

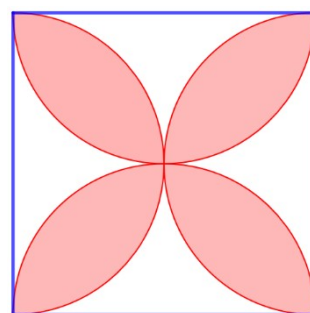
$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} \quad B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{4x + 6}{x - 9} \quad \text{với } x \geq 0, x \neq 9.$$

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{9}$.
2. Rút gọn biểu thức B .
3. Tìm giá trị của x để biểu thức $P = A : B$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 (2,5 điểm).

- 1) Cho một hình chữ nhật, nếu tăng chiều rộng 2cm và giảm chiều dài



1cm thì diện tích hình chữ nhật tăng 9cm^2 , nếu giảm chiều rộng 1cm và tăng chiều dài 2cm thì diện tích của hình chữ nhật không đổi. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu..

- 2) Một viên gạch men hình vuông cạnh bằng 40cm Vẽ bốn nửa hình tròn, đường kính là cạnh của hình vuông và đi qua tâm hình vuông để tạo thành bốn cánh hoa, mỗi cánh hoa là phần chung của hai nửa đường tròn vừa vẽ (như hình vẽ bên). Tính diện tích của bốn cánh hoa đó (làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).

Câu 3. (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$$
2. Trong mặt phẳng tọa độ Ox , cho đường thẳng $d: y = 5x + m$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.
 - a) Tìm giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
 - b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và (P) khi $m = -4$.

Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) và vẽ cát tuyến AEF không đi qua tâm O (E nằm giữa A và F) của đường tròn $(O; R)$. Gọi H là giao điểm của AO và BC .

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.
2. Chứng minh tam giác ABE và tam giác AFB đồng dạng với nhau và $AB \cdot BF = AF \cdot BE$.
3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và M là trung điểm của HO . Chứng minh $MI \perp HO$.

Câu 5 (0,5 điểm). Giải phương trình: $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{x^3 + 3x}$

---HẾT---

HƯỚNG DẪN

Câu 1. (2 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{4x+6}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{9}$.
2. Rút gọn biểu thức B .
3. Tìm giá trị của x để biểu thức $P = A:B$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

$$A = \frac{\sqrt{\frac{1}{9}}+1}{\sqrt{\frac{1}{9}}-3} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-3} = -\frac{1}{2}$$

1. Thay $x = \frac{1}{9}$ (TM) vào biểu thức A ta được:

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì giá trị của biểu thức $A = -\frac{1}{2}$.

2. $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{4x+6}{x-9}$ Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9$

$$B = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{4x+6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{3x - 9\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 4x - 6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{-6(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{-6(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 9$ thì giá trị của biểu thức

3. Ta có: $P = A:B$ Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9$

$$P = \frac{-6(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$P = \frac{-6(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{-6}{\sqrt{x}+3}$$

Ta thấy: $\sqrt{x} \geq 0$ với $\forall x \geq 0, x \neq 9$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \text{ với } \forall x \geq 0, x \neq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{1}{3} \text{ với } \forall x \geq 0, x \neq 9$$

$$\Rightarrow \frac{-6}{\sqrt{x} + 3} \geq -2 \text{ với } \forall x \geq 0, x \neq 9$$

$$\Rightarrow P \geq 2 \text{ với } \forall x \geq 0, x \neq 9$$

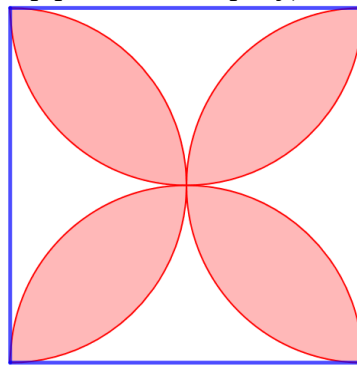
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $x = 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = -2 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 2 (2,5 điểm).

1) Cho một hình chữ nhật, nếu tăng chiều rộng 2cm và giảm chiều dài 1cm thì diện tích hình chữ nhật tăng 9cm^2 , nếu giảm chiều rộng 1cm và tăng chiều dài 2cm thì diện tích của hình chữ nhật không đổi. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu..

