



Chương

Bài 2.

HÀM SỐ BẬC HAI



Lý thuyết

1. Hàm số bậc hai



Định nghĩa

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$,

Trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý :

» Khi $a=0, b \neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.
» Khi $a=b=0$, hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai



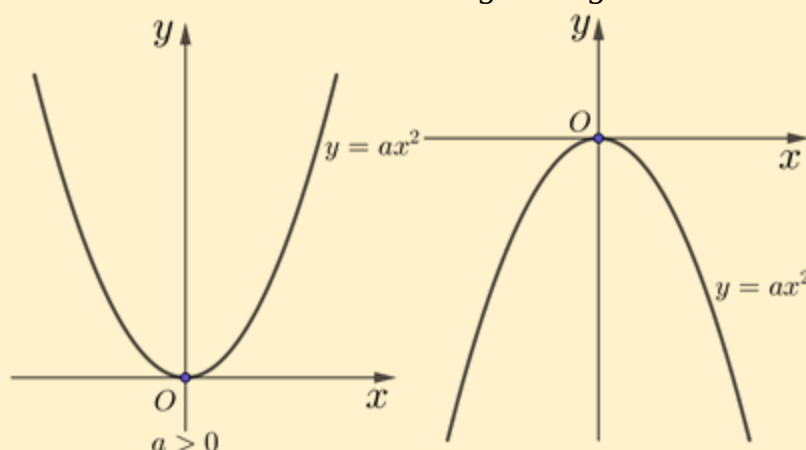
Đồ thị hàm số: $y = ax^2$

Đồ thị hàm số $y = ax^2$ là các đặc điểm sau:

» Đỉnh là gốc $O(0;0)$.

» Có trục đối xứng là $x=0$.

» Hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$ và hướng xuống khi $a < 0$.





Đồ thị hàm số:

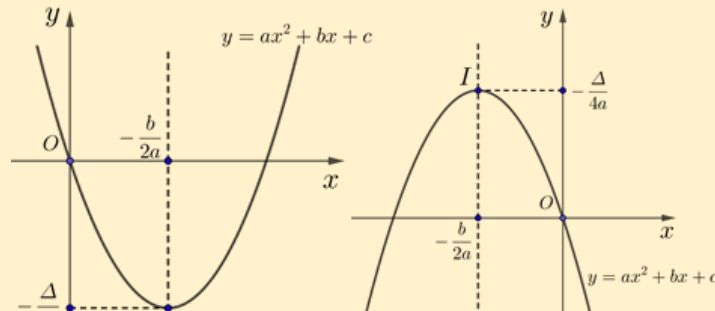
Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường Parabol có:

» Đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

» Có trục đối xứng: đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

» $a > 0$: Bề lõm hướng lên trên.

» $a < 0$: Bề lõm hướng xuống dưới.



Cách vẽ:

1. Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

2. Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

3. Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có)

3. Chiều biến thiên của hàm số bậc hai



Cách vẽ:

► Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

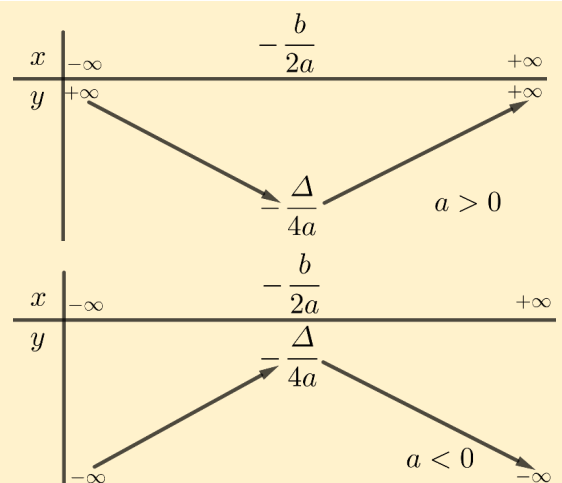
» Nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

» Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

► Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

» Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

» Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.





