $-\frac{m^3}{27} - \frac{m^3}{9} + \frac{m^3}{3} + 8 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\sqrt[3]{\frac{216}{5}}.$

Kết hợp điều kiện ta được $-\sqrt[3]{\frac{216}{5}} < m < 0.$

Câu 3. b

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}.$

Ta có phương trình $f(x+1) - \frac{m^2}{x^2 + 3x + 5} = 0 \Leftrightarrow f(x+1) = \frac{m^2}{(x+1)^2 + (x+1) + 3} \quad (1).$

Đặt $t = x+1$, khi đó $-1 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < t < 2.$

Phương trình (1) trở thành $f(t) = \frac{m^2}{t^2 + t + 3} \Leftrightarrow (t^2 + t + 3)f(t) = m^2 \quad (2).$

Xét hàm số $g(t) = (t^2 + t + 3)f(t)$ trên khoảng $(0; 2).$

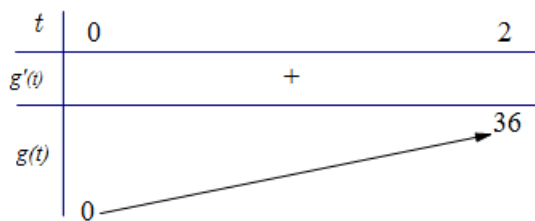
+ $g'(t) = (2t+1).f(t) + (t^2 + t + 3).f'(t).$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $\begin{cases} f(t) > 0, \forall t \in (0; 2) \\ f'(t) > 0, \forall t \in (0; 2) \end{cases}.$

Mặt khác, $2t+1 > 0, t^2 + t + 3 > 0, \forall t \in (0; 2) \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \in (0; 2).$

+ $g(0) = 3.f(0) = 0, g(2) = 9.f(2) = 36.$

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(t)$ trên khoảng $(0; 2).$

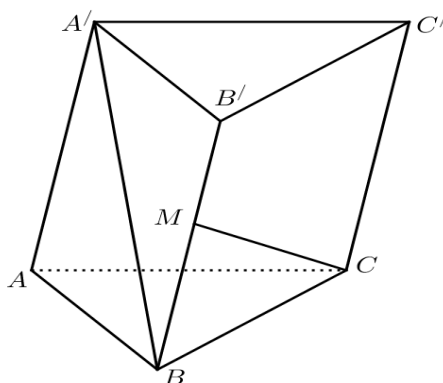


Phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

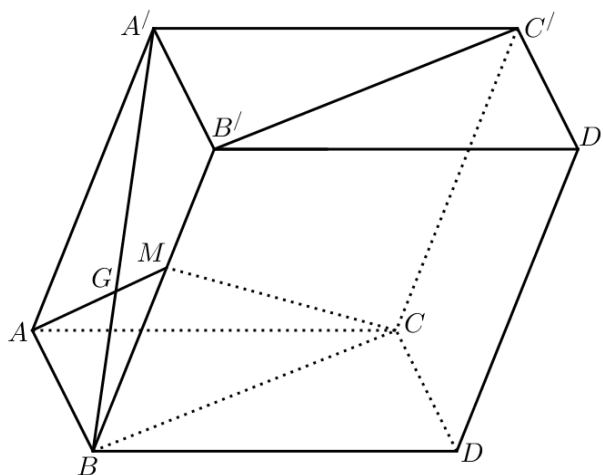
$$t \in (0;2) \Leftrightarrow 0 < m^2 < 36.$$

Câu 4.

- a) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB=2$; $AC=\sqrt{3}$. Góc $CAA'=90^\circ$, $BAA'=120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' . Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



Lời giải



Vẽ hình hộp $ABDC.A'B'D'C'$.

Ta có $CA \perp (ABB'A')$

Ta có $A'B \perp CM$, $A'B \perp CA \Rightarrow A'B \perp (ACM) \Rightarrow A'B \perp AM$

Gọi V là thể tích khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$

$$\text{Khi đó } V = \frac{1}{2} V_{ABDC.A'B'D'C'} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} CA \cdot AB \cdot AA' \cdot \sin 120^\circ$$

Gọi $G = A'B \cap AM$, khi đó G là trọng tâm tam giác ABB' , đặt $AA' = x$, $x > 0$

$$\text{Khi đó } AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 60^\circ} = \frac{2}{3} \sqrt{4 + \frac{x^2}{4} - x} = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

$$BG = \frac{1}{3}A'B = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + AA'^2 - 2AB.AA'.\cos 120^\circ} = \frac{1}{3}\sqrt{4 + x^2 + 2x} = \frac{1}{3}\sqrt{4 + x^2 + 2x}$$

Khi đó

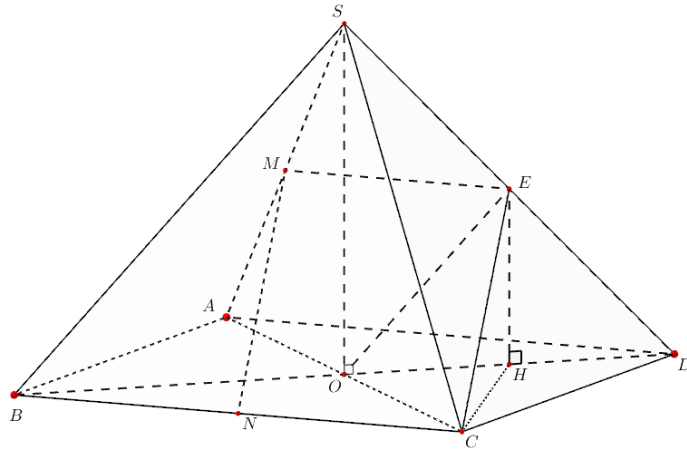
$$AG^2 + BG^2 = AB^2 \Leftrightarrow \frac{1}{9}(x^2 - 4x + 16) + \frac{1}{9}(x^2 + 2x + 4) = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Do $x > 0$ nên $x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$ hay $AA' = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$

