

CHUYÊN ĐỀ 3: ĐỘ DÀI CUNG TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT, HÌNH VÀNH KHĂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

(ghi lại nội dung chính của bài/ của chương: dạng liệt kê, bảng hoặc sơ đồ tư duy)

1. Công thức tính độ dài đường tròn

$$C = \pi d \text{ hay } C = 2\pi R \text{ vì } d = 2R$$

C là độ dài đường tròn

2. Công thức tính độ dài cung tròn

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

l là độ dài cung tròn

R là bán kính đường tròn

n° là số đo độ của cung tròn

3. Công thức diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$S = \pi R^2$$

4. Công thức diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức:

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S_q = \frac{lR}{2}.$$

(l là độ dài cung n° của hình quạt tròn).

5. Công thức diện tích hình vành khăn (vành khuyên)

Diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính là R và r được tính theo công thức: $S_v = \pi \cdot (R^2 - r^2)$ với $R > r$.

B. BÀI TẬP

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Độ dài cung tròn 60° của một đường tròn có bán kính $5cm$ bằng

- A.** $10\pi cm$. **B.** $\frac{5\pi}{3} cm$. **C.** $\frac{5\pi}{6} cm$. **D.** $\frac{25\pi}{6} cm$.

Lời giải

Chọn B

Độ dài cung tròn 60° của một đường tròn có bán kính $5cm$ bằng:

$$l = \frac{n \cdot \pi \cdot R}{180} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 5}{180} = \frac{5\pi}{3} cm.$$

Câu 2. [NB] Độ dài cung tròn 60° của một đường tròn có đường kính $6dm$ bằng

- A.** $12\pi dm$. **B.** $2\pi dm$. **C.** πdm . **D.** $36\pi dm$.

Lời giải

Chọn C

Bán kính của đường tròn đó là $6 : 2 = 3dm$

Độ dài cung tròn 60° của một đường tròn có đường kính $6dm$ bằng:

$$l = \frac{n \cdot \pi \cdot R}{180} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 3}{180} = \pi dm.$$

Câu 3. [NB] Diện tích hình quạt tròn cung 30° của một đường tròn có bán kính $4cm$ bằng

- A.** $\frac{2\pi}{3} cm^2$. **B.** $\frac{4\pi}{3} cm^2$. **C.** $8\pi cm^2$. **D.** $16\pi cm^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình quạt tròn cung 30° của một đường tròn có bán kính $4cm$ bằng:

$$S_q = \frac{n}{360} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{30}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{4\pi}{3} cm^2$$

Câu 4. [NB] Diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là $4cm$ và $6cm$ là

- A.** $16\pi cm^2$. **B.** $36\pi cm^2$. **C.** $20\pi cm$. **D.** $20\pi cm^2$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là $4cm$ và $6cm$ là:

$$S = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (6^2 - 4^2) = 20\pi cm^2$$

Câu 5. [TH] Gọi S là diện tích của một hình tròn tâm O , bán kính R . Khẳng định nào sau đây đúng:

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

- A.** Nếu R tăng gấp đôi thì S tăng lên 4 lần
B. Nếu R tăng gấp đôi thì S tăng lên 2 lần
C. Nếu R tăng lên k lần thì S tăng lên $k + 2$ lần
D. Nếu R tăng lên k lần thì S tăng lên $2k$ lần

Lời giải

Chọn A

Vì $S = \pi \cdot R^2$ nên

+ Nếu R tăng gấp đôi thì S tăng lên 4 lần. Đáp án A đúng, đáp án B sai

+ Nếu R tăng lên k lần thì S tăng lên k^2 lần. Đáp án C, D sai

Câu 6. [TH] Tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn (có cùng bán kính) bằng

- A.** $\frac{n}{90}$. **B.** $\frac{n}{180}$. **C.** $\frac{n}{180}$. **D.** $\frac{n}{360}$

Lời giải

Chọn D

Độ dài cung n° có bán kính R là $l = \frac{n \cdot \pi \cdot R}{180}$

Độ dài đường tròn có bán kính R là $l = 2\pi R$

Tỉ số giữa độ dài cung n° và độ dài đường tròn (có cùng bán kính) bằng $\frac{n \cdot \pi \cdot R}{180} : 2\pi R = \frac{n}{360}$

Câu 7. [TH] Diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông cạnh $4cm$ bằng

- A.** $25cm^2$ **B.** $16cm^2$ **C.** $15,3cm^2$ **D.** $12,56cm^2$

Lời giải

Chọn D

Hình tròn nội tiếp một hình vuông cạnh $4cm$ nên đường kính của đường tròn cũng bằng $4cm$

Do đó diện tích của hình tròn bằng $S = \pi \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4\pi \simeq 12,56cm^2$

Câu 8. [TH] Cho đường tròn $(O; 6cm)$ và lấy một điểm I sao cho $OI = 3cm$. Kẻ dây AB vuông góc với OI tại I . Độ dài của cung nhỏ AB (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) bằng

A. 12,6cm .

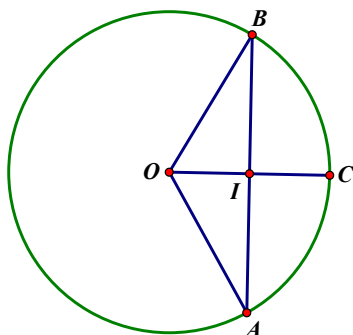
B. 12,5cm .

C. 6,2cm .

D. 6,3cm .

Lời giải

Chọn A



Vì dây AB vuông góc với OI tại I nên $\angle BIO = 90^\circ$

Do đó $\triangle BOI$ vuông tại I . Áp dụng tỉ số lượng giác trong $\triangle BOI$ ta được:

$$\cos \angle BOC = \frac{OI}{OB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ . Vậy } \angle BOC = 60^\circ$$

Xét $\triangle OAB$ cân tại $O (OA = OB = R)$, có OI là đường cao nên OI cũng là đường phân giác

$$\text{Do đó: } \angle AOB = 2 \cdot \angle BOC = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Xét (O) có $\angle AB = \angle AOB = 120^\circ$ (góc ở tâm chắn cung AB)

$$\text{Độ dài cung nhỏ AB bằng } l = \frac{120 \cdot \pi \cdot 6}{180} \simeq 12,6 \text{ cm}$$

Câu 9. [VD] Cho đường tròn $(O; 6\text{cm})$ và lấy một điểm I sao cho $OI = 3\text{cm}$, Kẻ dây AB vuông góc với OI tại I . Diện tích hình quạt tròn OAB (làm tròn đến hàng phần mười) bằng

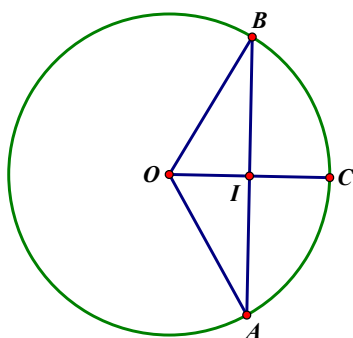
A. 18,8cm² .

B. 18,9cm² .

C. 37,7cm² .

D. 37,6cm² .

Chọn C



CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Vì dây AB vuông góc với OI tại I nên $\angle BIO = 90^\circ$

Do đó $\triangle BOI$ vuông tại I . Áp dụng tỉ số lượng giác trong $\triangle BOI$ ta được:

$$\cos \angle BOC = \frac{OI}{OB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } \angle BOC = 60^\circ$$

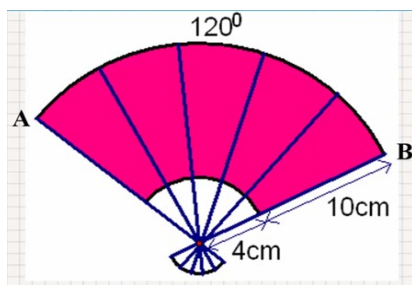
Xét $\triangle OAB$ cân tại $O (OA = OB = R)$, có OI là đường cao nên OI cũng là đường phân giác

$$\text{Do đó: } \angle AOB = 2 \cdot \angle BOC = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Xét (O) có $\angle AB = \angle AOB = 120^\circ$ (góc ở tâm chắn cung AB)

$$\text{Diện tích hình quạt tròn } OAB \text{ bằng } S_{OAB} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 6^2}{360} \approx 37,7 \text{ cm}^2.$$

Câu 10. [VD]] Diện tích của phần giấy để làm chiếc quạt như hình vẽ sau bằng



A. $\frac{196\pi}{3} \text{ cm}^2$

B. $\frac{16\pi}{3} \text{ cm}^2$

C. $60\pi \text{ cm}^2$

D. $50\pi \text{ cm}^2$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Độ dài của cung } AB \text{ bằng } l = \frac{120 \cdot \pi \cdot 14}{180} = \frac{28\pi}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Diện tích hình quạt có bán kính } R = 14 \text{ cm} \text{ bằng } S_1 = \frac{120 \cdot \pi \cdot 14^2}{360} = \frac{196\pi}{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Diện tích hình quạt có bán kính } R = 4 \text{ cm} \text{ bằng } S_2 = \frac{120 \cdot \pi \cdot 4^2}{360} = \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^2$$

$$\text{Diện tích phần giấy của chiếc quạt là: } S = S_1 - S_2 = \frac{196\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} = 60\pi \text{ cm}^2.$$

Câu 11. [VD] Diện tích phần còn lại của nửa đường tròn đường kính $AD = 12 \text{ cm}$ bị cắt bởi hai nửa đường tròn đường kính $AB = CD = 4 \text{ cm}$, $B, C \in AD$ () (làm tròn đến hàng đơn vị) là

A. 43 cm^2

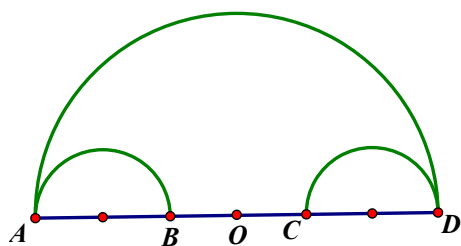
B. 44 cm^2

C. 87 cm^2

D. 88 cm^2

Lời giải

Chọn B



Diện tích của nửa đường tròn đường kính $AD = 12cm$ là: $S_1 = \frac{\pi \cdot (12 : 2)^2}{2} = 18\pi (cm^2)$

Diện tích của hai nửa đường tròn đường kính $AB = CD = 4cm$ là: $S_2 = \pi \cdot (4 : 2)^2 = 4\pi (cm^2)$

Do đó diện tích phần còn lại của nửa đường tròn đường kính $AD = 12cm$ bị cắt bởi hai nửa đường tròn đường kính $AB = CD = 4cm$ là $S = S_1 - S_2 = 18\pi - 4\pi \simeq 44 (cm^2)$

Câu 12. Cho tam giác cân ABC có $\angle B = 120^\circ$, $AC = 4cm$. Diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng

A. $\frac{16\pi}{3} cm^2$.

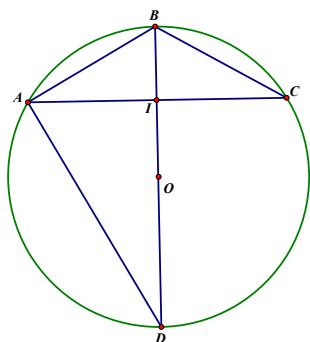
B. $16\pi cm^2$.

C. $6\pi cm^2$.

D. $\frac{6\pi}{3} cm^2$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $BI \perp AC$ tại I (1)

Vì ΔABC cân tại B nên $BA = BC$ mà $OA = OC = R$

Do đó B, O thuộc đường trung trực của AC

Suy ra $BO \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra B, I, O thẳng hàng

Vì ΔABC cân tại B nên đường cao BI đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Suy ra $AI = 2\text{cm}$, $\angle ABI = 60^\circ$

Xét $\triangle ABI$ vuông tại I có: $\tan \angle ABI = \frac{AI}{BI}$ nên $BI = \frac{AI}{\tan \angle ABI} = \frac{2}{\tan 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$AB = \sqrt{AI^2 + BI^2} = \sqrt{4 + \frac{4.3}{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Xét (O) có $\angle BAD$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\angle BAD = 90^\circ$

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle DBA$ có

$$\angle BIA = \angle BAD = 90^\circ; \angle B \text{ chung}$$

Suy ra $\triangle ABI \sim \triangle DBA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{DB} = \frac{BI}{BA}$$

$AB^2 = BI \cdot DB$. Do đó:

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot DB$$

$$DB = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra } BO = DB : 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

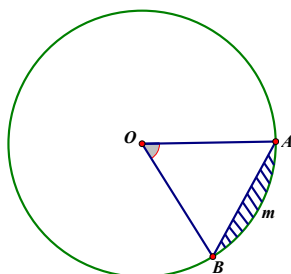
$$S = \pi \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^2$$

Vậy diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho $(O; 6\text{cm})$ có $\angle AOB = 60^\circ$ như hình vẽ sau



a) Độ dài cung AmB bằng $2\pi\text{cm}$ - Đ

b) Diện tích hình tròn $(O; 6\text{cm})$ bằng $6\pi\text{cm}^2$ - S

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

c) Diện tích hình quạt tròn OAB bằng $6\pi cm^2$ - Đ

d) Diện tích hình viên phân AmB bằng $5cm^2$ - S

Lời giải

a) Đ

b) S

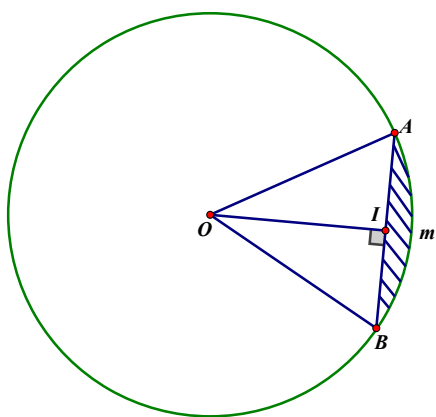
c) Đ

d) S

- Độ dài cung AmB bằng $l = \frac{60.\pi.6}{180} = 2\pi cm$ nên câu a đúng

- Diện tích hình tròn $(O; 6cm)$ bằng $S = \pi.6^2 = 36\pi cm^2$ nên câu b sai

- Diện tích hình quạt tròn OAB bằng $S_q = \frac{60.\pi.6^2}{360} = 6\pi cm^2$ nên câu c đúng



Gọi I trung điểm của AB .

Suy ra $AI = AB : 2$

Xét $\triangle OAB$ cân tại O mà $\angle AOB = 60^\circ$

Nên $\triangle OAB$ đều. Do đó $AB = 6cm$ suy ra $AI = AB : 2 = 3cm$

Áp dụng định lí Pitago vào $\triangle OAI$ vuông tại I có

$$OI^2 = OA^2 - AI^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$OI = 3\sqrt{3}cm$$

Suy ra $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}.OI.AB = \frac{1}{2}.3\sqrt{3}.6 = 9\sqrt{3}cm^2$

Diện tích hình quạt tròn OAB bằng $S_q = \frac{60.\pi.6^2}{360} = 6\pi cm^2$

Diện tích hình viên phân AmB là $S = S_q - S_{\triangle OAB} = 6\pi - 9\sqrt{3} \simeq 3,3cm^2$

Nên câu d sai

Câu 2. Độ dài cung tròn 120° của một đường tròn là $\frac{10\pi}{3}dm$. Khi đó:

a) Bán kính của đường tròn đó bằng $5dm$ -Đ

b) Chu vi đường tròn đó bằng $10\pi(dm)$ - Đ

c) Độ dài của cung lớn có chung hai mút với cung 120° của đường tròn đó bằng $\frac{10\pi}{3}dm$ - S

d) Diện tích hình quạt tròn ứng với cung 120° của đường tròn đó bằng $\frac{25}{3}(dm^2)$ - S

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S

- Bán kính của đường tròn đó bằng $R = \frac{l.180}{n.\pi} = \frac{\frac{10\pi}{3}.180}{120.\pi} = 5dm$ nên câu a đúng

- Chu vi đường tròn đó bằng $C = 2\pi R = 10\pi dm$ nên câu b đúng

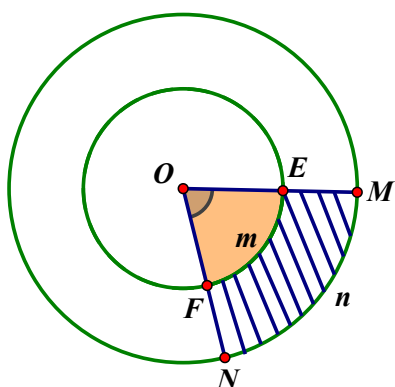
- Độ dài của cung 120° của đường tròn đó bằng $l = \frac{120.\pi.5}{180} = \frac{10\pi}{3}dm$

- Độ dài của cung lớn có chung hai mút với cung 120° của đường tròn đó bằng $10\pi - \frac{10\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}dm$ nên câu c sai

- Diện tích hình quạt tròn ứng với cung 120° của đường tròn đó bằng

$S = \frac{l.R}{2} = \frac{\frac{10\pi}{3}.5}{2} = \frac{25\pi}{3}dm^2$ nên câu d sai.

Câu 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; 3cm)$ $(O; 6cm)$ và $OE = 3cm, OM = 6cm, \angle MON = 70^\circ$ như hình vẽ.



CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

- a) Tỉ số diện tích của hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O; 6cm)$ bằng $\frac{1}{4}$ - Đ.
- b) Tỉ số diện tích của hình quạt tròn OEF và hình quạt tròn OMN bằng $\frac{1}{2}$ - S.
- c) Diện tích của hình có gạch sọc là $\frac{21\pi}{4} cm^2$ - Đ.
- d) Diện tích của hình có gạch sọc chiếm khoảng 16% diện tích của $(O; 6cm)$ - S.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

- Tỉ số diện tích của hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O; 6cm)$ bằng $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi.(R_1)^2}{\pi.(R_2)^2} = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$ nên câu a đúng.