Bảng biến thiên của hàm số: $y=ax^2+bx+c$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định hàm số bậc 2



Phương

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (xác định các tham số a, b, c)

Dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c .
Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

» Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

» Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

$$I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{D}{4a} = y_I \end{cases}$$

» Đồ thị hàm số có đỉnh là

» Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này giá trị lớn nhất $f(x)$ là $-\frac{D}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.



Ví dụ 1.1.

Xác định parabol

(1) $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết (P) qua $M(1; 5)$, có trục đối xứng là $x = -\frac{1}{4}$.

(2) $(P): y = ax^2 + 2x + c$, biết $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$ là đỉnh của (P) .

(3) $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết (P) đi qua $A(1; -1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -3)$

(4) $(P): y = ax^2 - 4x + c$ biết hoành độ đỉnh (P) bằng -3 và (P) qua

Lời giải

(1) $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết (P) qua $M(1; 5)$, có trục đối xứng là (P) .

Ta có:
$$\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = 2x^2 + x + 2$$

(2) $(P): y = ax^2 + 2x + c$, biết $x = -\frac{1}{4}$ là đỉnh của $(P): y = ax^2 + 2x + c$.



$$\text{Ta có: } \begin{cases} -\frac{2}{2a} = \frac{1}{2} \\ -\frac{4+8c}{-8} = \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -2x^2 - 2x + 5$$

(3) $(P): y = -2x^2 - 2x + 5$, biết (P) đi qua $C(-1; -3)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -1 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 3 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow (P): y = x^2 + x - 3$$

(4) $(P): y = ax^2 - 4x + c$ biết hoành độ đỉnh (P) bằng $-\frac{2}{3}$ và (P) qua $M(-2; 1)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} -\frac{4}{2a} = -\frac{2}{3} \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x - \frac{13}{3}$$



Ví dụ 1.2.

Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số có trục đối xứng là $x = -\frac{2}{3}$ và đi qua điểm $M(1; -1)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$, do hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất nên $a < 0$.

$$\text{Do đó theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{3} \\ 4a - 2b + c = 5 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{8}{3} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$.



Ví dụ 1.3.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$) đi qua điểm $I(1; -1)$.

Lời giải

Đỉnh của (P) là $I(1; -4m - 2)$.

Theo giả thiết, I thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$ nên $-4m - 2 = 3 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$.



▣ Dạng 2. Vẽ đồ thị hàm số bậc 2



Phương

Để vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ta thực hiện theo các bước sau:

» **Bước 1.** Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

» **Bước 2.** Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

» **Bước 3.** Lập bảng giá trị

x	x_1	x_2	$x = -\frac{b}{2a}$	x_3	x_4
y	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$y(x_3)$	$y(x_4)$

» **Bước 4.** Vẽ Parabol

Lưu ý:

- Khi vẽ cần chú ý dấu của hệ số a (bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$)
- Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; c)$
- Đồ thị của hàm số cắt trục hoành (nếu có) tại điểm $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm



Ví dụ 2.1.

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$.

Lời giải

Ta có $a=1, b=-2, c=3$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(1; -1)$.

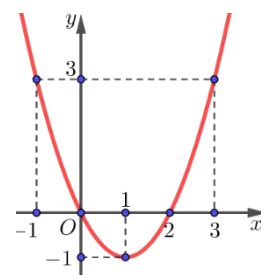
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1; -1)$ và trục đối xứng là $x=1$.
Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ là





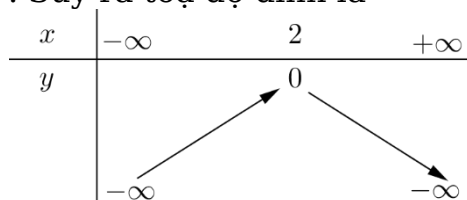
Ví dụ 2.2.

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

Liên hệ biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Lời giải

Ta có $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = -2$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(2;0)$.