2) Một viên gạch men hình vuông cạnh bằng 40cm Vẽ bốn nửa hình tròn, đường kính là cạnh của hình vuông và đi qua tâm hình vuông để tạo thành bốn cánh hoa, mỗi cánh hoa là phần chung của hai nửa đường tròn vừa vẽ (như hình vẽ bên). Tính diện tích của bốn cánh hoa đó (làm tròn đến 1 chữ số thập phân sau dấu phẩy).



Hướng dẫn

1) Gọi chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật ban đầu lần lượt là $x(\text{cm})$ và $y(\text{cm})$,
($x > 1, y > 1$).

Khi tăng chiều rộng 2cm và giảm chiều dài 1cm ta được chiều rộng và chiều dài mới lần lượt là:
 $x + 2(\text{cm})$ và $y - 1(\text{cm})$.

Theo đề bài ta có phương trình: $(x + 2)(y - 1) - xy = 9 \Leftrightarrow -x + 2y = 11$ (1).

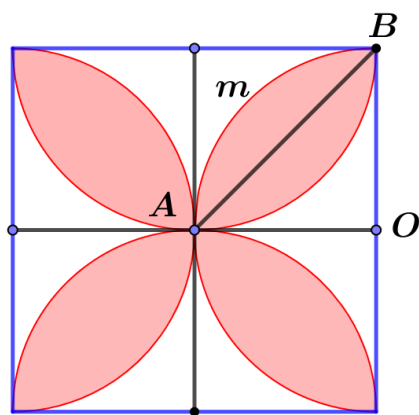
Khi giảm chiều rộng 1cm và tăng chiều dài 2cm ta được chiều rộng và chiều dài mới lần lượt là:
 $x - 1(\text{cm})$ và $y + 2(\text{cm})$.

Theo đề bài ta có phương trình: $(x - 1)(y + 2) = xy \Leftrightarrow 2x - y = 2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -x + 2y = 11 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật ban đầu là $5(\text{cm})$ và $8(\text{cm})$.

2)



Xét nửa đường tròn (O, OA) như hình vẽ.

Ta có tam giác OAB vuông cân tại O , $OA = OB = 20\text{cm} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA^2 = 200(\text{cm}^2)$.

Diện tích hình quạt OAB là: $S_1 = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 90}{360} = 100\pi(\text{cm}^2)$.

Diện tích hình viên phân AmB là: $S_2 = S_1 - S_{\Delta OAB} = 100\pi - 200(\text{cm}^2)$.

Tổng diện tích bốn cánh hoa là $S = 8(100\pi - 200) \approx 913,3(\text{cm}^2)$.

Câu 3. (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Ox , cho đường thẳng $d: y = 5x + m$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.

a) Tìm giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và (P) khi $m = -4$.

Hướng dẫn

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 8x - 4y = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 11x = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-2; 3)$.

2. Xét phương trình hoành độ giữa d và (P) ta được:

$$x^2 = 5x + m \Leftrightarrow x^2 - 5x - m = 0 \quad (1)$$

a) Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = 25 + 4m$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 25 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{25}{4}$

Vậy khi $m > -\frac{25}{4}$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Khi $m = -4$ thì (1) trở thành: $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Khi $x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Khi $x = 4 \Rightarrow y = 16$.

Vậy khi $m = -4$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $A(1;1)$ và $B(4;16)$.

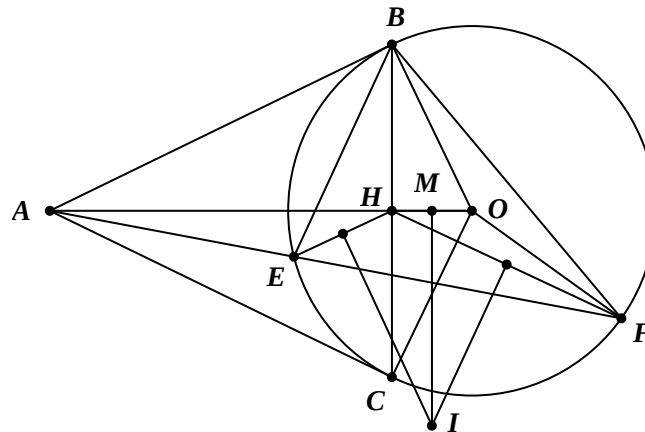
Câu 4. (3 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) và vẽ cát tuyến AEF không đi qua tâm O (E nằm giữa A và F) của đường tròn $(O; R)$. Gọi H là giao điểm của AO và BC .