- Tỉ số diện tích của hình quạt tròn OEF và hình quạt tròn OMN bằng

$$\frac{S_{OEF}}{S_{OMN}} = \frac{\pi.70.3^2}{360} : \frac{\pi.70.6^2}{360} = \frac{1}{4}$$

nên câu b sai

- Diện tích của hình có gạch sọc là $S_{OMN} - S_{OEF} = \frac{\pi.70.6^2}{360} - \frac{\pi.70.3^2}{360} = \frac{21\pi}{4}$ nên câu c đúng

- Tỉ số phần trăm của diện tích hình có gạch sọc so với diện tích của $(O; 6cm)$ là:

$$\frac{21\pi}{4} : (\pi.6^2).100\% \simeq 15\%$$

nên câu d sai.

Câu 4.

Một tấm bia tạo bởi năm đường tròn đồng tâm lần lượt có bán kính là $R_1 = 5cm$, $R_2 = 10cm$, $R_3 = 15cm$, $R_4 = 20cm$, $R_5 = 30cm$. Giả thiết rằng một người chơi ném phi tiêu một cách ngẫu nhiên và luôn trúng bia. Biết rằng xác suất ném trúng mỗi vòng bằng tỉ số giữa diện tích của hình vành khăn tương ứng với diện tích của hình tròn lớn nhất.



- a) Diện tích hình tròn lớn nhất bằng $900\pi cm^2$ - Đ.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

b) Diện tích của hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba bằng $125\pi(cm^2)$ - Đ

c) Xác suất ném phi tiêu trúng vòng 8 bằng $\frac{5}{36}$ - Đ

d) Xác suất ném phi tiêu trúng vòng 9 bằng $\frac{1}{36}$ - S

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) S

- Diện tích hình tròn lớn nhất có bán kính $R_5 = 30cm$ bằng $\pi \cdot 30^2 = 900\pi cm^2$ nên câu a đúng

- Diện tích của hình tròn thứ hai có bán kính $R_2 = 10cm$ bằng $\pi \cdot 10^2 = 100\pi cm^2$

Diện tích của hình tròn thứ ba có bán kính $R_3 = 15cm$ bằng $\pi \cdot 15^2 = 225\pi cm^2$

Diện tích của hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba bằng $225\pi - 100\pi = 125\pi cm^2$ nên câu b đúng.

- Diện tích của hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba là diện tích của vòng 8

Do đó xác suất ném phi tiêu trúng vòng 8 là $\frac{125\pi}{900\pi} = \frac{5}{36}$ nên câu c đúng.

- Diện tích vòng 9 bằng $\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 75\pi cm^2$

Do đó xác suất ném phi tiêu trúng vòng 9 là $\frac{75\pi}{900\pi} = \frac{1}{12}$ nên câu d sai.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Cho đường tròn đường kính AB bằng $5dm$. Tính độ dài cung 60° của đường tròn đó.

Lời giải

Bán kính của đường tròn đó là $5:2 = 2,5dm$

Độ dài cung tròn 60° của một đường tròn có đường kính $5dm$ bằng:

$$l = \frac{n \cdot \pi \cdot R}{180} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 2,5}{180} = \frac{5\pi}{6} dm.$$

Câu 2. [NB] Tính diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là $5cm$ và $7cm$

Lời giải

Diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có bán kính là $5cm$ và $7cm$ là:

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$S = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (7^2 - 5^2) = 24\pi \text{ cm}^2$$

Câu 3. [TH]

Chân một đồng cát đổ trên một phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi 10m. Hỏi chân đồng cát đó chiếm một diện tích là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải

Bán kính của chân đồng cát hình tròn là $R = C : (2\pi) = 10 : (2\pi) = \frac{5}{\pi} \text{ m}$

Diện tích của chân đồng cát là $S = \pi \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 = \frac{25}{\pi} \simeq 8 \text{ m}^2$

Câu 4. [TH]

Đầu làng có một cái giếng, miệng giếng hình tròn có đường kính $0,7 \text{ m}$. Xung quanh miệng giếng người ta xây một cái thành rộng $0,4 \text{ m}$. Tính diện tích thành giếng.



Lời giải

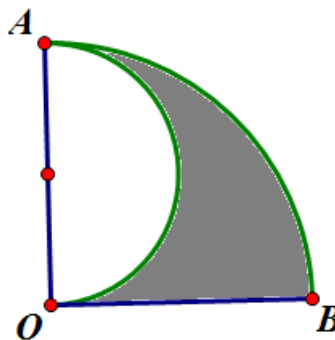
Diện tích thành giếng là diện tích của hình vành khăn của hai đường tròn đồng tâm với bán kính là $R_1 = 0,7 \text{ m}; R_2 = 0,7 + 0,4 = 1,1 \text{ m}$

Do đó diện tích của thành giếng là $S = S_2 - S_1 = \pi \cdot 1,1^2 - \pi \cdot 0,7^2 \simeq 2,3 \text{ m}^2$

Câu 5. [VD]

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Cho hình vẽ, tính diện tích phần tô màu xám, biết $OA = OB = 4cm$, $\angle AOB = 90^\circ$.



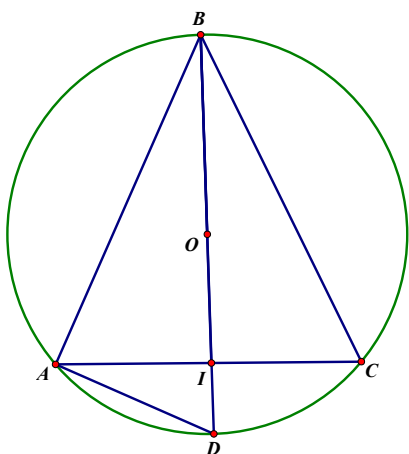
Diện tích nửa hình tròn đường kính $4cm$ phần trắng là: $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi cm^2$

Diện tích hình quạt AOB là: $S_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R_2^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi cm^2$

Diện tích phần tô màu xám là: $S = S_2 - S_1 = 4\pi - 2\pi = 2\pi cm^2$.

Câu 6. [VDC] Cho $\triangle ABC$ cân tại B có $\angle B = 60^\circ$, $AC = 6cm$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Chọn A



Kẻ $BI \perp AC$ tại I (1)

Vì $\triangle ABC$ cân tại B nên $BA = BC$ mà $OA = OC = R$

Do đó B, O thuộc đường trung trực của AC

Suy ra $BO \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra B, I, O thẳng hàng

Vì $\triangle ABC$ cân tại B nên đường cao BI đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác

Suy ra $AI = 3cm$, $\angle ABI = 30^\circ$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Xét $\triangle ABI$ vuông tại I có: $\tan \widehat{ABI} = \frac{AI}{BI}$ nên $BI = \frac{AI}{\tan \widehat{ABI}} = \frac{3}{\tan 30^\circ} = 3\sqrt{3}$

$$AB = \sqrt{AI^2 + BI^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$$

Xét (O) có $\widehat{BAD}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{BAD} = 90^\circ$

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle DBA$ có

$$\widehat{BIA} = \widehat{BAD} = 90^\circ; \widehat{B} \text{ chung}$$

Suy ra $\triangle ABI \sim \triangle DBA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{DB} = \frac{BI}{BA}$$

$$AB^2 = BI \cdot DB. \text{ Do đó:}$$

$$(6)^2 = 3\sqrt{3} \cdot DB$$

$$DB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Suy ra } BO = DB : 2 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $S = 2\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 24\pi \text{ cm}^2$.

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]: Cho $\pi \simeq 3,14$. Hãy điền vào các bảng sau:

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
5			
	6		
		94,2	
			28,26

Lời giải

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
--------------	----------------	------------	---------------

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

5	10	31,4	78,5
3	6	18,84	28,26
15	30	94,2	706,5
3	6	18,84	28,26

Ví dụ 2 [TH]: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm M thuộc AB . Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M . Giả sử $AM = 1\text{cm}$; $CD = 2\sqrt{3}\text{cm}$. Tính

a) Độ dài đường tròn (O)

b) Độ dài cung CAD .

Lời giải

Xét (O) có: + đường kính AD , dây CD

+ dây CD vuông góc với AB tại M

Nên M là trung điểm của CD

$$CM = \frac{CD}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

a, Xét $\triangle ACM$ vuông tại M có:

$$\tan \hat{A} = \frac{MC}{MA} = \sqrt{3}$$

$$\hat{A} = 60^\circ$$

Xét (O) có $\triangle CAB$ nội tiếp đường tròn, AB là đường kính

$\triangle CAB$ vuông góc tại C

Xét $\triangle ABC$ vuông góc tại C có:

$$\cos \hat{A} = \frac{CA}{AB}$$

$$\frac{CA}{AB} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2AC$$

Xét $\triangle ACM$ vuông tại M

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$AC^2 = MC^2 + MA^2 \text{ (Pytago)}$$

$$AC = \sqrt{3+1} = 2$$

$$AB = 4$$

Độ dài đường tròn (O)

$$C = \pi d = \pi AB = 4\pi \text{ cm}$$

b, Vì $\frac{AB}{2} = AC \Rightarrow AC = R \Rightarrow AC = AO = 2$

$$\Rightarrow \triangle OAC \text{ cân tại } O \text{ có } \angle AOC = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle OAC \text{ đều} \Rightarrow \angle AOC = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Độ dài cung } CA: l = \frac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

Xét $\triangle ACD$ có:

+ AM là đường cao ($AM \perp CD$)

+ AM là đường trung tuyến (M là trung điểm CD)

$$\Rightarrow \triangle ACD \text{ cân tại } A \Rightarrow AC = AD$$

$$\Rightarrow \angle C = \angle D$$

$$\text{Mà } sd\angle C + sd\angle D = sd\angle A$$

$$\Rightarrow \angle C = \angle D = \frac{\angle A}{2} \Rightarrow \text{độ dài } \angle A = \frac{4}{3}\pi$$

Ví dụ 3 [TH]: Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 4\text{ cm}$. Vẽ đường cao AH ; gọi M và N theo thứ tự là trung điểm AB và AC

a) Chứng minh: tứ giác $AMHN$ nội tiếp

b) Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$.

Lời giải

a) $\triangle AHB$ vuông góc tại H có HM là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HM = MA = \frac{AB}{2}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$\Rightarrow \Delta MAH$ cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MAH} \quad (1)$$

C/M tương tự ta có $\widehat{NAH} = \widehat{NHA} \quad (2)$

$$\text{Ta có } \widehat{MAH} + \widehat{NAH} = \widehat{BAC} = 90^\circ \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \widehat{MAH} + \widehat{NHA} = 90^\circ, \quad \widehat{MHN} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMHN$ nội tiếp (dnhb)

b) Xét ΔABC vuông tại A

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BC = 2AB = 2.4 = 8$$

Xét ΔABC có: M và N theo thứ tự là trung điểm AB và AC

Nên MN là đường trung bình ΔABC

$$MN = \frac{BC}{2} = 4 \text{ cm}$$

Độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ là:

$$C = \pi d = \pi MN = 4\pi (\text{cm})$$

Ví dụ 4 [VD]: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$; $BC = 2 \text{ cm}$. Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp hình chữ nhật này.

a) Tính diện tích đường tròn (O)

b) Tính tổng diện tích 4 hình viên phân

c) Tính diện tích hình viên phân do dây BC tạo với cung nhỏ BC

Lời giải

Theo giả thiết ta có tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$

a) Xét ΔBAD vuông tại A :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \quad (\text{Pytago})$$

$$BD = \sqrt{12 + 4} = 4 (\text{cm})$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Vì (O) ngoại tiếp HCN $ABCD$

$\Rightarrow$ Đường chéo AC, BD là đường kính (O)

$$d = 4$$

Diện tích đường tròn (O)

$$S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 4\pi (cm^2)$$

$$b) \quad S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} (cm^2)$$

Tổng diện tích 4 hình viên phân là

$$S_{(O)} - S_{ABCD} = 4\pi - 4\sqrt{3} cm^2$$

$$c) \quad R = \frac{d}{2} = 2$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$\begin{aligned} \tan \angle BCA &= \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow \angle BCA &= 60^\circ \end{aligned}$$

$\triangle OBC$ cân tại O ($OB = OC$) có $\angle BOC = 60^\circ$

$\triangle OBC$ đều $\Rightarrow \angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ$ (góc ở tâm)

Diện tích hình quạt tròn BOC bán kính $OB = 2cm$, $\widehat{BC} = 60^\circ$:

$$S = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi}{3} (cm^2)$$

Kẻ $OH \perp BC$

Xét $\triangle ABC$ có:

O là trung điểm AC (AC là đường kính (O))

$OH \parallel AB$

Nên H là trung điểm BC

OH là đường trung bình $\triangle ABC$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\Rightarrow OH = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$S_{OBC} = \frac{BC.OH}{2} = \frac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(cm^2)$$

Diện tích hình viên phân do dây BC tạo với cung nhỏ BC là:

$$S = S_{BOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}(cm^2)$$

(R)	Độ dài đường (C) tròn	Diện tích hình (S) tròn	Số đo của cung tròn n ⁰	Diện tích hình quạt tròn cung n ⁰
	12cm		45 ⁰	
2cm				12,5cm ²
		40,7cm ²		10cm ²

Hướng dẫn

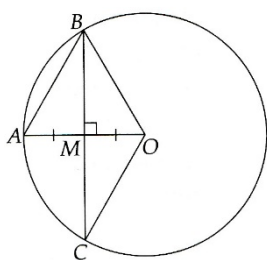
Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường (C) tròn	Diện tích hình (S) tròn	Số đo của cung tròn n ⁰	Diện tích hình quạt tròn cung n ⁰
1,9cm	12cm	11,3cm ²	45 ⁰	1,4cm ²
2cm	12,6cm	12,6cm ²	351,1 ⁰	12,5cm ²
3,6cm	22,4cm	40,7cm ²	90 ⁰	10cm ²

Bài 2. [TH] Cho đường tròn (O) bán kính OA . Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi cm$. Tính:

a) Bán kính đường tròn (O)

b) Độ dài hai cung BC của đường tròn.

Hướng dẫn



a) $2\pi R = 4\pi \Rightarrow R = 2cm$

b) $\angle AOB = 60^\circ$ ($\triangle OAB$ đều)

$\Rightarrow \angle BOC = 120^\circ$

$$l_{\text{BC nhỏ}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 120}{180} = \frac{4}{3}\pi cm$$

và $l_{\text{BC lớn}} = \frac{8}{3}\pi cm$

Bài 3. [TH] . Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M sao cho $OM = 2R$. Từ M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài cung nhỏ AB .

b) Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB .

Hướng dẫn

a) $l = \frac{2\pi R}{3}$;

b) $S = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{3} = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})R^2$

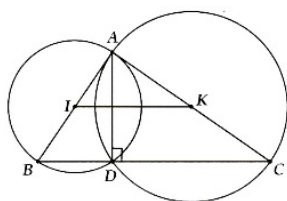
Bài 4. [VD] Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5cm, B = 60^\circ$. Đường tròn tâm I , đường kính AB cắt BC ở D .

a) Chứng minh AD vuông góc với BC .

b) Chứng minh đường tròn tâm K đường kính AC đi qua D .

c) Tính độ dài cung nhỏ BD .

Hướng dẫn



- a) $\angle ADB$ là góc nội tiếp trên đường kính $AB \Rightarrow AD \perp BD$.

- b) Do $\angle ADC = 90^\circ$ nên $D \in$ đường tròn $(K; \frac{AC}{2})$

- c) $\triangle IBD$ cân tại I có $\angle B = 60^\circ$

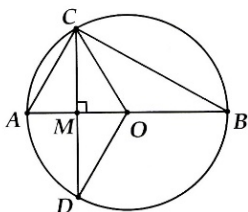
$$\Rightarrow \Delta IBD \text{ đều} \Rightarrow \angle BID = 60^\circ \Rightarrow l_{BD} = \frac{\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot 60}{180} = \frac{5}{6} \pi cm$$

Bài 5. [VD] Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy M thuộc đoạn AB . vẽ dây CD vuông góc với AB tại M . Giả sử $AM = 2cm$ và $CD = 4cm$. Tính:

- a) Độ dài đường tròn (O) và diện tích đường tròn (O) ;

- b) Độ dài cung $\widehat{AD}$ và diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OC, OD và cung nhỏ $\widehat{CD}$

Hướng dẫn



- a) $AC = 4\text{cm} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}\text{cm}$

$$\Rightarrow R = 4\text{cm} \Rightarrow C = 8\pi\text{cm}, S = 16\pi\text{cm}^2$$

- b) ΔAOC đều $\Rightarrow \angle AOC = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle OD = 120^\circ \Rightarrow l_{ED} \frac{\pi \cdot 4.120}{180} = \frac{8}{3} \pi \text{ cm}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{8}{3}\pi \cdot 4}{2} = \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^2$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

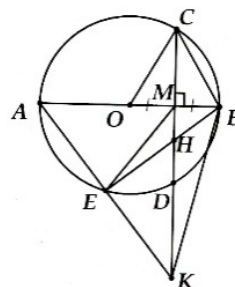
Bài 6. [VDC] Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây $CD = R$ (C thuộc cung $\widehat{AD}$). Nối AC và BD cắt nhau tại M .