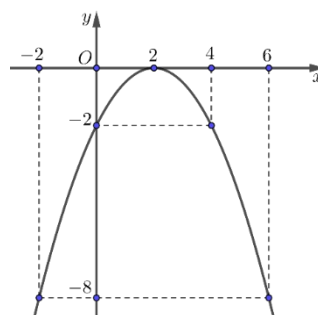


Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(2;0)$ và trục đối xứng là $x = 2$.
Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	-8	-2	0	-2	-8

Ta có đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ là



Ví dụ 2.3.

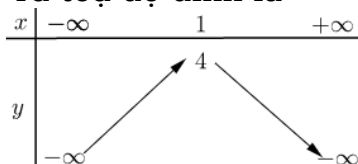
Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

- (1) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- (2) Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$

Lời giải

- (1) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.

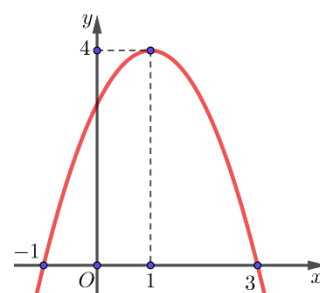
Ta có $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(1;4)$.



Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1;4)$ và trục đối xứng là $x = 1$.
Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	0	3	4	3	0





Ta có đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ là

(2) Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

Từ đồ thị ta thấy để $y > 0$ thì $x \in (-1; 3)$ và $y < 0$ thì $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.



▮ Dạng 3. Tìm tham số để hàm số bậc 2 đơn điệu



Phương

» Trường hợp $a=0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b>0 \end{cases}$.

» Trường hợp $a>0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ (m;n) \subset \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right) \end{cases}$.

» Trường hợp $a<0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ (m;n) \subset \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \end{cases}$.

Lưu ý:

» Việc tìm điều kiện để hàm số $y=ax^2+bx+c$ nghịch biến trên khoảng $(m;n)$ được làm tương tự.



Ví dụ 3.1.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

(1) $y=-x^2+2mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;3)$.

(2) $y=-4x^2+4mx-m^2+2$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$.

Lời giải

(1) $y=-x^2+2mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;3)$.

Ta có $a=-1<0$, $-\frac{b}{2a}=m$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;m)$.

Do vậy, yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Kết luận: $m \geq 3$.

(2) $y=-4x^2+4mx-m^2+2$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$.

Ta có $a=-4<0$; $-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{m}{2};+\infty\right)$.

Do vậy, yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \frac{m}{2} \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -4$.

Kết luận: $m \leq -4$.



Ví dụ 3.2.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

(1) $y=(m^2+1)x^2-4mx+1$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

(2) $y=mx^2-(m^2+1)x+3$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.



Lời giải

(1) $y = (m^2 + 1)x^2 - 4mx + 1$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Ta có $a = m^2 + 1 > 0$, $-\frac{b}{2a} = \frac{2m}{m^2 + 1}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{2m}{m^2 + 1}\right)$.

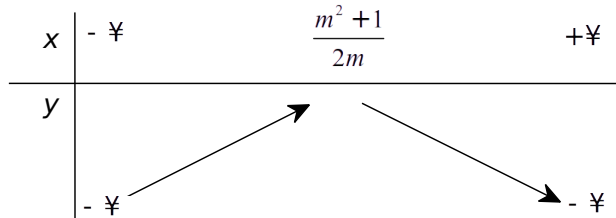
Do vậy, yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \frac{2m}{m^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m=1$.
Kết luận: $m=1$.

(2) $y = mx^2 - (m^2 + 1)x + 3$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

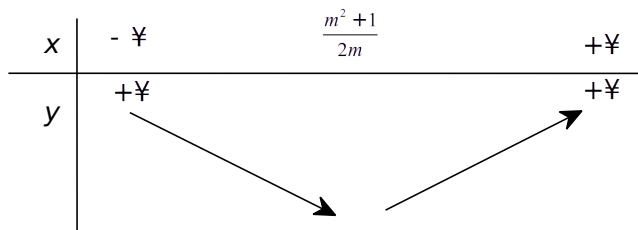
Ta có $a = m$, $-\frac{b}{2a} = \frac{m^2 + 1}{2m}$ với $m \neq 0$.