Vậy $V = \frac{1}{2}CA.AB.AA'.\sin 120^\circ = \frac{1}{2}.2.\sqrt{3}.\frac{1 + \sqrt{33}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3(1 + \sqrt{33})}{4}$.

b) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O ; cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Gọi E là trung điểm của SD . Chứng minh được tứ giác $MNCE$ là hình bình hành nên $MN \parallel CE$.

Gọi H là trung điểm OD . Ta có EH là đường trung bình của ΔSOD .

Do đó $EH \parallel SO$, mà $SO \perp (ABCD)$ (theo giả thiết $S.ABCD$ là hình chóp đều, tâm O)

$\Rightarrow EH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(MN, (ABCD)) = (CE, (ABCD)) = ECH = 60^\circ$.

Xét ΔCOH : $CH = \sqrt{CO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Xét ΔCEH : $EH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}$; $CE = \frac{CH}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} CO \perp BD \\ CO \perp SO \end{cases} \Rightarrow CO \perp (SBD)$.

Khi đó $(MN, (SBD)) = (CE, (SBD)) = CEO$.

Ta có $OE = \sqrt{EH^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{30a^2}{16} + \frac{2a^2}{16}} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } \cos CEO = \frac{OE}{CE} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 5. (2đ) Cho tứ diện SABC có SA = SB = SC = a. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C' (khác điểm S). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{1}{SA'.SB'} + \frac{1}{SB'.SC'} + \frac{1}{SC'.SA'}$

Định hướng

- Tổng $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = ?$
- Dùng thêm đẳng thức nào để tìm giá trị lớn nhất của Q ?

Giải

Gọi S' là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\text{ta có } \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SS'}{SG}$$

mà G là trọng tâm hình chóp S.ABC nên

$$\frac{SS'}{SG} = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } \frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 4$$

$$\text{hay } \frac{a}{SA'} + \frac{a}{SB'} + \frac{a}{SC'} = 4 \text{ (đpcm).}$$

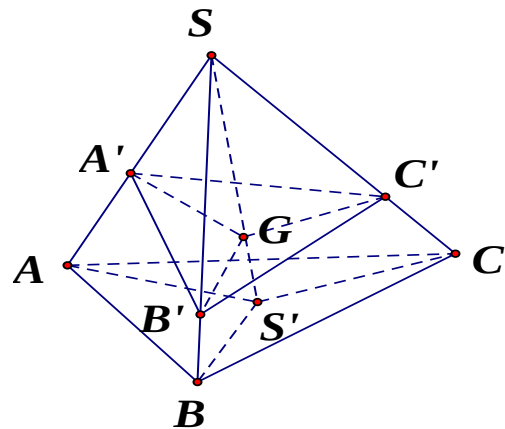
$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 4 \text{ mà } SA = SB = SC = a \text{ nên}$$

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = \frac{4}{a} \Rightarrow 3 \left(\frac{1}{SA'.SB'} + \frac{1}{SB'.SC'} + \frac{1}{SC'.SA'} \right) \leq \left(\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} \right)^2$$

$$\frac{1}{SA'.SB'} + \frac{1}{SB'.SC'} + \frac{1}{SC'.SA'} \leq \frac{16}{3a^2}$$

$$\text{Max} Q = \frac{16}{3a^2} \text{ khi } SA' = SB' = SC' = \frac{3a}{4}.$$

khi đó mặt phẳng (P) đi qua G và song song (ABC)



Câu 6.(2điểm)

Cho các số thực dương a,b,c.tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Giải.

Gv:

- đưa biểu thức chứa a,b,c về tổng (a+b+c)

- Dùng bất đẳng thức cô si : áp dụng cho bộ 2 số và 3 số nên ta phải nhân 6, hệ số của a giảm và b tăng nên ta có $6\sqrt{ab} = 3.2. \sqrt{\frac{a}{2}.2b}$, hệ số của a và b ở

$6.\sqrt[3]{abc}$ phải bù với trước đó để bằng nhau, từ đó tìm hệ số của c

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} = \frac{6a + 6\sqrt{ab} + 6.\sqrt[3]{abc}}{6} = \frac{6a + 3.2. \sqrt{\frac{a}{2}.2b} + 3.\sqrt[3]{\frac{a}{2}.2b.8c}}{6}$$

$$\leq \frac{6a + 3\left(\frac{a}{2} + 2b\right) + \left(\frac{a}{2} + 2b + 8c\right)}{6} = \frac{4}{3}(a + b + c)$$

$$P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Đặt $t = a + b + c, t > 0$. $P \geq f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t > 0$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy Min $P = \frac{-3}{2}$ khi $a = \frac{16}{21}, b = \frac{4}{21}, c = \frac{1}{21}$