- a) Chứng minh rằng khi CD thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì độ lớn góc $\widehat{AMB}$ không đổi.
- b) Cho $\widehat{ABC} = 30^\circ$, tính độ dài cung nhỏ AC và diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây AC và cung nhỏ AC .

Hướng dẫn

a) Chứng minh được $\triangle COD$ đều $\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^\circ$

b) $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow l_{\text{h.c}} = \frac{\pi R}{3}$



CHUYÊN ĐỀ 4: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẺ VÀ ĐƯỜNG TRÒN. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

DA DT8 CD 4 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẺ VÀ ĐƯỜNG TRÒN. TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn (O)

- Đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung.
- Đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc với nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung.
- + Điểm chung đó gọi là *tiếp điểm*
- + Đường thẳng a còn gọi là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau nếu chúng không có điểm chung.

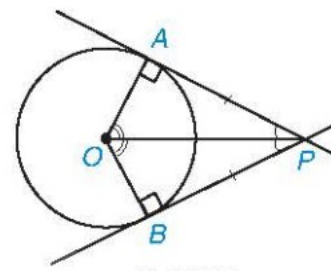
2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn.

Định lí 1: Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

3. Hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn.

Định lí 2: Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:

- Điểm P cách đều hai tiếp điểm;
- PO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;
- OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.



B. BÀI TẬP

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau nếu chúng có đúng số điểm chung là
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. [NB] Đường thẳng a và đường tròn (O) không có điểm chung, khi đó

- A.** đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.
B. đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc với nhau.
C. đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau.
D. đường thẳng a và đường tròn (O) song song với nhau.

Lời giải

Chọn A

Câu 3. [NB] Nếu một đường thẳng đi qua một điểm nằm trên một đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì

- A.** đường thẳng ấy là một dây của đường tròn.
B. đường thẳng ấy là một tiếp điểm của đường tròn.
C. đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.
D. đường thẳng ấy là một đường kính của đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Câu 4. [NB] Chọn câu trả lời **sai**. Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt nhau tại điểm P thì:

- A. Điểm P cách đều hai tiếp điểm.
- B. PO là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến đi qua hai tiếp điểm.
- C. OP là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính qua hai tiếp điểm.
- D. OP bằng độ dài đoạn thẳng nối hai tiếp điểm.

Lời giải

Chọn D

Câu 5. [TH] Cho đường thẳng a và điểm O cách a một khoảng 2,5 cm. Vẽ đường tròn tâm (O) đường kính 5 cm. Khi đó đường thẳng a

- A. không cắt đường tròn (O) .
- B. tiếp xúc với đường tròn (O) .
- C. cắt đường tròn (O) .
- D. không tiếp xúc với đường tròn (O) .

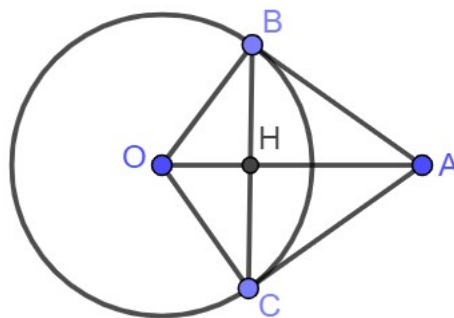
Lời giải

Chọn B

Vì khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a bằng bán kính của đường tròn.

Câu 6. [TH] Cho hình vẽ, từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Khi đó

- A. $AB = BC$.
- B. $BC = CA$.
- C. $AB = AC$.
- D. $HA = HB$.



Lời giải

Chọn C

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $AB = AC$

Câu 7. [TH] Cho hai tiếp tuyến PA, PB của đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Biết số đo $\angle APB = 60^\circ$, khi đó số đo $\angle PO$ bằng bao nhiêu?

- A. 60° .
- B. 120° .
- C. 30° .
- D. 20° .

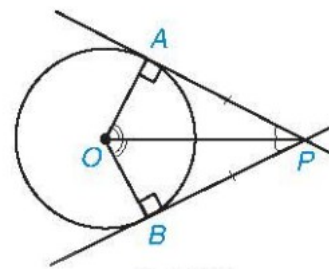
Lời giải

Chọn C

Hai tiếp tuyến PA, PB của đường tròn (O) cắt nhau tại P

$\Rightarrow PO$ là tia phân giác của $\angle APB$

$$\Rightarrow \angle APO = \frac{1}{2} \angle APB = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$$



Câu 8. [TH] Cho đường tròn $(O; 3\text{cm})$, điểm $A \in (O)$, đường thẳng d đi qua A và khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng d bằng 2 cm. Khi đó, đường thẳng d và (O)

A. không tiếp xúc với nhau.

B. tiếp xúc với nhau.

C. cắt nhau.

D. không cắt nhau.

Lời giải

Chọn C

Vì khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d (2 cm) nhỏ hơn bán kính của đường tròn (3 cm).

Câu 9. [VD] Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K . Số đo cung nhỏ MN là

A. 60° .

B. 240° .

C. 30° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn D

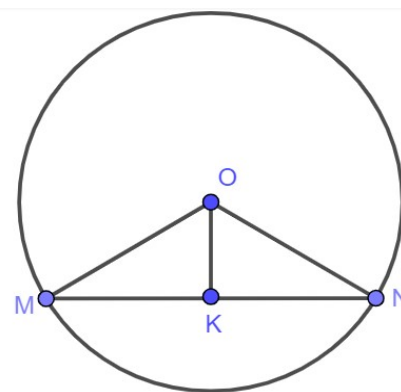
Có $\triangle OMN$ cân tại O , OK là đường cao đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác $\angle MON$

$$MK = \frac{MN}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle MOK$ vuông tại K :

$$\sin \angle MOK = \frac{MK}{MO} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle MOK = 60^\circ$$

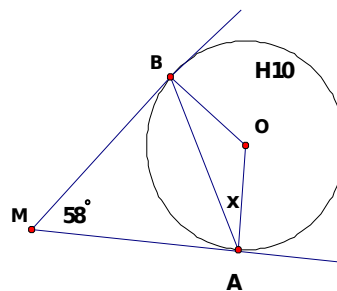
$$\Rightarrow \angle MON = 120^\circ \text{ suy ra số đo cung nhỏ } MN \text{ bằng } 120^\circ$$



Câu 10. [VD] Trong hình 10. Biết MA, MB là tiếp tuyến của (O) và $\angle AMB = 58^\circ$. Tính giá trị của góc có số đo bằng x° ?

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

- A. 24° .
 B. 29° .
 C. 30° .
 D. 31° .



Lời giải

Chọn B

Có $\triangle MAB$ cân tại $M \Rightarrow \angle MAB = \frac{180^\circ - 58^\circ}{2} = 61^\circ \Rightarrow x = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

Câu 11. [VD] Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại M . Nếu $MA = R\sqrt{3}$ thì $\angle AOB$ bằng :

- A. 120° B. 90° C. 60° D. 45°

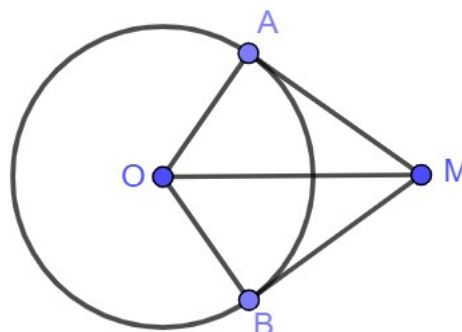
Lời giải

Chọn A

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle MOA$ vuông tại A :

$$\tan \angle AOM = \frac{AM}{OA} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle AOM = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 2 \cdot \angle AOM = 120^\circ$$



Câu 12. [VDC] Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài (O) . Từ A , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC . Lấy D đối xứng với B qua O . Gọi E là giao điểm của đoạn thẳng AD với (O) (E không trùng với D). Khi đó:

- A. $DE \cdot BH = BE \cdot CD$ B. $DE \cdot BH = BE \cdot BD$

C. $BE \cdot CD = DE \cdot BC$.

D. $DE \cdot CD = BE \cdot BH$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $BD = 2R = 2OE \Rightarrow \triangle BED$ vuông tại E

Tương tự, $\triangle BCD$ vuông tại C

Chứng minh: $\triangle BED \sim \triangle ABD (g.g) \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{BD}{BA} (1)$

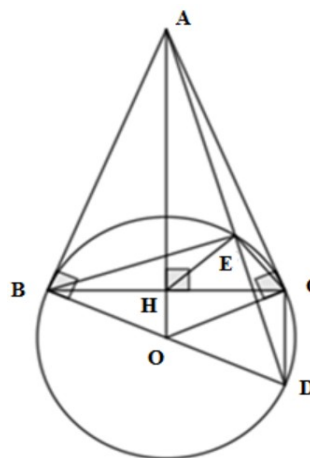
Chứng minh:

$\triangle BCD \sim \triangle AHB (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{BH} (2)$

Chứng minh:

$\frac{DE}{BE} = \frac{CD}{BH} \Rightarrow DE \cdot BH = BE \cdot CD$

Từ (1) và (2) suy ra:



2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. [NB] Vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn (O) là:

- a) Đường thẳng a cắt đường tròn (O) nếu giữa chúng có đúng một điểm chung.
- b) Đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau nếu chúng không có điểm chung.
- c) Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O) nếu giữa chúng có nhiều hơn một điểm chung.
- d) Đường thẳng a và đường tròn (O) có hai điểm chung thì đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) S

- Đường thẳng a cắt đường tròn (O) nếu chúng có hai điểm chung nên a sai.

- Đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O) nếu giữa chúng có một điểm chung nên c sai

- Đường thẳng a và đường tròn (O) có hai điểm chung thì đường thẳng a cắt đường tròn (O) nên d sai.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 2. [TH] Cho đường tròn (O) , điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB , AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Khi đó:

a) Điểm A cách đều hai tiếp điểm B và C .

b) AO là tia phân giác của góc $\widehat{OAB}$

c) OA là tia phân giác của góc $\widehat{COB}$

d) $OA \parallel BC$

Lời giải

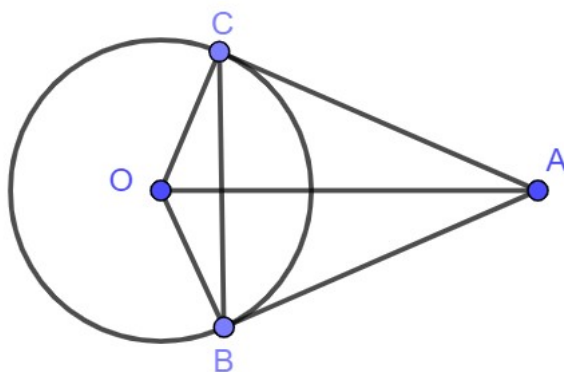
a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

- Điểm A cách đều hai tiếp điểm B và C .
- AO là tia phân giác của góc $\widehat{CAB}$ nên b sai
- OA là tia phân giác của góc $\widehat{COB}$ đúng
- $OB = OC; AB = AC \Rightarrow OA$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$ nên d sai.



Câu 3. [VD] Cho đường tròn $(O; 6cm)$, điểm A nằm bên ngoài đường tròn cách tâm O là $10cm$. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Ta có:

a) $AB = 8cm$

b) $\widehat{OAB} \approx 37^\circ$

c) $\widehat{DOCB} : \widehat{DCAB}$

d) $OC^2 = OAH$

Lời giải

a) Đ

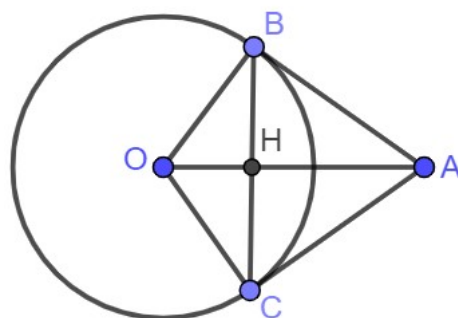
b) Đ

c) S

d) Đ

- a) Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác OAB vuông tại B ta có: $OA^2 = OB^2 + AB^2$
 $AB^2 = OA^2 - OB^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$
 $AB = 8cm$ nên a đúng

b) $\sin \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{6}{10} \Rightarrow \widehat{OAB} \approx 36,87^\circ$ nên b đúng



CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

c) Xét $\triangle DOCB$ và $\triangle DCAB$ có: $\frac{OB}{AB} = \frac{OC}{AC}$; CB chung nhưng không có cặp góc nào bằng nhau nên hai tam giác không đồng dạng được với nhau, c sai.

d) chứng minh được CB là đường trung trực của $OA \perp CB \wedge OA = \{H\} \Rightarrow \angle OHC = 90^\circ$

Xét $\triangle DOCH$ và $\triangle DOAC$ có: $\angle OCA = \angle OHC = 90^\circ$; $\angle COA$ chung $\triangle DOCH : \triangle DOAC (g.g)$

$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OH}{OC} \Rightarrow OC^2 = OA \cdot OH$
nên d đúng.

Câu 4. [VDC] Cho tam giác MNP có $MN = 5cm$ $NP = 12cm$ $MP = 13cm$. Vẽ đường tròn $(M; MN)$ Q MP , gọi Q là giao điểm của đường tròn với MP . Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) NP là tiếp tuyến của $(M; MN)$

b) $\angle NPM = 30^\circ$

c) Số đo cung nhỏ $\widehat{NQ}$ bằng 67°

d) $\angle PNQ = 35^\circ$

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

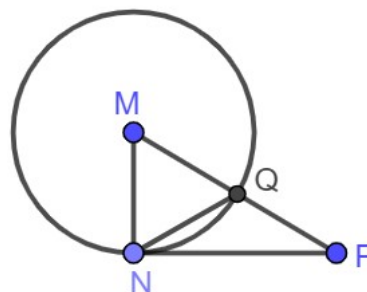
d) S

a) Xét tam giác MNP có:

$$13^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow MP^2 = NP^2 + MN^2$$

Suy ra tam giác MNP vuông tại N (ĐL Pythagore đảo)

$\Rightarrow MN \perp NP$ mà $N \in (M; MN)$ nên NP là tiếp tuyến của $(M; MN)$ nên a đúng



b) $\sin \angle NPM = \frac{MN}{MP} = \frac{5}{13} \Rightarrow \angle NPM \approx 22,62^\circ$ nên b sai

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\hat{NMP} = 90^\circ - 22,62^\circ = 67,38^\circ$$

c) $\hat{NMP}$ là góc ở tâm khác góc bẹt nên $\hat{NQ}$ là cung nhỏ, do đó $\hat{NQ} = \hat{NMQ} = 67,38^\circ$ nên c đúng

d) $\widehat{DMNQ}$ cân tại M nên $\hat{MNQ} = \frac{180^\circ - \hat{NMP}}{2} = 56,31^\circ$

$$\hat{PNQ} = 90^\circ - \hat{MNQ} = 33,69^\circ \text{ nên d sai.}$$

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB] Số vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một đường tròn?

Lời giải

Đáp án: 3 vị trí tương đối giữa một đường thẳng và một đường tròn

- Đường thẳng và đường tròn cắt nhau nếu chúng có đúng hai điểm chung.
- Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc với nhau nếu chúng có duy nhất một điểm chung.
- Đường thẳng và đường tròn không giao nhau nếu chúng không có điểm chung.

Câu 2. [NB] Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì cần điều kiện gì?

Lời giải

Đáp án: Đường thẳng ấy phải đi qua một điểm nằm trên đường tròn đó và vuông góc với bán kính của đường tròn đi qua điểm đó.

Câu 3. [TH] Cho đường thẳng a và $(O; R)$. Gọi d là khoảng cách từ O đến a . Các giá trị của d so với R để a và (O) có điểm chung?

Lời giải

Đáp án:

$$\begin{cases} d = R \\ d < R \end{cases}$$

+ $d = R$ thì a và (O) có một điểm chung

+ $d < R$ thì a và (O) có hai điểm chung

Câu 4. [TH] Cho đường tròn (O) ; hai điểm $A, B \in (O)$, điểm M nằm ngoài (O) . So sánh độ dài hai đoạn thẳng MA, MB để MA, MB là tiếp tuyến của (O) ?

Lời giải

Đáp án: $MA = MB$

Câu 5. [VD] Cho đường tròn (O) ; tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến tại B của (O) cắt nhau tại P (với A, B là các tiếp điểm). Số đo cung $\widehat{AB}$ bằng bao nhiêu để $\widehat{APB} = 60^\circ$?

Lời giải

Đáp án: $sd\widehat{AB} = 120^\circ$

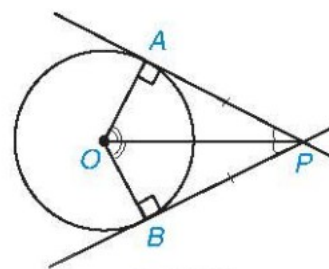
Hai tiếp tuyến PA, PB của (O) cắt nhau tại P

$$\Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{BPO} \text{ mà } \widehat{APB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{BPO} = 30^\circ$$

Xét $\triangle AOP$ vuông tại A : $\widehat{AOP} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \text{ (không phải góc bẹt)}$$

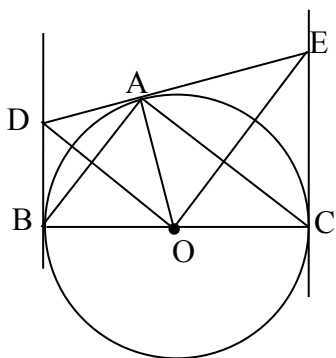
Suy ra $sd\widehat{AB} = 120^\circ$



Câu 6. [VDC] Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; d là tiếp tuyến của đường tròn tại A . Các tiếp tuyến của đường tròn tại C và B cắt d theo thứ tự ở D và E . BC là tiếp tuyến của đường tròn nào?