» Trường hợp $m=0$: $y = -x + 3$, là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên loại $m=0$.

» Trường hợp $m < 0$: $a = m < 0$ nên hàm số có BBT như sau:



Dựa vào BBT thấy hàm số không thể đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tức $m < 0$ bị loại.
» Trường hợp $m > 0$: Ta có $a = m > 0$ nên hàm số có BBT như sau:



Dựa vào BBT thấy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{1+m^2}{2m} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1+m^2 \leq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.
Tóm lại: $m=1$.



Ví dụ 3.3.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

$$y = mx^2 + 2(m-1)x + 2m+1 \text{ nghịch biến trên } (-1; 2).$$

Lời giải

Ta có $a = m$, $-\frac{b}{2a} = \frac{1-m}{m}$ với $m \neq 0$.



» Trường hợp $m=0$: Hàm số đã cho trở thành $y=-2x+1$, là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng nghịch biến trên $(-1;2)$. Tức $m=0$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

» Trường hợp $m<0$: Ta có $a=m<0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1-m}{m}; +\infty\right)$

Do vậy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \frac{1-m}{m} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq 0$, đúng với $m<0$.

» Trường hợp $m>0$: Ta có $a=m>0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1-m}{m}\right)$.

Do vậy yêu cầu của bài toán $\frac{1-m}{m} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1-3m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$.

Tóm lại: $m \leq \frac{1}{3}$.



Ví dụ 3.4.

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

$$y=(m-2)x^2 - 2mx + m + 2025 \text{ nghịch biến trên } (-\infty; 3).$$

Lời giải

» Trường hợp $m=2 \Rightarrow y=-4x+2019$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên nghịch biến trên $(-\infty; 3)$. Tức $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

» Trường hợp $m \neq 2$: Dựa vào sự biến thiên hàm bậc hai ta thấy

$$f(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-\infty; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ \frac{m}{m-2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Từ các trường hợp trên, suy ra: $2 \leq m \leq 3$

Vậy $2 \leq m \leq 3$.



▮ Dạng 4. Các yếu tố liên quan đồ thị hàm số bậc hai



Phương

Loại 1:

Cho parabol: $(P): y = ax^2 + bx + c$.

- » Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của (P) .
- » Tương giao của (P) với trục Ox .
- » Tìm điều kiện để các giao điểm của (P) và trục Ox thỏa mãn điều kiện nào đó.

Thường dùng đến các kết quả sau:

Đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$ là trục đối xứng của (P) , điểm $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right)$ là đỉnh của (P) .

Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là hoành độ giao điểm của (P) và Ox .

» Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm của (P) và trục Ox . Khi đó:

□ A, B **cùng ở bên trái** đối với trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ x_A + x_B < 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$.

□ A, B **cùng ở bên phải** đối với trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ x_A + x_B > 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$.

□ A, B **cùng ở một bên** đối với trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} D \geq 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$.

□ A, B **không ở cùng một bên** đối với trục Oy $\Leftrightarrow x_A \cdot x_B < 0$.

Loại 2:

Cho parabol: $(P): y = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng $d: y = mx + n$

- » Biện luận số điểm chung của (P) và trục hoành.

(D)



Ví dụ 4.1.

Cho parabol $(P): y = x^2 + 5x - 6$. Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của parabol (P) , tọa độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

➤ **Lời giải**



Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$, $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49}{4}$, do vậy:

(P) có trục đối xứng là $x = -\frac{5}{2}$;

(P) có đỉnh là $I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{49}{4}\right)$.

Hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành là nghiệm của

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) với trục hoành là $(1; 0), (-6; 0)$.



Ví dụ 4.2.

Cho parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$. Xét dấu của D, b, c biết rằng (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

Lời giải

$$(P) \text{ cắt } Ox \text{ tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$



Ví dụ 4.3.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P): $y = x^2 - 2x + m - 1$ và trục Ox không có điểm chung.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (*)

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$. Vậy $m > 2$.