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2. Chứng minh tam giác ABE và tam giác AFB đồng dạng với nhau và $AB \cdot BF = AF \cdot BE$.

3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và M là trung điểm của HO . Chứng minh $MI \perp HO$.

Hướng dẫn



1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

Tứ giác $ABOC$ có $\angle ABO = \angle ACO = 90^\circ$ (tính chất của tiếp tuyến) nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO .

2. Chứng minh tam giác ABE và tam giác AFB đồng dạng với nhau và $AB \cdot BF = AF \cdot BE$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle AFB$ có:

$\angle BAE$ chung;

$\angle ABE = \angle AFB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\widehat{BE}$)

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle AFB (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AF}{BF} \Leftrightarrow AB \cdot BF = AF \cdot BE$$

3. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và M là trung điểm của HO . Chứng minh $MI \perp HO$.

Ta có $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), mà $OB = OC$ (bán kính (O)) $\Rightarrow AO$ là trung trực của $BC \Rightarrow AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC .

Trong tam giác ABO vuông tại B có BH là đường cao, ta có: $AB^2 = AH \cdot AO$ (1);

$$\Delta ABE \sim \Delta AFB \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AE \cdot AF \quad (2);$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có} \quad AH \cdot AO = AE \cdot AF (= AB^2) \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AF}{AO}.$$

Xét ΔAHE và ΔAFO có:

$$\frac{AH}{AE} = \frac{AF}{AO} \quad (\text{chứng minh trên})$$

$\Delta AHE \sim \Delta AFO$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHE = \angle AFO \Rightarrow$ tứ giác $EHOF$ có góc ngoài đỉnh H bằng góc trong đỉnh F nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ bốn điểm E, H, O, F cùng nằm trên đường tròn.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EHOF$, mà M là trung điểm của dây OH nên $IM \perp OH$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây).

Vậy $MI \perp HO$.

Câu 5 (0,5 điểm). Giải phương trình: $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{x^3 + 3x}$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } x^2 - 2x + 3 = \sqrt{x^3 + 3x} \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 = \sqrt{x(x^2 + 3)}$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \geq 0$$

Cách 1 : Đặt ẩn phụ

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + 3} = a \ (a > 0); \sqrt{x} = b \ (b \geq 0)$$

$$\text{Ta có phương trình: } a^2 - 2b^2 - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) - (b^2 + ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) - b(b+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=2b \end{cases}$$

$$\text{TH1: } a+b=0$$

Không thể xảy ra vì $a > 0; b \geq 0$

$$\text{TH2: } a=2b$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 + 3} = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 + 3 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \ (t/m) \\ x=3 \ (t/m) \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x=1$ và $x=3$

Cách 2: Bình phương hai vế đưa về phương trình tích

$$\text{Bình phương hai vế ta có: } \left[(x-1)^2 + 2 \right]^2 = x^3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^4 + 4(x-1)^2 + 4 = x(x^2 + 3)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^4 + 4(x-1)^2 - x(x^2 - 1) + 4(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^3 + 4(x-1) - x(x+1) - 4\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 - 4x^2 + 6x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2 - x + 3) = 0$$

$$x^2 - x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \quad \forall m$$

Nhận xét:

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (t/m)} \\ x=3 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x=1$ và $x=3$

Cách 3: Tách hạng tử đưa về phương trình tích

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 - 4x + 2x - \sqrt{x(x^2 + 3)} = 0$$

PT đã cho

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 3})^2 - (2\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}(2\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x}) + \sqrt{x}(2\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x} - \sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x} = 0 \quad (\text{vì } \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (t/m)} \\ x=3 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

Kết luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x=1$ và $x=3$

---HẾT---

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