Lời giải

Đáp án: BC là tiếp tuyến đường tròn đường kính DE .



Sử dụng tính chất tiếp tuyến ta chứng minh được: tam giác DOE vuông tại O .

Gọi trung điểm I của DE là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông DOE . Ta có tam giác IOE cân tại I :

$$\widehat{IOE} = \widehat{IEO}$$

Chứng minh được $\widehat{ODE} = \widehat{EOC}$, mà $\widehat{ODE} + \widehat{IEO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IOE} + \widehat{EOC} = 90^\circ$ nên $OI \perp BC$ hay BC là tiếp tuyến đường tròn đường kính DE .

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

Để biết vị trí tương đối của một đường thẳng với một đường tròn, cần so sánh khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng đó với bán kính của đường tròn.

Để chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn ta phải chứng minh đường thẳng đó đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh tam giá bằng nhau, tam giác đồng dạng, đoạn thẳng – góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc, ...

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]:

Cho $(O; 4cm)$ và một đường thẳng d , khoảng cách từ O đến d là $2cm$.

a) Cho biết vị trí tương đối của đường thẳng d với (O) ?

b) Tính số đo cung $\widehat{AB}$.

Lời giải

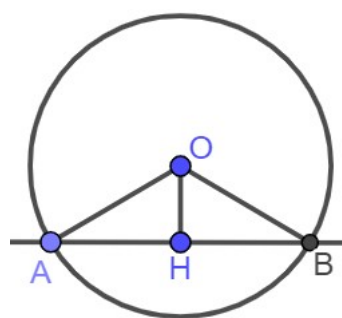
a) Vì khoảng cách từ O đến d là $2cm <$ bán kính đường tròn là $4cm$

Suy ra, đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm A và B .

b) Gọi OH là khoảng cách từ O đến d $OH \perp AB; OH = 2cm$

Xét $\triangle AHO$ vuông tại H : $\cos \angle AOH = \frac{OH}{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOH = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle AOB = 120^\circ \Rightarrow s\widehat{AB} = \angle AOB = 120^\circ$$



Ví dụ 2 [TH]: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Ax, By là 2 tia tiếp tuyến của (O) (Ax, By cùng nửa mặt phẳng phía trên đường thẳng AB). Trên Ax lấy điểm C , trên By lấy điểm D sao cho $\angle COD = 90^\circ$. Chứng minh rằng: CD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Vẽ $OH \perp CD (H \in CD)$

Tia CO cắt tia đối của tia By tại E.

CM được: $\Delta OAC = \Delta OBF (g.c.g) \Rightarrow OC = OE$

Tam giác DEC có DO vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên là tam giác cân.

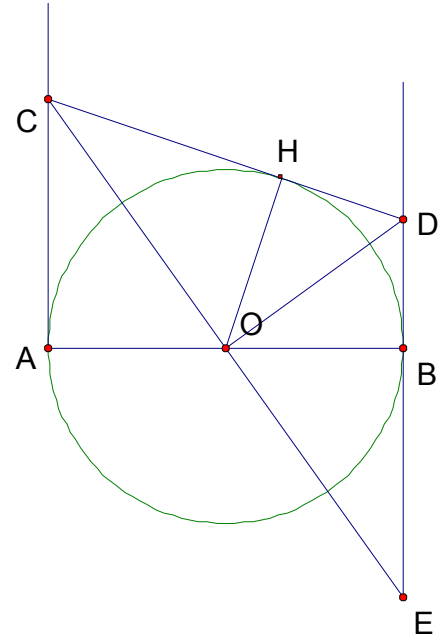
Khi đó DO cũng là đường phân giác $\widehat{HDO} = \widehat{BDO}$

$OH \perp DC, OB \perp DE \Rightarrow \widehat{OHD} = \widehat{OBD} = 90^\circ$

CM được: $\Delta OHD = \Delta OBD (ch.gn) \Rightarrow OH = OB$

Ta có $OH \perp CD, OH = OB = R$

Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Ví dụ 3 [TH]:

Từ điểm A ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến Ax, Ay với đường tròn $(O; R)$ tại D và E. Từ điểm F trên đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax, Ay thứ tự tại B và C. Chứng minh rằng:

- $BC = BD + CE$.
- Tính góc BOC biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Lời giải

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$BD = BF; CE = CF$$

$$\text{Mà } BC = BF + CF \Rightarrow BC = BD + CE$$

b) Xét tứ giác ADOE có: $\widehat{ADO} = \widehat{AEO} = 90^\circ$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$

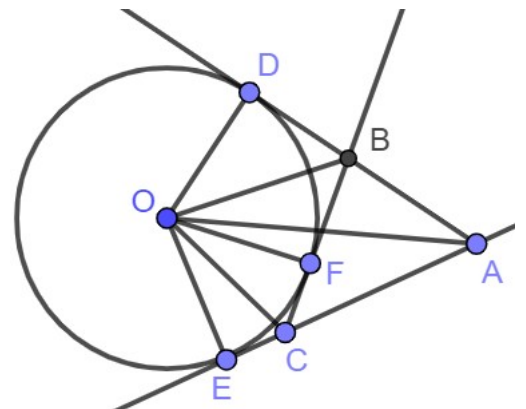
$$\widehat{DOE} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ \text{ (Định lý)}$$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

OB, OC lần lượt là phân giác của $\widehat{BOF}$ và $\widehat{FOE}$

$$\widehat{BOF} + \widehat{FOE} = \widehat{DOE} = 120^\circ$$

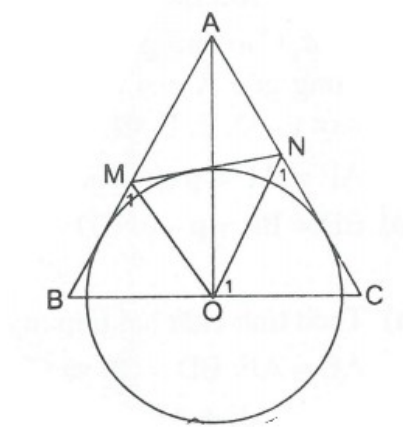
$$\widehat{BOC} = \frac{\widehat{BOF} + \widehat{FOE}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$



Ví dụ 4 [VD]:

Cho tam giác ABC cân tại A , $BC = 2a$. Vẽ đường tròn có tâm O thuộc cạnh BC và tiếp xúc với hai cạnh bên. Một tiếp tuyến của đường tròn (O) cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M và N . Tính tích $BM \cdot CN$.

Lời giải



Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: MO và NO là các tia phân giác ngoài đỉnh M và N của tam giác AMN

Suy ra AO là tia phân giác của góc A .

Mặt khác, $\triangle ABC$ cân tại A nên O là trung điểm của BC .

Xét $\triangle AMN$ có $\angle BMN$ là góc ngoài nên:

$$\angle BMN = \angle MAN + \angle MNA$$

$$2\angle M_1 = (180^\circ - 2\angle B) + (180^\circ - 2\angle N_1) \Leftrightarrow 2\angle M_1 = 360^\circ - 2\angle B - 2\angle N_1$$

Suy ra

$$\angle M_1 = 180^\circ - \angle B - \angle N_1 = 180^\circ - \angle C - \angle N_1 = \angle$$

Do đó

$\triangle BMO$ và $\triangle CON$ có: $\angle M_1 = \angle$ (chứng minh trên); $\angle B = \angle C$ (do $\triangle ABC$ cân).

Vậy $\triangle BMO \sim \triangle CON (g.g) \Rightarrow \frac{BM}{CO} = \frac{BO}{CN} \Rightarrow BM \cdot CN = OB \cdot OC = a^2$

$(O; 3cm)$ và hai đường thẳng d và d_1 , khoảng cách từ O đến d là $3cm$, khoảng

cách từ O đến d_1 là $4cm$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

a) Cho biết vị trí tương đối của đường thẳng d với (O) ?

b) Cho biết vị trí tương đối của đường thẳng d_1 với (O) ?

Hướng dẫn

a) Vì khoảng cách từ O đến d là $3cm$ = bán kính đường tròn là $3cm$

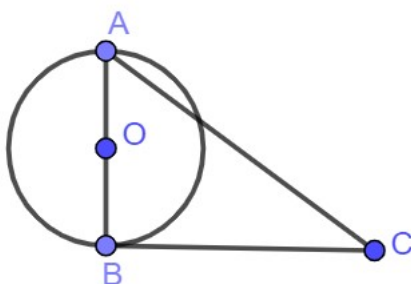
Suy ra, đường thẳng d tiếp xúc với (O) hay d là tiếp tuyến của (O) .

b) Vì khoảng cách từ O đến d_1 là $4cm >$ bán kính đường tròn là $3cm$

Suy ra, đường thẳng d_1 và (O) không giao nhau.

Bài 2. [NB] Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3cm$; $BC = 4cm$; $AC = 5cm$. Vẽ đường tròn $(A; 3cm)$. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(A; 3cm)$.

Hướng dẫn



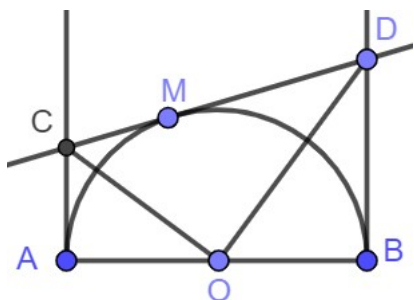
Chứng minh được $\triangle ABC$ vuông tại B , khi đó $AB \perp BC$, $AB = 3cm$ = bán kính của $(A; 3cm)$ Suy ra, BC là tiếp tuyến của đường tròn $(A; 3cm)$.

Bài 3. [TH] Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Trên cùng nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax, By . Từ điểm M trên nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) , tiếp tuyến này thứ tự cắt Ax, By tại C và D . Chứng minh rằng :

a) $CD = CA + DB$.

b) $OC \perp OD$.

Hướng dẫn



a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau:

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$CA = CM; DM = DB$ chứng minh được $CD = CA + DB$.

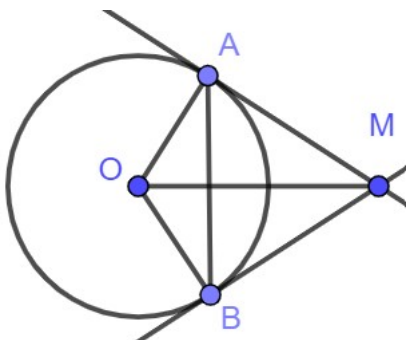
b) OD, OC lần lượt là phân giác của $\angle BOF$ và $\angle FOE$, sử dụng công thức cộng góc chứng minh được $OC \perp OD$.

Bài 4. [VD] Từ điểm M ở ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ tiếp tuyến MA với đường tròn (A là tiếp điểm).

a) Vẽ dây $AB \perp OM$. Chứng minh rằng MB là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Cho biết $R = 3\text{cm}; OM = 5\text{cm}$ tính độ dài AB .

Hướng dẫn



a) Gọi $AB \perp OM$ tại H

$\triangle AOB$ cân tại O, OH là đường cao đồng thời là phân giác

$\triangle AOM = \triangle BOM$ (c.g.c) $\angle OBM = 90^\circ \Rightarrow OB \perp BM$ nên MB là tiếp tuyến của đường tròn

b) Tính $AM = 4\text{cm}$

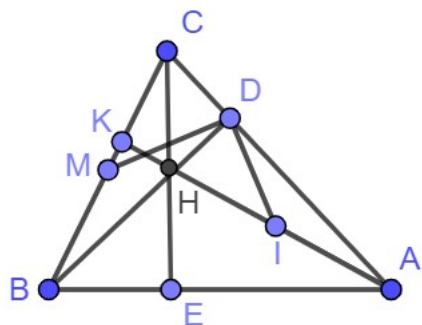
$$\triangle OHA \sim \triangle OAM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HA}{AM} = \frac{OA}{OM} \Rightarrow HA = \frac{12}{5} \Rightarrow AB = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

Bài 5 [VD] Cho tam giác ABC , hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH .

b) Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH .

Hướng dẫn



a) $\triangle ADH$ vuông tại D nên A, D, H thuộc đường tròn đường kính AH

$\triangle AEH$ vuông tại E nên A, E, H thuộc đường tròn đường kính AH

Vậy bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH

b) Có H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow \angle KAC + \angle ACB = 90^\circ$

$\triangle BDC$ vuông tại D $\Rightarrow \angle CBD + \angle ACB = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CBD = \angle KAC$

Gọi I là trung điểm của AH, M là trung điểm của BC, theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông $\Rightarrow \angle CBD = \angle MDB, \angle HDA = \angle KAC$

$\Rightarrow \angle HDA = \angle MDB \Rightarrow \angle HDM = 90^\circ$

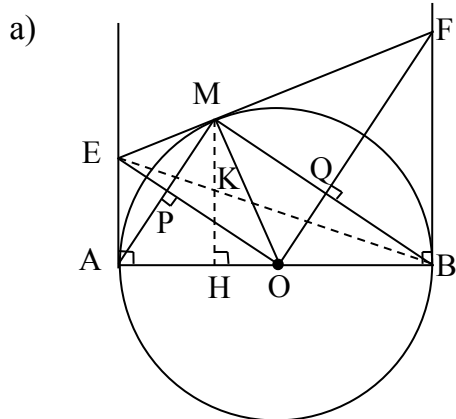
Suy ra, MD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

Bài 6 [VD] Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Từ A và B kẻ tiếp tuyến Ax, By . Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ 3 cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt tại E và F.

a) AM cắt OE tại P, BM cắt OF tại Q. Tứ giác MPOQ là hình gì? Tại sao?

b) Kẻ $MH \perp AB (H \in AB)$. Gọi K là giao của MH và EF. So sánh MK và KH.

Hướng dẫn



Dựa vào tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau có

$\angle MPO = \angle MQO = 90^\circ$ và $\angle PMQ = 90^\circ$ nên MPOQ là hình chữ nhật

b) $\triangle EMK \sim \triangle EFB (g.g) \Rightarrow \frac{EM}{MK} = \frac{EF}{FB}$ mà MF = FB

$\Rightarrow \frac{EM}{MK} = \frac{EF}{MF}$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\Delta EAB \sim \Delta KHB(g.g) \Rightarrow \frac{EA}{KH} = \frac{AB}{HB} \text{ mà } \frac{EF}{MF} = \frac{AB}{HB} \text{ (Thales)}$$

$$\Rightarrow \frac{EM}{MK} = \frac{EA}{KH}$$

Vì $EM = EA \Rightarrow MK = KH$.

CHUYÊN ĐỀ 5 : HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lí về hai tiếp tuyến cắt nhau

✓ Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

B. BÀI TẬP

Dạng 1 : Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng song song với nhau, trung điểm của đoạn thẳng, hai đoạn thẳng bằng nhau.

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

Câu 1. [NB] Cho đường tròn tâm O , hai tiếp tuyến tại A và B ($A \neq B$) của đường tròn cắt nhau tại M . Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A.** $MA = MB$. **B.** $MA = AB$. **C.** $MB = AB$. **D.** $MA + MB = AB$.

Lời giải

Chọn A

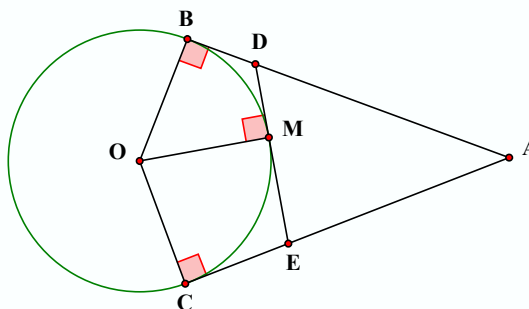
Hai tiếp tuyến tại A và B ($A \neq B$) của đường tròn cắt nhau tại M nên $MA = MB$.

Câu 2. [NB] Cho đường tròn (O) điểm nằm ngoài A đường tròn, kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Lấy điểm M trên cung nhỏ BC , qua M dựng tiếp tuyến với đường tròn cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự D và E . Khi đó, chu vi tam giác ADE bằng

- A.** AB . **B.** $2AB$. **C.** AC . **D.** $3AC$.

Lời giải

Chọn B



Xét ^(O) có $AB = AC$, $DB = DM$, $EC = EM$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Chu vi tam giác ADE bằng

$$AD + DE + AC = AD + DM + EM + AE = AD + DB + EC + AE = AB + AC = 2AB.$$

Câu 3. [NB] Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A .

Chọn khẳng định **sai**.

A. $OA \perp BC$.

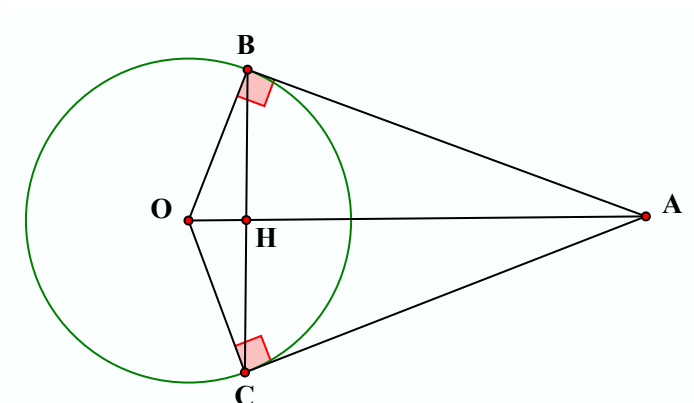
C. $AB = AC$.