Ví dụ 4.4.

Cho parabol (P): $y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng $d: y = ax + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để d tiếp xúc với (P)

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (P); d là: $x^2 + x + 2 = ax + 1$
 $\Leftrightarrow x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$ (1)



d tiếp xúc với $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - a)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$.
Vậy $a \in \{-1; 3\}$.



▮ Dạng 5. Sự tương giao



Phương

Loại 1: Dựa vào đồ thị của hàm số $f(x)$ biện luận theo tham số m số nghiệm của $f(x) = g(m)$

» Vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x)$.

» Tùy vào giá trị của để chỉ ra số giao điểm của $d: y = g(m)$ và (C) .

» Số giao điểm của d và (C) cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$.

Lưu ý: $d: y = g(m)$ là đường thẳng có phương ngang và cắt Oy tại điểm có tung độ $g(m)$.

Loại 2: Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2) .



Ví dụ 5.1.

Tìm toạ độ giao điểm của Parabol $(P): y = -x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng d .

🔗 **Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm

Với $x = -1 \Rightarrow y = 4$; $x = -2 \Rightarrow y = 5$.

Toạ độ giao điểm của (P) và d là $A(-1; 4), B(-2; 5)$.

$$-x^2 - 4x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$



Ví dụ 5.2.

Cho Parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) . Tìm toạ độ tiếp điểm khi đó



Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 3x + 2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - (3+m)x = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m+3 \end{cases}$

Để d tiếp xúc với (P) thì $m+3=0 \Leftrightarrow m=-3$.

Tọa độ tiếp điểm khi đó là $M(0;2)$.

Nhận xét: Từ phương trình (1) ta tính $D' = (m+3)^2$. Để d tiếp xúc với (P) thì (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow D' = 0 \Leftrightarrow m = -3$.



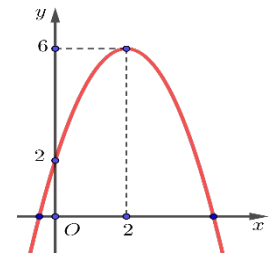
Ví dụ 5.3.

Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị tìm các giá trị của tham số m để phương trình $-x^2 + 4x + 2 = m$ có 2 nghiệm phân

Lời giải

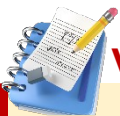
$-x^2 + 4x + 2 = m$ (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) của $y = -x^2 + 4x + 2$ và $d: y = m$.

Số nghiệm phương trình (1) bằng số giao điểm của (P) và (d) .



Dựa vào đồ thị ta thấy, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 6$.

Vậy $m < 6$.



Ví dụ 5.4.

Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có đồ thị (P) như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị, tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương.

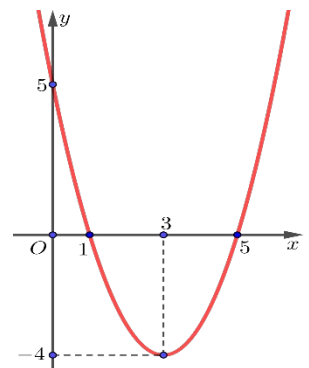
Lời giải

Phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = -3m + \frac{11}{2}$ (1)

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của

$(P) y = x^2 - 6x + 5$ và đường thẳng $(d) y = -3m + \frac{11}{2}$.

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của (P) và (d) .



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -4 < -3m + \frac{11}{2} < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < m < \frac{19}{6}$.



Vậy $\frac{1}{6} < m < \frac{19}{6}$.



▣ Dạng 6. Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất



Phương

Loại 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 tập cho trước

- » Lập bảng biến thiên
- » Xác định tập bài toán yêu cầu
- » Kết luận.

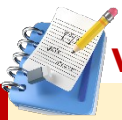
Loại 2: Tìm điều kiện để hàm số bậc hai đạt giá trị lớn nhất/nhỏ nhất.