B. OA là đường trung trực của BC .

D. $OA \perp BC$ tại trung điểm của OA .

Lời giải

Chọn D



Gọi H là giao điểm của BC với OA

Xét đường tròn tâm O có hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại A nên $AB = AC$ (tính chất)

Lại có $OB = OC$ nên OA là đường trung trực của đoạn BC hay $OA \perp BC$ tại H là trung điểm của BC .

Ta chưa kết luận được H là trung điểm của OA hay không nên khẳng định D **sai**.

Câu 4. [NB] Cho đường tròn tâm O , hai tiếp tuyến tại A và B ($A \neq B$) của đường tròn cắt nhau tại M . Biết $\widehat{AMO} = 30^\circ$ khi đó góc BMO bằng

A. 60° .

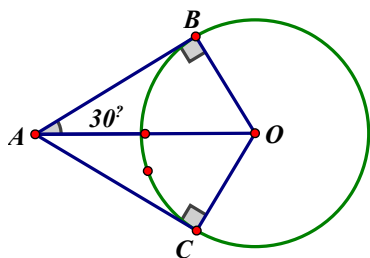
B. 30° .

C. 45° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B



Hai tiếp tuyến tại A và B ($A \neq B$) của đường tròn cắt nhau tại M nên MO là tia phân giác của góc AMB vậy $\widehat{BMO} = \widehat{AMO} = 30^\circ$.

Câu 5. [TH] Cho đường tròn tâm O từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB và AC của đường tròn tâm O (B, C là tiếp điểm). biết $\widehat{BAC} = 90^\circ$ tam giác ABO là

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

A. Tam giác đều
cân.

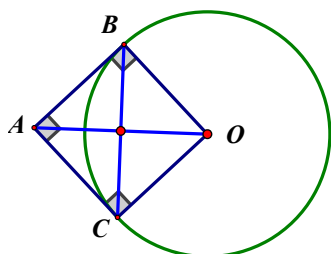
B. Tam giác vuông.

C. tam giác cân.

D. Tam giác vuông

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABO vuông tại B có góc $BAO = 45^\circ$ nên nó là tam giác vuông cân

Câu 6. [TH] Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A . Vẽ đường kính CD của (O) . Khi đó:

A. $BD \parallel OA$.

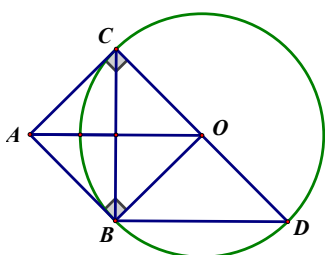
B. $BD \parallel AC$.

C. $BD \perp OA$.

D. BD cắt OA .

Lời giải

Chọn A



$BD \perp BC$ mà $OA \perp BC$ vậy $BD \parallel OA$.

Câu 7. [TH] Tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D và E thì tứ giác $ADOE$ là:

A. Hình vuông

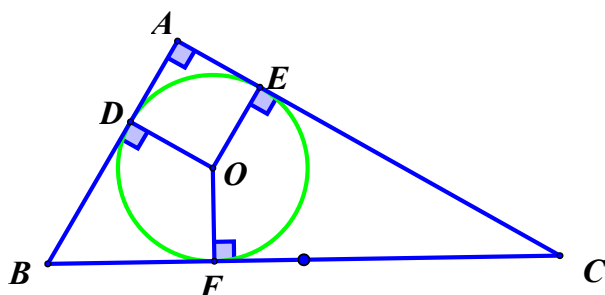
B. Hình chữ nhật.

C. Hình thang.

D. Hình thoi.

Lời giải

Chọn A



Tứ giác $ADOE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật mà $AD = AE$ (theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên tứ giác $ADOE$ là hình vuông.

Câu 8. [TH] Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $OA \perp BC$.

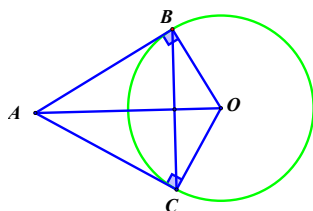
C. $AB = AC$.

B. OA là đường trung trực của BC .

D. $OA \perp BC$ tại trung điểm của AO .

Lời giải

Chọn D



$OA \perp BC$ tại trung điểm của BC . Xét đường tròn tâm O có hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại A nên $AB = AC$ (tính chất)

Lại có $OB = OC$ nên OA là đường trung trực của đoạn BC hay $OA \perp BC$ tại trung điểm của BC .

Câu 9. [VD] Cho đường tròn tâm O , hai tiếp tuyến tại A và B ($A \neq B$) của đường tròn cắt nhau tại M . Cho biết $\angle AMB = 60^\circ$ thì tam giác MAB là ?

A. Tam giác đều.

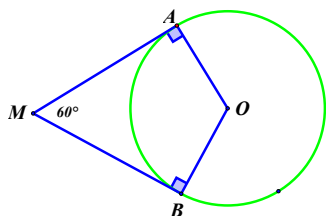
B. Tam giác vuông.

C. Tam giác tù.

D. Tam giác nhọn.

Lời giải

Chọn A



Tam giác MAB có $MA = MB$ nên nó là tam giác cân. Mà $\angle AMB = 60^\circ$ nên nó là tam giác đều.

Câu 10. [VD] Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi Ax, By là các tia tiếp tuyến của nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C và D . OC cắt AM tại H , OD cắt BM tại K . Tứ giác $OHMK$ là hình gì?

A. Hình vuông.

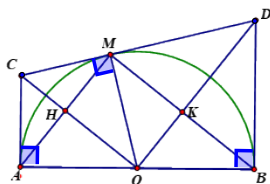
B. Hình chữ nhật.

C. Hình thoi.

D. Hình thang cân.

Lời giải

Chọn B



Tứ giác $OHMK$ có 3 góc vuông nên nó là hình chữ nhật. Do $AM \perp OC, BM \perp OD, AM \perp MB$

Câu 11. [VD] Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A . Biết $OB = 3cm; OA = 5cm$.

Vẽ đường kính CD của (O) . Độ dài đoạn thẳng BD là.

A. $2cm$.

B. $4cm$.

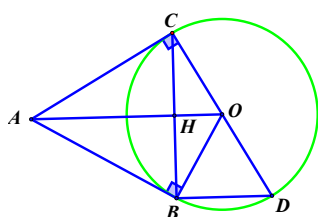
C. $1,8cm$.

D. $3,6cm$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng định lý Pita go cho tam giác ABC vuông tại A , Tính được $AB = 4(cm)$



Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABC vuông tại A ,

Tính được $AB = 4(cm)$

$$BH = \frac{OB \cdot AB}{OA} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4cm$$

$$BC = 4,8cm, CD = 6cm.$$

$$BD^2 = CD^2 - BC^2 = 6^2 - 4,8^2 = 12,96$$

$$BD = 3,6cm$$

Câu 12. [VDC] Cho đường tròn $(O; 2cm)$ bàng tiếp tam giác đều ABC . Các cạnh của tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{3}cm$.

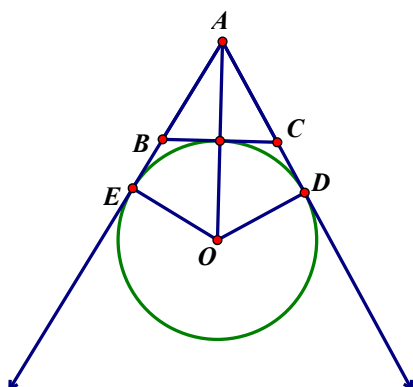
B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}cm$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$.

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}cm$.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy $\angle BCD = 120^\circ \Rightarrow \angle BCO = 60^\circ$.

Ta thấy $\angle CBE = 120^\circ \Rightarrow \angle CBO = 60^\circ$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Tam giác BCO có hai góc bằng 60° nên là tam giác đều, Hai tam giác này có cạnh bằng nhau vì cùng bằng BC , nên Tam giác BCO bằng tam giác ABC .

$$\Rightarrow OC = AC$$

Mà $OC = OD : \sin 60^\circ = 2 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. [TH] Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A .

- a. $OC \perp AC$.
- b. OA là đường phân giác của $\angle CAB$
- c. $AB = AC$.
- d. $OA \perp BC$ tại trung điểm của AO .

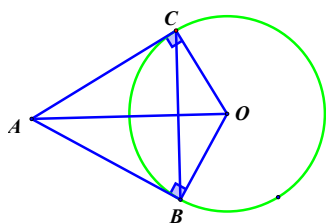
Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S



a. $OC \perp AC$ (tính chất của tiếp tuyến) $\Rightarrow$ đúng

b. OA là đường phân giác của $\angle CAB \Rightarrow$ sai.

Sửa: OA là đường phân giác của $\angle BOA$ hoặc AO là đường phân giác của $\angle BOA$

c. $AB = AC$ (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ đúng.

d. $OA \perp BC$ tại trung điểm của $AO \Rightarrow$ sai

Sửa: $OA \perp BC$ tại trung điểm của BC .

Câu 2. [TH] cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi Ax, By là các tia tiếp tuyến của nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C và D .

- a. $CA = CM$
- b. $CD = MC + BD$
- c. $CD = AC + MD$
- d. $CD = AM + BD$

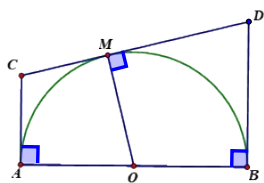
Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) S



Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau nên

$$AC = AM; DM = DB.$$

Suy ra $CD = AC + BD = CM + DB = DM + AC$

$\Rightarrow$ A, B, C đúng, D sai

Câu 3. [VD] Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm P nằm bên ngoài đường tròn sao cho $OP = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến PM và PN với đường tròn.

A. $NM \perp OP$

B. $\widehat{MON} = 120^\circ$.

C. $\triangle PMN$ là tam giác đều.

D. $MN = R$.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) S

A. Ta có: $PM = PN$ (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow P$ thuộc đường trung trực của MN (1)

Lại có: $OM = ON = R$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của MN (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OP$ là đường trung trực của $MN \Rightarrow$

$NM \perp OP \Rightarrow$ (đúng)

B. Ta có: $PM \perp OM$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính đi tiếp điểm)

$\Rightarrow \widehat{OMP} = 90^\circ$.

Từ $\triangle OMP$ vuông tại M , ta có: $\cos POM = \frac{OM}{OP} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{POM} = 60^\circ$

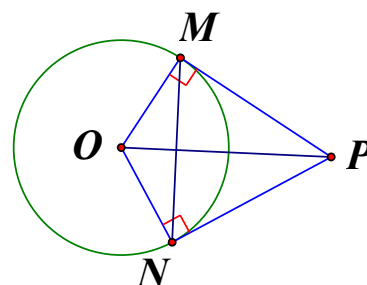
Ta có $\widehat{POM} = \widehat{PON} = 60^\circ$ (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau). Do đó $\widehat{MON} = 120^\circ$
 $\Rightarrow$ (đúng)

C. Ta có: $PM = PN$ (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \triangle PMN$ cân tại P (3)

ta có: $\widehat{POM} + \widehat{MPO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MPO} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MPO} = \widehat{NPO} = 30^\circ$ (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau)



qua

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Do đó $\widehat{MPN} = 60^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \triangle PMN$ là tam giác đều $\Rightarrow$ (đúng)

D. $\triangle OMN$ cân tại O , có $\widehat{MON} = 120^\circ$ (cmt).

$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ONM} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MON} > \widehat{OMN} \Rightarrow MN > ON \Rightarrow MN \neq R \Rightarrow$ (sai)

Câu 4. [VD] Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ ngoại tiếp đường tròn tâm O .

A. Chu vi hình thang $ABCD$ bằng hai lần tổng hai cạnh đáy.

B. $\triangle AOD$ là tam giác đều.

C. $\triangle BOC$ vuông cân tại O

D. $OB = \frac{BC}{2}$.

Lời giải

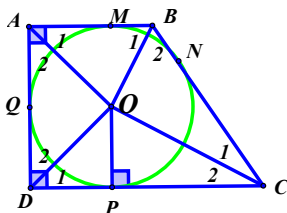
a) Đ

b) S

c) Đ

d) Đ

Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự tại M, N, P, Q .



$$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

(hai góc trong cùng phía)

$$\text{Do } \widehat{B} = 2\widehat{C} \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 120^\circ, \widehat{C} = 60^\circ$$

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 45^\circ \text{ (vì } \widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ); \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 60^\circ; \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 30^\circ$$

$$AM = AQ, BM = BN, CN = CP, DP = DQ$$

A. Chu vi của hình thang $ABCD$ bằng:

$$AB + BC + CD + DA = AM + MB + BN + NC + CP + PD + DQ + AQ$$

$$= AM + MB + AQ + BN + NC + CP + PD + DQ = 2AB + 2CD = 2(AB + CD)$$

Vậy $CV_{ABCD} = 2(AB + CD)$ (đúng)

B. Ta có: $\widehat{A}_2 = \widehat{D}_2 = 45^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \triangle AOD$ vuông cân tại O (Sai)

C. Ta có: $\widehat{B}_2 = 60^\circ; \widehat{C}_1 = 30^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BOC$ vuông cân tại O (đúng)

D. hay $\triangle BOC$ bằng nửa tam giác đều cạnh BC , ta thấy OB đối diện với góc $\widehat{C}_1 = 30^\circ$ nên

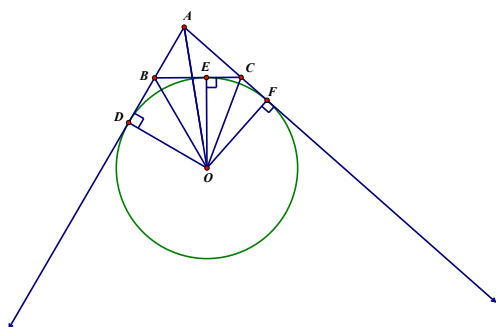
$$OB = \frac{1}{2}BC \text{ (đúng)}$$

Cách khác: Từ $\triangle BOC$ vuông tại O , ta có:

$$\sin C_1 = \frac{OB}{BC} \Rightarrow OB = \sin 30^\circ \cdot BC = \frac{1}{2}BC$$

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Cho hình vẽ, đường tròn tâm O được gọi là gì?



Lời giải

Đường tròn tâm O là đường tròn bàng tiếp tam giác ABC .

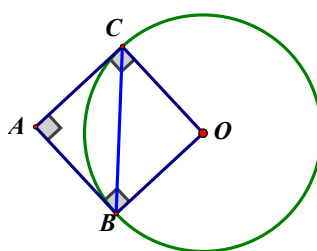
Câu 2. [NB] Cho góc xOy khác góc bẹt. Tâm của đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của góc xOy nằm trên đường nào?

Lời giải

Tâm của đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của góc xOy nằm trên đường phân giác của góc xOy .

Câu 3. [TH] Cho đường tròn tâm O từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB và AC của đường tròn tâm O (B, C là tiếp điểm). biết $\angle BAC = 90^\circ$ tam giác ABO là tam giác gì?

Lời giải



Tam giác ABO vuông tại B có góc $\angle BAO = 45^\circ$ nên nó là tam giác vuông cân.

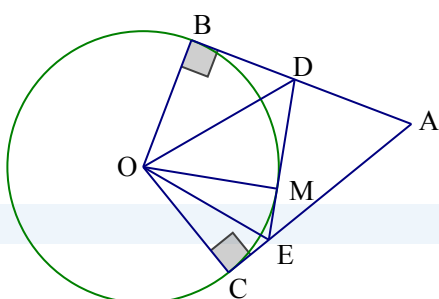
Câu 4. [TH] Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) , cắt các tiếp tuyến AB, AC lần lượt tại D và E . Tìm mối liên hệ giữa chu vi $\triangle ADE$ và AB ?

Lời giải

Đáp án: $\triangle ADE = 2AB$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$DB = DM; ME = CE; AB = AC$$



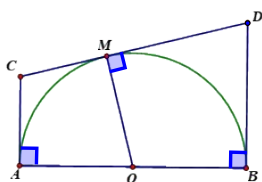
CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\begin{aligned}\text{Do đó } (ADE) &= AD + DE + AE \\ &= AD + DM + ME + AE \\ &= AD + DB + CE + AE \\ &= AB + AC = 2AB \dots\end{aligned}$$

Câu 5. [VD] Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi Ax, By là các tia tiếp tuyến của nửa đường tròn. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C và D . Tích $AC \cdot BD$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án R^2 .



Vì $AC = CM; BD = DM$ nên $AC \cdot BD = CM \cdot DM$

Tam giác COD vuông tại O có OM là đường cao nên
 $CM \cdot DM = OM^2$

Vậy $AC \cdot BD = OM^2 = R^2$.

Câu 6. [VDC] Cho $(O; R)$ và M là một điểm di động trên đường thẳng d cố định nằm ngoài (O) . Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là hình chiếu vuông góc của (O) trên d , dây cung AB cắt OH, OM lần lượt tại I, K . Tìm điểm cố định mà AB luôn đi qua khi M di động trên d ?

Lời giải

Xét $\triangle OIK$ và $\triangle OMH$ có:

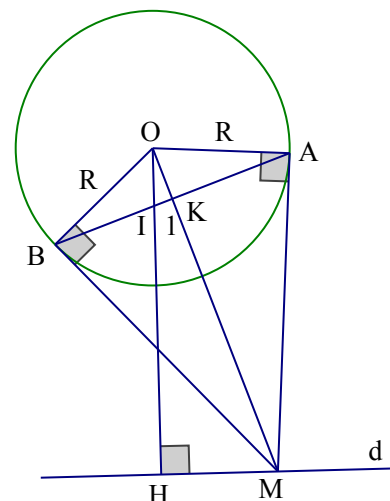
$$\angle H = \angle K = 90^\circ \Rightarrow \triangle OIK \sim \triangle OMH \text{ (gg)} \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Leftrightarrow OI \cdot OH = OM \cdot OK$$

Mà $\triangle OAM$ vuông tại A , nên theo hệ thức lượng ta có:

$$OA^2 = OK \cdot OM \Rightarrow OI \cdot OH = OK \cdot OM = R^2$$

Ta có (O) cố định và đường thẳng d cố định $\Rightarrow$ điểm H cố định

Ta lại có $OI = \frac{R^2}{OH} \Rightarrow I$ cố định nên AB qua I cố định.



PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

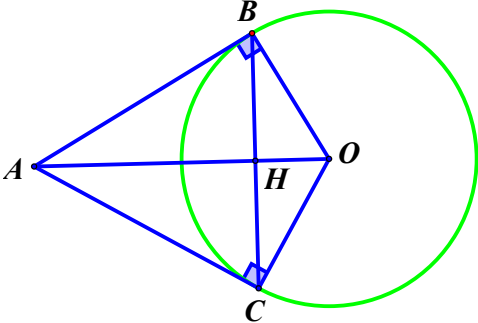
→ Phương pháp: Sử dụng tính chất tiếp tuyến, quan hệ từ vuông góc đến song song, tính chất đường trung trực của đoạn thẳng, định lý về đường trung bình của tam giác, các trường hợp đồng dạng của tam giác, định lý Ta-let (thuận, đảo), định lý về đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông áp dụng vào tam giác vuông nội tiếp đường tròn.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. [NB] Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính R , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO với BC . Chứng minh rằng AO vuông góc với BC và H là trung điểm của BC .

Lời giải

GT	Đường tròn $(O; R)$
	Tiếp tuyến MA, MB ; A, B là tiếp điểm; AO cắt BC tại H
KL	AO vuông góc với BC ; H là trung điểm của BC



Xét đường tròn (O) có AB, AC là hai tiếp tuyến và B, C là hai tiếp điểm nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AB = AC$. Suy ra A thuộc đường trung trực của BC

Mà $OB = OC$ (bán kính đường tròn) nên O thuộc đường trung trực của BC

Suy ra AO là đường trung trực của BC .

Do đó $AO \perp BC$ tại H và H là trung điểm của BC .

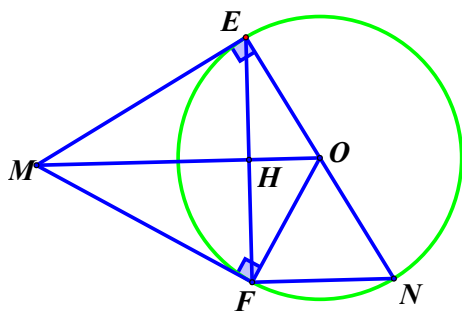
Ví dụ 2. [TH] Cho đường tròn (O) . Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (E, F là tiếp điểm). Kẻ dây FN song song với MO . Chứng minh rằng ba điểm E, O, N thẳng hàng.

Lời giải

GT	Đường tròn (O) : ME, MF là hai tiếp tuyến;
----	--

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

	E, F là tiếp điểm; dây FN $FN \parallel MO$
KL	Ba điểm E, O, N thẳng hàng



Xét đường tròn (O) có ME, MF là hai tiếp tuyến; E, F là tiếp điểm (gt)

$\Rightarrow ME = MF, MO$ là tia phân giác của $\angle EMF$

(Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\triangle EMF$ cân tại M có MO là tia phân giác nên MO cũng là đường trung trực của EF

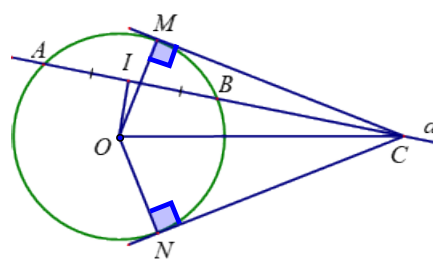
$\Rightarrow MO \perp EF$ Mà $FN \parallel MO \Rightarrow FN \perp EF$ $\triangle EFN$ vuông tại F nội tiếp đường tròn (O) nên O là trung điểm của EN .

Suy ra E, O, N thẳng hàng.

Ví dụ 3. [TH] Cho đường tròn (O) , đường thẳng d không đi qua tâm và cắt đường tròn (O) tại A, B . Trên đường thẳng d lấy điểm C nằm ngoài đường tròn. Từ C kẻ tiếp tuyến CM, CN (M, N là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của AB . Chứng minh: năm điểm C, M, I, O, N cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

Lời giải

G T	Đường tròn (O) và đường thẳng d không đi qua tâm cắt nhau tại A, B ; $C \in d$; Tiếp tuyến CM, CN ; Tiếp điểm M, N ; I là trung điểm của AB
KL	Năm điểm C, M, I, O, N cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.



Xét đường tròn (O) có hai tiếp tuyến CM, CN cắt nhau tại C và M, N là hai tiếp điểm.

$\Rightarrow \angle CMO = \angle CNO = 90^\circ$ (Tính chất tiếp tuyến);

Có I là trung điểm của dây AB không qua tâm

$\Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow \angle CIO = 90^\circ$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

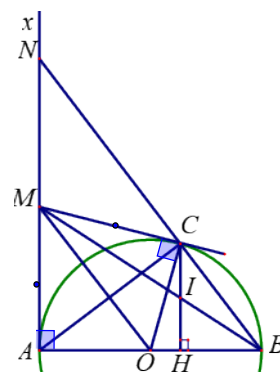
Có $\widehat{CIO} = \widehat{CMO} = \widehat{CNO} = 90^\circ$ suy ra M, I, N thuộc đường tròn đường kính OC . Vậy năm điểm C, M, I, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính OC và tâm của đường tròn này là trung điểm của OC .

Ví dụ 4. [VD] Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , kẻ tiếp tuyến Ax tại điểm A của nửa đường tròn (Ax nằm cùng phía nửa đường tròn đối với AB). Trên tia Ax lấy điểm M khác A và B . Từ M kẻ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). Gọi N là giao điểm của BC với Ax . Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), CH cắt BM tại I . Chứng minh:

- M là trung điểm của AN .
- I là trung điểm của CH .

Lời giải

GT	Đường tròn (O) đường kính AB ; Tiếp tuyến Ax ; A tiếp điểm; Trên tia Ax lấy điểm M khác A và B . Tiếp tuyến MC ; C là tiếp điểm. BC cắt Ax tại N ; $CH \perp AB$; $H \in AB$; CH cắt BM tại I .
KL	a) M là trung điểm của AN . b) I là trung điểm của CH .



Xét đường tròn (O) có MA, MC là tiếp tuyến; A, C là tiếp điểm $\Rightarrow MA \perp OA$ (Tính chất tiếp tuyến), MO là đường phân giác của $\widehat{AMC}$ và $MA = MC$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \triangle MAC$ cân tại M có MO là đường phân giác nên MO cũng là đường trung trực của AC (Tính chất của tam giác cân) $\Rightarrow MO \perp AC$

Có $\triangle ACB$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BN \Rightarrow MO \parallel BN$

Xét $\triangle ABN$: $OA = OB$, $OM \parallel BN \Rightarrow AM = MN$ (Định lý về đường trung bình của tam giác)

Xét $\triangle BMN$ và $\triangle BMA$ có $CI \parallel MN, IH \parallel MA \Rightarrow \frac{CI}{MN} = \frac{BI}{BM}; \frac{IH}{MA} = \frac{BI}{BM} \Rightarrow \frac{CI}{MN} = \frac{IH}{MA}$. Mà $AM = MN \Rightarrow CI = IH$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của CH .

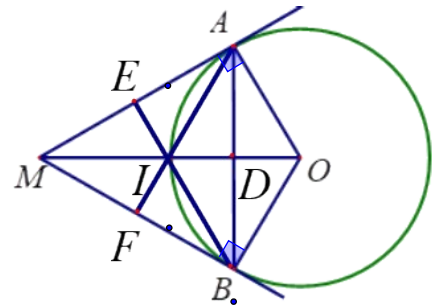
Ví dụ 5. [VD] Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M nằm ngoài đường tròn sao cho $MO = 2R$. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm).
a) Chứng minh tam giác MAB là tam giác đều.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

- b) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tròn $(O; R)$. Tứ giác $AOBI$ là hình gì? Vì sao?
- c) Chứng minh I là trực tâm của tam giác MAB .

Lời giải

GT	Đường tròn $(O; R)$, $MO = 2R$; Tiếp tuyến MA, MB ; A, B là tiếp điểm; Đoạn thẳng MO cắt đường tròn $(O; R)$ tại I .
KL	a) $\triangle MAB$ là tam giác đều. b) Tứ giác $AOBI$ là hình gì? Vì sao? c) I là trực tâm của $\triangle MAB$



- a) Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến tại A và $B \Rightarrow MA = MB$, MO là tia phân giác của $\angle AMB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $MA \perp OA$ (tính chất tiếp tuyến)

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A có $\sin \angle AMO = \frac{AO}{MO} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle AMO = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle AMB = 2\angle AMO = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Xét $\triangle MAB$ cân tại M có $\angle AMB = 60^\circ$ nên $\triangle MAB$ là tam giác đều

- b) Xét $\triangle MAO$ vuông tại A , $\angle AMO = 30^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \angle AOM = 60^\circ$

Xét $\triangle AOI$ có $OA = OI$ (Bán kính đường tròn), $\angle AOI = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOI$ là tam giác đều.
 $\Rightarrow IA = AO$

CMTT ta có $\triangle AOI$ là tam giác đều $\Rightarrow IB = BO \Rightarrow IB = BO = AO = IA$

Suy ra tứ giác $AOBI$ là hình thoi.

- c) Có tứ giác $AOBI$ là hình thoi $\Rightarrow BI \parallel OA$. Mà $MA \perp OA$ nên suy ra $BI \perp MA$ (Từ vuông góc đến song song). Hay $BE \perp MA$

Tam giác MAB là tam giác đều, có MO là tia phân giác của $\angle AMB$ nên $MO \perp AB$. Hay $MD \perp AB$.

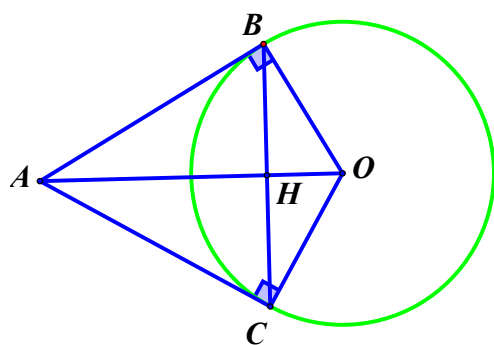
$\triangle MAB$ có BE, MD là hai đường cao cắt nhau tại I nên I là trực tâm của $\triangle MAB$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. [NB] Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O bán kính R , kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO với BC .

Chứng minh AO là đường trung trực của BC .

Hướng dẫn



Xét đường tròn (O) có AB, AC là hai tiếp tuyến và B, C là hai tiếp điểm nên theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AB = AC \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC

Mà $OB = OC$ (bán kính đường tròn) nên O thuộc đường trung trực của BC

Suy ra AO là đường trung trực của BC .

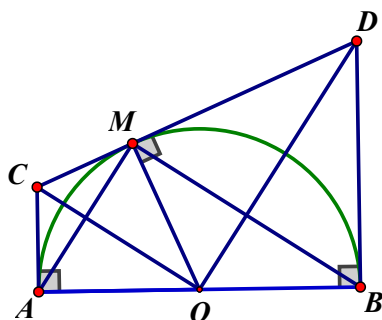
Bài 2. [TH] Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By . Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D . Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N .

1) Chứng minh $AC + BD = CD$.

2) Chứng minh $\angle COD = 90^\circ$.

3) Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.

Lời giải



1) Xét đường tròn (O) :

Có AC, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại C và A, M là hai tiếp điểm

$\Rightarrow AC = MC$; OC là tia phân giác của $\angle AOM$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);

Có BD, MD là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D và B, M là hai tiếp điểm.

$\Rightarrow BD = MD$; OD là tia phân giác của $\angle BOM$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có $CD = CM + MD$, mà $AC = MC, BD = MD \Rightarrow CD = AC + BD$ (đpcm).

2) Có OC là tia phân giác của $\angle AOM$, OD là tia phân giác của $\angle BOM$ (cmt)

Mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù nên $OC \perp OD \Rightarrow \angle COD = 90^\circ$ (đpcm).

3) Xét $\triangle COD$ vuông ở O , có $OM \perp CD$ (Tính chất tiếp tuyến)

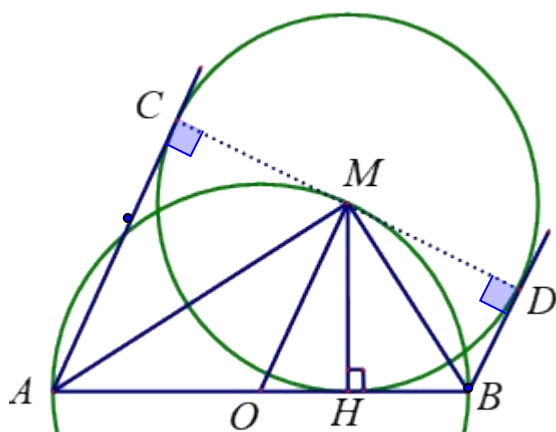
$\Rightarrow OM^2 = CM \cdot MD$

Mà $AC = CM, BD = MD$ và $OM = \frac{AB}{2}$ nên suy ra $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AC \cdot BD$

$$\Rightarrow AC.BD = \frac{AB^2}{4} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 3. [VD] Cho đường tròn (O) đường kính AB . Từ điểm M nằm trên đường tròn (O) , kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$). Vẽ đường tròn $(M; MH)$. Kẻ hai tiếp tuyến AC, BD với đường tròn $(M; MH)$ (C, D là tiếp điểm). Chứng minh C, M, D thẳng hàng và $CD \perp OM$.

Lời giải



Xét đường tròn $(M; MH)$ có $AB \perp MH$ tại $H \in (M)$ nên AB là tiếp tuyến của đường tròn $(M; MH)$, H là tiếp điểm.

Có AC, BH là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A

$$\Rightarrow \angle CMA = \angle AMH = \frac{1}{2} \angle CMH$$

Có BD, BH là hai tiếp tuyến cắt nhau tại B

$$\Rightarrow \angle DMB = \angle BMH = \frac{1}{2} \angle DMH$$

Có $M \in (O)$ đường kính AB nên $\angle AMB = 90^\circ \Rightarrow \angle AMH + \angle HMB = 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \angle CMH + \frac{1}{2} \angle HMD = 90^\circ \Rightarrow \angle CMH + \angle HMD = 180^\circ. \text{ Hay } \angle CMD = 180^\circ$$

$\Rightarrow C, M, D$ thẳng hàng $\Rightarrow CD$ là đường kính của đường tròn $(M; MH)$.

Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $AC \perp MC, BD \perp MD$. Hay $AC \perp CD, BD \perp CD$

$\Rightarrow AC \parallel BD$. Mà $\angle ACD = 90^\circ$ nên tứ giác $ACDB$ là hình thang vuông.

Hình thang $ACDB$ có $AO = OB, CM = MD \Rightarrow OM$ là đường trung bình $\Rightarrow OM \parallel AC$

Mà $AC \perp CD \Rightarrow OM \perp CD$

BÀI 4. [VD] Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm M trên đường tròn. Gọi I là trung điểm của MO . Kẻ dây AB vuông góc với MO tại I . Kẻ hai tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại A và B , hai tiếp tuyến này cắt nhau ở C .

a) Chứng minh tứ giác $AOBM$ là hình thoi.

b) Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

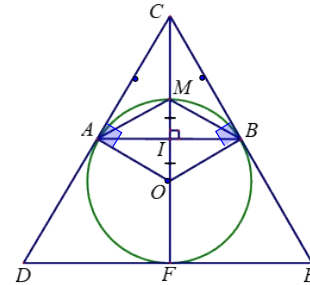
c) Chứng minh C, M, O thẳng hàng và M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

d) Gọi D, E là điểm đối xứng của điểm C lần lượt qua A và B . Chứng minh $\triangle CDE$ là ngoại tiếp đường tròn (O) .

Lời giải

GT

Đường tròn $(O; R)$, $MO = R$; I là trung điểm của MO . Dây $AB \perp MO$ tại I ;
Tiếp tuyến: CA, CB ; Tiếp điểm: A, B .
 D, E đối xứng với C lần lượt qua A và B .



KL

a) Tứ giác $AOBM$ là hình thoi.
b) $\triangle ABC$ là tam giác đều.
c) C, M, O thẳng hàng; M là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
d) $\triangle CDE$ là ngoại tiếp đường tròn (O) .

a) Xét đường tròn (O) , dây AB có $OM \perp AB \Rightarrow AI = IB$

Tứ giác $AOBM$ có $MI = IO, AI = IB \Rightarrow AMBO$ là hình bình hành. Mà $OM \perp AB$ nên $AOBM$ là hình thoi.

b) Vì $AOBM$ là hình thoi nên $MB = BO$, mà $OB = OM \Rightarrow \triangle MOB$ là tam giác đều $\Rightarrow \angle BOM = 60^\circ$

Xét $\triangle BCM$ có $\angle BCO = 90^\circ$ (Vì CB là tiếp tuyến, B là tiếp điểm của đường tròn (O) nên $CB \perp OB$, $\angle BOM = 60^\circ \Rightarrow \angle BCO = 30^\circ$

Có CA, CB là hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn (O) ; A, B là tiếp điểm $\Rightarrow CA = CB$ và CO là phân giác của $\angle ACB$. Mà $\angle BCO = 30^\circ \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều.

c) Vì tứ giác $AOBM$ là hình thoi nên $AB \perp MO, AM \parallel OB$, mà $OB \perp CB \Rightarrow AM \perp CB$.

Mặt khác $\triangle ABC$ là tam giác đều, có CI là đường phân giác nên CI cũng là đường cao $\Rightarrow CI \perp AB$, mà $MO \perp AB$ tại I nên C, M, O thẳng hàng.

Có $\triangle ABC$ là tam giác đều, $CI \perp AB, AM \perp CB$ mà CI cắt AM tại M nên M là trực tâm, suy ra M cũng là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$ (Tính chất tam giác đều). Suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

d) Có $CA = CB$ (cmt), $AD = AC, BE = BC$ (D, E là điểm đối xứng của điểm C lần lượt qua A và B) Suy ra $CA + AD = CB + BE \Rightarrow CD = CE \Rightarrow \triangle CDE$ là tam giác cân. Mà $\angle DCE = 60^\circ$ nên $\triangle CDE$ là tam giác đều.

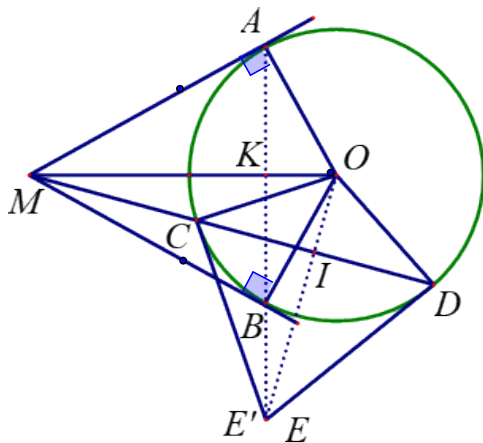
Có EA là đường trung tuyến của tam giác đều CDE nên EA cũng là đường cao, đường phân giác trong $\angle CED$. Mà $OA \perp CD$ nên E, A, O thẳng hàng.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$\triangle CDE$ là tam giác đều có EA là đường trung tuyến nên cũng là đường phân giác. Suy ra O là giao điểm phân giác trong các góc $\widehat{BCE}$ và $\widehat{DEC}$ nên O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CDE$, hay $\triangle CDE$ ngoại tiếp đường tròn (O) .
điểm I .

Bài 5. [VD] Cho đường tròn (O) . Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua tâm O . Tia MC nằm giữa hai tia MO, MA . Các tiếp tuyến của đường tròn tại C và D cắt nhau ở E . Chứng minh A, B, E thẳng hàng và $OE \perp CD$.

Lời giải



Kẻ $OI \perp CD$ tại I . Gọi E' là giao điểm của AB và OI .
Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến với tiếp điểm là $A, B \Rightarrow MA = MB, MO$ là phân giác của $\angle AMB \Rightarrow \triangle AMB$ cân tại M và MO là đường trung trực của AB .
Xét $\triangle OIM$ và $\triangle OKE'$ có: $\widehat{OIM} = \widehat{OKE'} = 90^\circ$ và $\widehat{O}$ chung
 $\Rightarrow \triangle OIM \sim \triangle OKE' (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{OI}{OK} = \frac{OM}{OE'} \Rightarrow OI \cdot OE' = OM \cdot OK$$

Xét $\triangle MAO$ có $\widehat{MAO} = 90^\circ$ (MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) , A là tiếp điểm), $AK \perp MO$ (cmt)

$$\Rightarrow OK \cdot OM = OA^2 = OD^2 \Rightarrow OI \cdot OE' = OD^2 \Rightarrow \frac{OE'}{OD} = \frac{OD}{OI}$$

Xét $\triangle ODE'$ và $\triangle OID$ có: $\frac{OE'}{OD} = \frac{OD}{OI}$, $\widehat{O}$ chung $\Rightarrow \triangle ODE' \sim \triangle OID (c - g - c)$

$\Rightarrow \widehat{DE'} = \widehat{OID} = 90^\circ \Rightarrow E'D \perp OD$ tại D , mà $D \in (O)$ nên $E'D$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

CMTT có $E'C$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Suy ra E' là giao điểm của hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O)

Mà E là giao điểm của hai tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) nên E' trùng E

Suy ra A, B, E thẳng hàng (đpcm)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Xét đường tròn (O) có CE, DE là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D nên $CE = DE$. Suy ra E thuộc đường trung trực của CD .

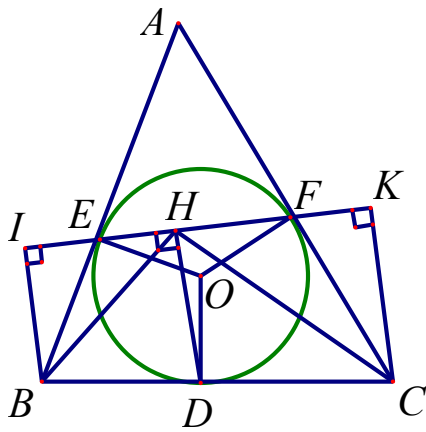
Có $OC = OD$ suy ra O thuộc đường trung trực của CD . Do đó OE là đường trung trực của CD
 $\Rightarrow OE \perp CD$ (đpcm).

Bài 6. [VD] Cho $\triangle ABC$, đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, AC theo thứ tự tại E, D, F . Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, D, C trên EF .

a) Chứng minh $\triangle IEB \sim \triangle KFC$.

b) Chứng minh $\angle BHI = \angle CHK$.

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có AE, AF là hai tiếp tuyến cắt nhau ở A với E, F là hai tiếp điểm nên $AE = AF$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \triangle AEF$ cân

$\Rightarrow \angle AEF = \angle AFE$. Mà $\angle AEF = \angle IEB, \angle AFE = \angle KFC$ (Đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle IEB = \angle KFC$

Xét $\triangle IEB$ và $\triangle KFC$ có $\angle IEB = \angle KFC, \angle IBE = \angle FKC = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle IEB \sim \triangle KFC$ (g.g)

b) Có $BI \parallel DH \parallel CK$ (Cùng vuông góc với EF) $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{HI}{HK}$ (Định lý Ta-let)

Mà $BD = BE, CD = CF$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên suy ra $\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{HI}{HK}$

Có $\triangle IEB \sim \triangle KFC \Rightarrow \frac{BI}{CK} = \frac{BE}{CF} \Rightarrow \frac{BI}{CK} = \frac{HI}{HK}$

Xét $\triangle BHI$ và $\triangle CHK$ có $\frac{BI}{CK} = \frac{HI}{HK}, \angle BHI = \angle CHK = 90^\circ \Rightarrow \triangle BHI \sim \triangle CHK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle BHI = \angle CHK$ (đpcm).

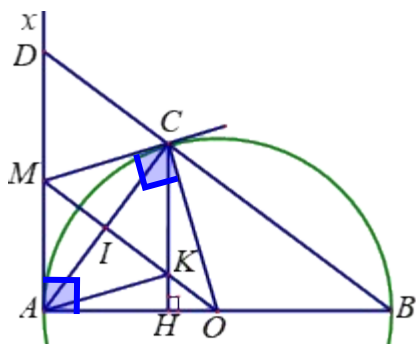
Bài 7. [VD] Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn. Trên tiếp tuyến Ax lấy điểm M . Từ M kẻ tiếp tuyến MC với đường tròn (C là tiếp điểm). Tia BC cắt Ax tại D .

a) Chứng minh $AM = MD$.

b) Kẻ CH vuông góc với AB tại H . Tia CH cắt MO ở K . Chứng minh tứ giác $AMCK$ là hình

thời.

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có MA, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M và A, C là hai tiếp điểm nên $MA = MC$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \triangle MAC$ cân tại M

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle MCA$$

Có $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB suy ra $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle MAC + \angle MDC = 90^\circ \text{ và } \angle MCA + \angle MCD = 90^\circ. \text{ Mà } \angle MAC = \angle MCA$$

$$\Rightarrow \angle MDC = \angle MCD \Rightarrow \triangle CMD \text{ cân tại } M$$

$\Rightarrow MC = MD \Rightarrow MA = MD (= MC)$ (đpcm). b) Xét đường tròn (O) có MA, MC là tiếp tuyến, A, C là tiếp điểm nên $MA \perp OA, MC \perp OC$ (Tính chất tiếp tuyến). Mà $CH \perp OA$ (gt) nên suy ra $MA \parallel CH$. Hay $MA \parallel CK$ (1)

Gọi I là giao điểm của MO với AC

Có $MA = MC \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC ;

$OA = OC$ (bán kính đường tròn) $\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AC .

Suy ra MO là đường trung trực của $AC \Rightarrow MO \perp AC$. Hay $OI \perp AC$ tại I .

Tam giác ACO có hai đường cao AH, OI cắt nhau tại K nên K là trực tâm. $\Rightarrow AK \perp CO$. Mà $MC \perp OC$ (cmt) nên suy ra $MC \parallel AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AMCO$ là hình bình hành. Mà $MA = MC$ nên tứ giác $AMCK$ là hình thoi.

D. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. [VD] Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By . Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D . Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N .

1) Chứng minh $AC + BD = CD$.

2) Chứng minh $\angle ODN = 90^\circ$

3) Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.

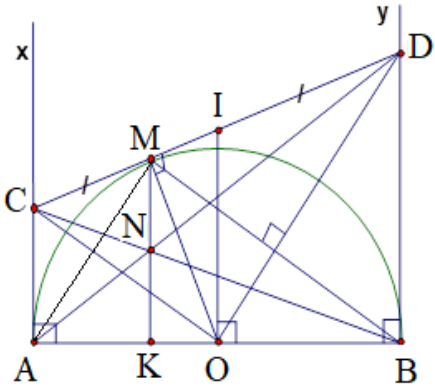
4) Chứng minh $OC \parallel BM$

5) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .

6) Chứng minh $MN \perp AB$.

- 7) Gọi K là giao điểm của MN với AB . Chứng minh N là trung điểm của MK .
- 8) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác $ACDB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



1) Xét đường tròn (O) :

Có AC, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại C và A, M là hai tiếp điểm

$\Rightarrow AC = MC; OC$ là tia phân giác của $\angle AOM$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);

Có BD, MD là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D và B, M là hai tiếp điểm.

$\Rightarrow BD = MD; OD$ là tia phân giác của $\angle BOM$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có $CD = CM + MD$, mà $AC = MC, BD = MD \Rightarrow CD = AC + BD$ (đpcm).

2) Có OC là tia phân giác của $\angle AOM$, OD là tia phân giác của $\angle BOM$ (cmt)

Mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù nên $OC \perp OD \Rightarrow \angle COD = 90^\circ$ (đpcm).

3) Xét $\triangle COD$ vuông ở O , có $OM \perp CD$ (Tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow OM^2 = CM \cdot MD$

Mà $AC = CM, BD = MD$ và $OM = \frac{AB}{2}$ nên suy ra $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AC \cdot BD$

$\Rightarrow AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$ (đpcm)

4) Xét $\triangle AOM$ cân tại O ($OA = OM = R$) có OC là tia phân giác của $\angle AOM$ (cmt)

$\Rightarrow OC$ cũng là đường trung trực của AM (Tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow OC \perp AM$

Có M thuộc đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại $M \Rightarrow BM \perp AM$

$\Rightarrow OC \parallel BM$ (cùng vuông góc với AM)

5) Gọi I là trung điểm của CD

Xét đường tròn (O) đường kính AB có AC, BD là hai tiếp tuyến; A, B là hai tiếp điểm

$\Rightarrow AC \perp OA, BD \perp OB$ (Tính chất tiếp tuyến). Hay $AC \perp AB, BD \perp AB$

$\Rightarrow AC \parallel BD$ (Từ vuông góc đến song song)

Suy ra tứ giác $ACDB$ là hình thang, đáy là AC và BD .

Xét hình thang $ACDB$ có O là trung điểm của AB , I là trung điểm của CD nên OI là đường trung bình của hình thang $ACDB$

$\Rightarrow OI \parallel AC$ (Tính chất đường trung bình của hình thang)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Mà $AC \perp AB$ nên suy ra $AB \perp OI$ (Từ vuông góc đến song song).

Tam giác COD có OI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền CD nên $OI = \frac{1}{2} \cdot CD$
 $\Rightarrow O$ thuộc đường tròn tâm I đường kính CD .

Có $AB \perp OI$ tại O thuộc đường tròn (I) đường kính CD nên AB là tiếp tuyến của đường tròn (I) đường kính CD (đpcm).

6) Xét $\triangle CAN$ có $D \in AN, B \in CN, AC \parallel BD$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CN}{NB}$$

Mà $AC = CM, BD = DM$ nên suy ra $\frac{CM}{MD} = \frac{CN}{NB}$

Xét $\triangle BCD$ có $N \in BC, M \in CD, \frac{CM}{MD} = \frac{CN}{NB} \Rightarrow MN \parallel CD$ (Định lý Ta-let đảo)

Mà $CD \perp AB$ nên suy ra $MN \perp AB$ (Từ vuông góc đến song song).

7) Cách 1: Đặt $AC = CM = a, BD = DM = b \Rightarrow CD = a + b$.

Xét $\triangle BCD$ có $MN \parallel BD$ (cmt) $\Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{DM}{DC}, \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CD}$

$$\Rightarrow MN = \frac{BD \cdot CM}{CD} = \frac{ab}{a+b}$$

Xét $\triangle ABC$ có $NK \parallel AC \Rightarrow \frac{KN}{AC} = \frac{BN}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{KN}{AC} = \frac{DM}{DC} \left(= \frac{BN}{BC} \right) \Rightarrow KN = \frac{AC \cdot DM}{DC} = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow MN = NK \left(= \frac{ab}{a+b} \right)$$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của MK .

Cách 2:

Gọi E là giao điểm của BM và AC . Có $AM \perp BM$
 $\Rightarrow \angle AME = 90^\circ \Rightarrow \angle CAM + \angle CEM = 90^\circ; \angle CMA + \angle CME = 90^\circ$

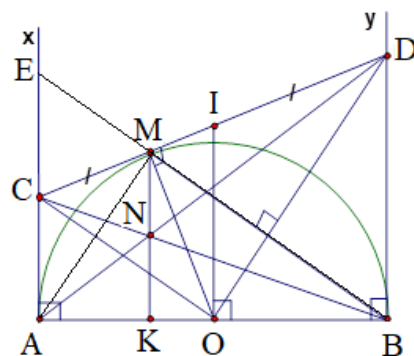
Mà $\angle CAM = \angle CMA (CA = CM) \Rightarrow \angle CEM = \angle CME$

$$\Rightarrow CE = CM \Rightarrow CE = CA (= CM)$$

Có $MN \parallel EC, NK \parallel CA$

$$\frac{MN}{EC} = \frac{BN}{BC}; \frac{NK}{CA} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{MN}{EC} = \frac{NK}{CA}$$

Mà $CE = CA \Rightarrow MN = NK$



8) Chu vi tứ giác $ACDB$ là $(AC + BD) + CD + AB = 2.CD + AB$

Vì $AB = 2.R$ không đổi nên chu vi tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi CD nhỏ nhất. Từ C kẻ $CH \perp BD$ tại H .

Tứ giác $ABHC$ có ba góc vuông $\angle A = \angle B = \angle H = 90^\circ$ nên $ABHC$ là hình chữ nhật

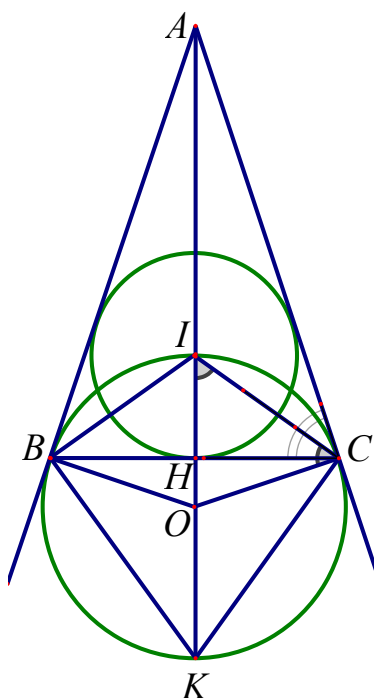
$\Rightarrow CH = AB = 2R$ Ta có $CD \geq CH$ (Quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc) $\Rightarrow CD \geq 2R$
 CD đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R$ khi D trùng với $H \Leftrightarrow OM \perp AB$ (Vì $CD \parallel AB, OM \perp CD$)
 $\Leftrightarrow M$ nằm chính giữa cung AB của đường tròn (O) .

Bài 2. [VD] Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK .

1) Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn (O) .

2) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải



1) Xét $\triangle ABC$ có BI là đường phân giác trong góc B (Vì I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$), BK là đường phân giác ngoài tại B (Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABC$)
 $\Rightarrow BI \perp BK$ (Tia phân giác của hai góc kề bù)

$\Rightarrow \angle IBK = 90^\circ \Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính IK .

CMTT ta có C thuộc đường tròn đường kính IK .

Vậy B, C, I, K cùng thuộc đường tròn đường kính IK .