Cho hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

» Nếu $a > 0$ thì $\min y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a}$.

» Nếu $a < 0$ thì $\max y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{D}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a}$.

Trường hợp tập xác định khác $\mathbb{R}$, ta kẻ bảng biến thiên của hàm số trên tập đó để có được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.



Ví dụ 6.1.

Cho hàm số $y = x^2 - 4x - 3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên

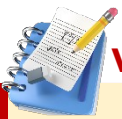
👉 **Lời giải**

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$; $\frac{-D}{4a} = \frac{(-4)^2 - 4 \cdot (-3)}{4 \cdot 1} = \frac{-28}{4} = -7$

Vì $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$,
đồng biến trên $(2; +\infty)$.

x	-3	2	5
y	18	-7	2

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min y = y(2) = -7$ và $\max y = y(-3) = 18$



Ví dụ 6.2.

Cho hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[2; 7]$

👉 **Lời giải**

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$; $\frac{-D}{4a} = -\frac{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}{4 \cdot (-2)} = 5$

Vì $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$,
nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

x	2	7
y	3	-67

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min y = y(7) = -67$ và $\max y = y(2) = 3$



Ví dụ 6.3.

Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y_I = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$. (Thỏa mãn)



Ví dụ 6.4.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$. Tính abc .

Lời giải

Để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$ và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow abc = 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6$$



Ví dụ 6.5.

Cho hàm số $y = mx^2 - 2x - m - 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2m} = \frac{1}{m}$, suy ra $y_I = m \left(\frac{1}{m} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{m} \right) - m - 1 = \frac{-m^2 - m - 1}{m}$

» **Trường hợp 1:** Khi $m < 0$ thì $\max y = y_I = \frac{-m^2 - m - 1}{m}$ tại điểm $x_I = \frac{1}{m}$.

$$y_I = f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{-m^2 - m - 1}{m} - 1 + 1 = \frac{-m^2 - 2m - 1}{m} + 1 = \frac{-(m+1)^2}{m} + 1 \geq 0 + 1 = 1$$

Vậy $\min y_I = 1$ tại điểm $m = -1$.

» **Trường hợp 2:** Khi $m > 0$ thì hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất, chỉ có giá trị nhỏ nhất.

» **Trường hợp 3:** Khi $m = 0$ thì hàm số $y = -2x - 1$ đã cho là hàm số bậc nhất, không có giá trị lớn nhất.



Kết luận: $m = -1$.



Dạng 7. Bài toán thực tế



Phương

Bài toán: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

- » **Bước 1:** Dựa vào giả thiết của đề bài, xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức diễn tả dưới “*dạng ngôn ngữ toán học*” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.
- » **Bước 2:** Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.
- » **Bước 3:** Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở **bước 2**. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.



Ví dụ 7.1.

Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

(1) Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

Lời giải

(1) Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

Ta có: $h(t) = -t^2 + 2t + 3 \Leftrightarrow h(t) = -(t-1)^2 + 4 \Rightarrow \max h(t) = h(1) = 4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t=1$ giây.

(2) Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất ?

Ta có: $-t^2 + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại) hoặc $t = 3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.



Ví dụ 7.2.

Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây ?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Lời giải

Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t) = at^2 + bt + c$ (tính bằng mét), t : giây, $t \geq 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:



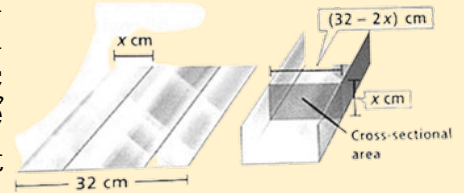
$$\begin{cases} c=0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 28 \\ a + b + c = 48 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 64 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = -16t^2 + 64t \Rightarrow h(3) = 48$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.



Ví dụ 7.3.

Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$$S(x) = x(32 - 2x), \text{ với } 0 < x < 16.$$

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 16)$.

$$S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x - 8)^2 + 128 \leq 128, \forall x \in (0; 16)$$

Ta có:

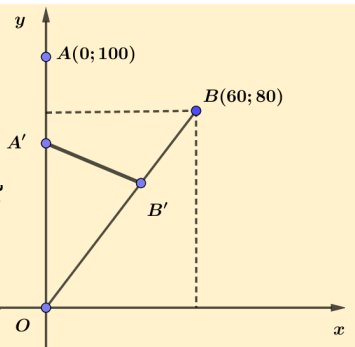
$$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128$$

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.



Ví dụ 7.4.

Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0; 100)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 5 m/s. Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60; 80)$ đến $O(0; 0)$ với vận tốc 10 m/s. Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là



Lời giải

Xét tại thời điểm t (giây), $t \in [0; 10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0; 100 - 5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60; 80)$ về $O(0; 0)$ trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ

số góc là $k = \tan a = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}, \sin a = \frac{4}{5}$.



Do đó tại thời điểm t , nó có tọa độ là $\begin{cases} x=60-10t.\cos\alpha \\ y=80-10t.\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=60-6t \\ y=80-8t \end{cases}$
 $\Rightarrow B(60-6t; 80-8t)$

Ta có: $\overline{AB'} = (60-6t; -20-3t)$

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$$d = \overline{AB'} = \sqrt{(60-6t)^2 + (-20-3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

d nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 10]$.

Ta có: $f(t) = 45(3t-20)^2 + 2000 \geq 2000, \forall t \in [0; 10]$

$$\Rightarrow \min_{t \in [0; 10]} f(t) = f\left(\frac{20}{3}\right) = 2000$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.



Ví dụ 7.5.

Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là:

$$40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$$

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000; 50000]$

$$f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$$

Ta có:

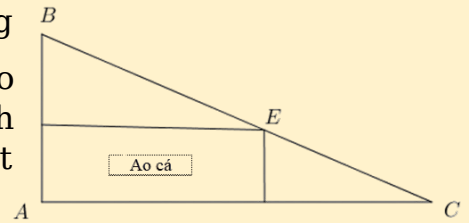
$$\Rightarrow \max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

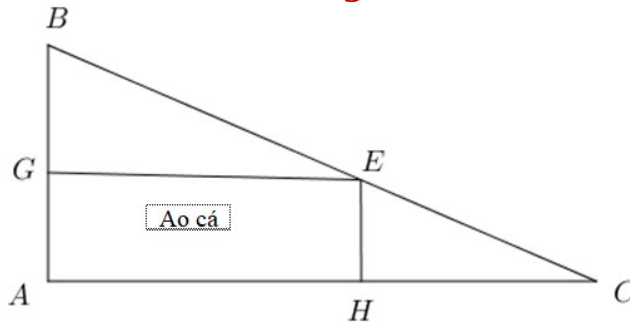


Ví dụ 7.6.

Ông Tiến có một mảnh đất hình tam giác vuông ABC có diện tích $125m^2$. Ông Tiến có ý định đào ao thả cá có dạng hình chữ nhật trên khu đất của mình (như hình vẽ). Hỏi rằng ông Tiến có thể đào một cái ao với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?



Lời giải



Giả sử ao cá hình chữ nhật $AHEG$ như hình vẽ.
Diện tích ao là $S = AH \cdot HE$.

Đặt $x = \frac{BE}{BC}$, ($0 < x < 1$)

Theo Talet ta có $\frac{AH}{AC} = \frac{BE}{BC} = x \Rightarrow AH = x \cdot AC$

và $\frac{HE}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{BC - BE}{BC} = 1 - x \Rightarrow HE = (1 - x) \cdot AB$

khi đó $S = AH \cdot HE = x(1 - x)AB \cdot AC = -250x^2 + 250x$,

Ta xét hàm số $S = -250x^2 + 250x$ với $x \in (0; 1)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	62,5	0	$-\infty$

Vậy ông Tiến có thể đào ao thả cá với diện tích lớn nhất là $62,5m^2$ khi đỉnh E là trung điểm của cạnh huyền BC .