2) Có $OC = OI$ (bán kính đường tròn)

$\Rightarrow \triangle OIC$ cân tại $O \Rightarrow \angle OCI = \angle OIC$

Vì CI là phân giác của góc $\angle ACB \Rightarrow \angle ACI = \angle ICH$

Xét $\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường phân giác góc A nên AH cũng là đường trung trực của BC (Tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow IH \perp HC \Rightarrow \angle OIC + \angle ICH = 90^\circ$

Mà $\angle OCI = \angle OIC, \angle ACI = \angle ICH \Rightarrow \angle OCI + \angle ACI = 90^\circ \Rightarrow \angle AOC = 90^\circ$

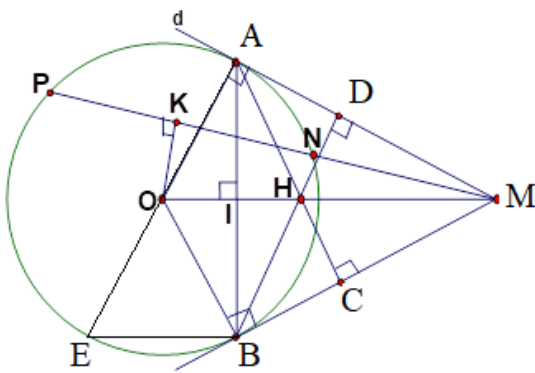
Có $AC \perp OC$ tại C thuộc đường tròn (O) nên AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 3. [VD] Cho đường tròn $(O; R)$, từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O) . Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì ($M \neq A$), kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP , kẻ tiếp

tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB, BD \perp MA$. Gọi H là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của OM và AB .

- 1) Kẻ đường kính AE của đường tròn (O) . Chứng minh $BE \parallel OM$.
- 2) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.
- 3) Chứng minh $OI \cdot OM = R^2; OI \cdot MI = IA^2$.
- 4) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.
- 5) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
- 6) Chứng minh khi M di chuyển trên đường thẳng d thì điểm H luôn chạy trên một đường cố định.
- 7) Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng d để $\triangle MAB$ là tam giác đều.

Lời giải



- 1) Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M ; A, B là hai tiếp điểm.
 $\Rightarrow MA = MB, MO$ là tia phân giác $\angle AMB$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
 $\Rightarrow \triangle AMB$ cân tại M , có MI là phân giác nên MI cũng là đường trung trực cạnh AB (Tính chất tam giác cân) $\Rightarrow MO \perp AB$ tại I .

Có $\triangle ABE$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB nên suy ra $\triangle ABE$ vuông tại B
 $\Rightarrow BE \perp AB \Rightarrow BE \parallel MO$ (cùng vuông góc với AB)

- 2) Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến; A, B là hai tiếp điểm.
 $\Rightarrow MA \perp OA, MB \perp OB$ (Tính chất tiếp tuyến)
 $\Rightarrow \angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$

Có K là trung điểm của dây PN không qua tâm O nên $OK \perp PN$ (Định lý về quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow \angle MKO = \angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$

Suy ra năm điểm M, A, K, O, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO .

- 3) Xét $\triangle MOA$ có $\angle MAO = 90^\circ, MO \perp AB$ tại I (cmt)
 $\Rightarrow OI \cdot OM = R^2; OI \cdot MI = IA^2$.

- 4) Có $OA \perp AM, BD \perp AM \Rightarrow OA \parallel BD$. Hay $OA \parallel BH$
 $OB \perp BM, AC \perp BM \Rightarrow OB \parallel AC$. Hay $OB \parallel AH$

Tứ giác $OAHB$ có $OA \parallel BH, OB \parallel AH$ nên $OAHB$ là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết)

Mà $AB \perp OH$ nên $OAHB$ là hình thoi (đpcm).

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

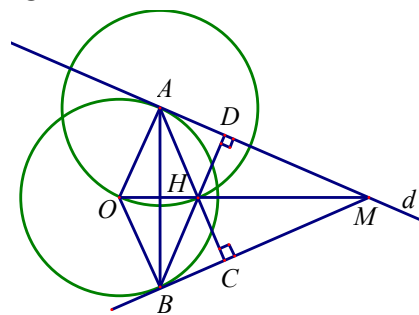
5) Có $\triangle AMB$ cân tại M và MI là đường trung trực cạnh AB (cmt) nên MI cũng là đường cao. Mà hai đường cao AC, BD cắt nhau tại H suy ra H là trực tâm của $\triangle AMB$

$\Rightarrow H \in MI$. Hay $H \in MO$. Vậy ba điểm O, H, M thẳng hàng.

6) Có tứ giác $OAHB$ là hình thoi nên $HA = AO = R$

Suy ra khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì điểm H luôn cách điểm A cố định một khoảng R không đổi.

Do đó điểm H luôn chạy trên đường tròn $(A; R)$ cố định khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d .



7) ĐK cần: Tam giác AMB cân tại M . Để $\triangle AMB$ là tam giác đều thì $\angle AMB = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle AMO = \angle BMO = 30^\circ$ (Vì MO là tia phân giác $\angle AMB$)

$$\sin \angle AMO = \frac{AO}{MO} \Rightarrow MO = \frac{AO}{\sin \angle AMO} = \frac{R}{\sin 30^\circ} = \frac{R}{\frac{1}{2}} = 2R$$

Xét $\triangle AMO$ vuông tại A , có

Suy ra M là giao điểm của đường tròn $(A; 2R)$ với đường thẳng d .

ĐK đủ: Với M là giao điểm của $(A; 2R)$ với d thì $OM = 2R$.

Xét $\triangle AMO$ vuông tại A (Vì $d \perp OA$ theo tính chất tiếp tuyến) có $\sin \angle AMO = \frac{AO}{MO} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\angle AMO = 30^\circ$. Mà $\angle AMO = \angle BMO \Rightarrow \angle AMB = 60^\circ$

Mặt khác $MA = MB$ nên tam giác MAB là tam giác đều.

Vậy để $\triangle AMB$ là tam giác đều thì M là giao điểm của đường tròn $(A; 2R)$ với đường thẳng d .

Bài 4. [VD] Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH . Gọi HD là đường kính của đường tròn $(A; AH)$. Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E .

1) Chứng minh tam giác BEC cân.

2) Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$.

3) Chứng minh $BE = BH + DE$.

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

1) Xét đường tròn (A) có ED là tiếp tuyến, D là tiếp điểm $\Rightarrow ED \perp DA$ (Tính chất tiếp tuyến)

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle HAC$ có $\angle ADE = \angle AHC = 90^\circ$

$AD = HE$ (Bán kính đường tròn tâm A)

$\angle DAE = \angle HAC$ (Hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle HAC$ (g.c.g)

$\Rightarrow AE = AC$ (Hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle BEC$ có BA là đường cao ($\angle BAC = 90^\circ$) đồng thời là đường trung tuyến ($AE = AC$) nên $\triangle BEC$ cân tại B (đpcm)

2) Kẻ AI vuông góc với BE tại I .

Xét $\triangle BEC$ cân tại B có BA là đường cao nên BA cũng là đường phân giác góc $\angle CBE$

$\Rightarrow \angle EBA = \angle CBA$. Hay $\angle IBA = \angle HBA$

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle ABH$ có $\angle AIB = \angle AHB = 90^\circ$, AH là cạnh chung, $\angle IBA = \angle HBA$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle ABH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow AI = AH$ (Cạnh tương ứng)

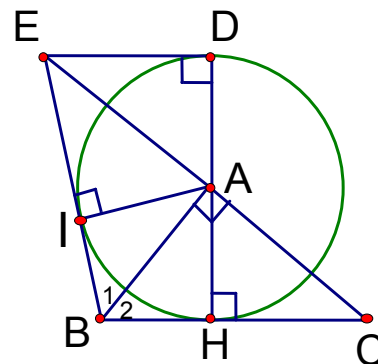
Suy ra I thuộc đường tròn (A, AH)

Xét đường tròn (A, AH) có $BE \perp AI$ tại I và I thuộc đường tròn (A, AH) nên BE là tiếp tuyến của đường tròn (A, AH) .

3) Xét đường tròn (A, AH) có ED, EI là hai tiếp tuyến tại D và I cắt nhau ở E

$\Rightarrow EI = ED$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Có $BI = BH$ ($\triangle ABI = \triangle ABH$) $\Rightarrow BE = BI + EI = BH + ED$.



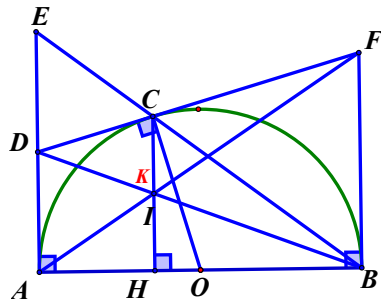
Bài 5. [VD] Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại A và C của nửa đường tròn cắt nhau tại D . Tia BC cắt tia AD tại E .

a) Chứng minh $DE = DA$.

b) Kẻ $CH \perp AB$ tại H . Tia BD cắt CH tại I . Chứng minh $CI = IH$.

c) Đường thẳng DC cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn ở điểm F . Chứng minh rằng ba điểm A, I, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét đường tròn (O) có DA, DC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại D với A, C là hai tiếp điểm

$\Rightarrow DA = DC$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \triangle ACD$ cân tại $A \Rightarrow \angle DAC = \angle DCA$

Có $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $\angle ACB = 90^\circ$ (Định lý)

$\Rightarrow \angle ACE = 90^\circ \Rightarrow \angle DAC + \angle DEC = 90^\circ$ và $\angle DCA + \angle DCE = 90^\circ$

Mà $\angle DAC = \angle DCA \Rightarrow \angle DEC = \angle DCE \Rightarrow \triangle CDE$ cân tại $D \Rightarrow DE = DC \Rightarrow DA = DE (=DC)$.

b) Có $DA \perp OA$ (Tính chất tiếp tuyến), $CH \perp AB$ (gt) suy ra $DA \parallel CH$

Xét $\triangle BDA$ có $IH \parallel DA \Rightarrow \frac{IH}{DA} = \frac{BI}{BD}$

Xét $\triangle BDE$ có $IC \parallel DE \Rightarrow \frac{CI}{ED} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow \frac{CI}{ED} = \frac{IH}{DA}$

Mà $ED = DA \Rightarrow CI = IH$ (đpcm)

c) Gọi K là giao điểm của AF với CH .

CMTT câu b, ta có K là trung điểm của CH . Mà I là trung điểm của CH nên K trùng với I . Vậy I thuộc đường thẳng AF . Hay ba điểm A, I, F thẳng hàng (đpcm).

Bài 6. [VD] Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Đường thẳng d vuông góc với bán kính OB tại H . Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm M thay đổi ($M \neq A, M \neq B, M$ không nằm trên d). Tia AM cắt đường thẳng d tại C . Tia BM cắt đường thẳng d tại D . Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt đường thẳng d ở K .

a) Chứng minh $CK = KD$.

b) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại E . Chứng minh B, E, C thẳng hàng.

c) Chứng minh KE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

d) Chứng minh ME luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên đường tròn (O) .

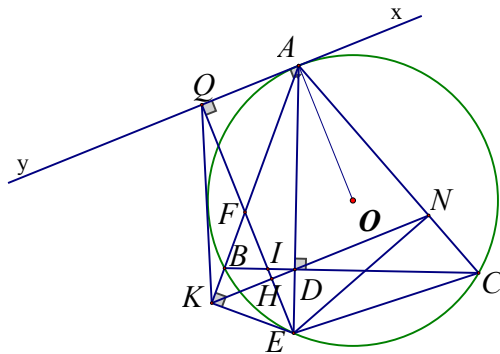
Lời giải

Vậy ME luôn đi qua một điểm F cố định khi M thay đổi trên đường tròn (O) .

Bài 7. [VD] : Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Từ E vẽ EK vuông góc với đường thẳng AB tại K . Qua điểm A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O) . Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng xy tại Q .

- Chứng minh tứ giác $AQKE$ nội tiếp và $\widehat{KQE} = \widehat{BCE}$.
- Tia KD cắt AC tại N . Chứng minh tứ giác $DECN$ nội tiếp và $\frac{S_{END}}{S_{EQK}} = \frac{EI}{EF}$.
- Đường thẳng QE cắt BC và AB lần lượt tại I và F . Chứng minh

Bài làm



- Có $EK \perp AB$ tại $K \Rightarrow \widehat{AKE} = 90^\circ$
 $EQ \perp xy$ tại $Q \Rightarrow \widehat{AQE} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AKE} = \widehat{AQE} = 90^\circ$ nên A, Q, K, E thuộc đường tròn đường kính AE .

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQKE$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{KQE} = \widehat{KAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KE)

Có $\widehat{BAE} = \widehat{BCE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE)

Từ đó ta có $\widehat{KQE} = \widehat{BCE}$.

- Có AD là đường cao của $\triangle ABC$ nên $AD \perp BC$

$\Rightarrow AE \perp BC$ tại $D \Rightarrow \widehat{BDE} = 90^\circ$.

Có $AK \perp KE \Rightarrow \widehat{BKE} = 90^\circ$.

Ta có $\widehat{BDE} = \widehat{BKE} = 90^\circ$ nên B, K, E, D thuộc đường tròn đường kính BE .

$\Rightarrow$ Tứ giác $BKED$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{KBE} = \widehat{KDE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KE) (1)

Lại có $\widehat{ADN} = \widehat{EDK}$ (hai góc đối đỉnh) (2)

Có tứ giác $ABEC$ nội tiếp ($A, B, E, C \in (O)$)

$\Rightarrow \widehat{EBK} = \widehat{ACE}$ (cùng bù với $\widehat{ABE}$) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{ADN} = \widehat{ACE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DECN$ nội tiếp (DHNB tứ giác nội tiếp- tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong ở đỉnh đối diện)

Có $\widehat{DNE} = \widehat{DCE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DE trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DNCE$)

$\widehat{BCE} = \widehat{BAE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE trong đường tròn (O))

$\widehat{KAE} = \widehat{KQE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KE trong đường tròn $AQKE$)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Từ đó ta có $\widehat{DNE} = \widehat{KQE}$.

Có $\widehat{DEN} = \widehat{BCN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DN trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DECN$)

$\widehat{BCA} = \widehat{BAQ}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\widehat{AB}$ trong (O))
 $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{KAQ}$.

Mà $\widehat{KAQ} = \widehat{KEQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QK trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AKQE$)

Từ đó ta có $\widehat{DEN} = \widehat{KEQ}$.

Xét $\triangle DEN$ và $\triangle KEQ$ có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DNE} = \widehat{KQE} \\ \widehat{DEN} = \widehat{KEQ} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DEN \sim \triangle KEQ \text{ (g.g)}$$
$$\Rightarrow \frac{EN}{EQ} = \frac{ND}{QK} \Rightarrow EN \cdot QK = ND \cdot EQ$$

c) Có $\triangle DEN \sim \triangle KEQ$ với tỉ số đồng dạng $\frac{ED}{EK} \Rightarrow \frac{S_{END}}{S_{EQK}} = \left(\frac{ED}{EK} \right)^2 = \frac{ED^2}{EK^2}$ (4)

Có $\widehat{QAK} = \widehat{AEB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AB}$ trong (O))

Có $\widehat{AEB} = \widehat{DKB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKED$)

Từ đó suy ra $\widehat{QAK} = \widehat{DKB}$.

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AQ \parallel KD$ (DHNB hai đường thẳng song song)

Ta lại có $AQ \perp EQ$ nên $EQ \perp KD$ tại H .

$\triangle IDE$ vuông tại D với đường cao $DH \Rightarrow ED^2 = EH \cdot EI$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\triangle EKF$ vuông tại K với đường cao $KH \Rightarrow EK^2 = EH \cdot EF$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{ED^2}{EK^2} = \frac{EI}{EF} \quad (5). \quad \text{Từ (4) và (5) ta có } \frac{S_{END}}{S_{EQK}} = \frac{EI}{EF}.$$

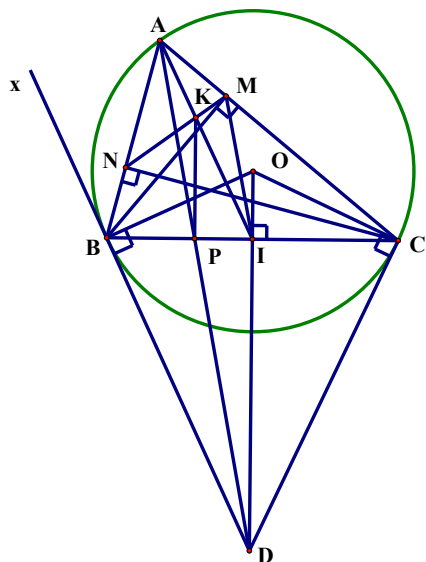
Bài 8. [VD] Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , với $AB < AC$. Gọi BM và CN là các đường cao của tam giác ABC . Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau tại D , các đường thẳng BC và OD cắt nhau tại I .

a) Chứng minh: Tứ giác $BCMN$ nội tiếp và $OD \perp BC$.

b) Chứng minh: $MA \cdot DB = IB \cdot AB$ và $\triangle AMI \sim \triangle ABD$.

c) Gọi K là giao điểm của AI và MN , P là giao điểm của AD và BC .

Chứng minh rằng $KP \perp BC$.



Có BM, CN là các đường cao của $\triangle ABC$. Suy ra $\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$.

Xét tứ giác $BCMN$ có $\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ Suy ra bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC .
 $\Rightarrow BCMN$ là tứ giác nội tiếp.

Vì DB, DC là tiếp tuyến của đường tròn (O) với B, C là tiếp điểm.

Suy ra $DB = DC \Rightarrow D$ thuộc trung trực của đoạn BC .

Ta có $OB = OC \Rightarrow O$ thuộc trung trực của đoạn BC

Do đó DO là trung trực của đoạn $BC \Rightarrow DO \perp BC$ tại I .

Xét đường tròn (O) có $\angle BAC = \angle CBD$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BC). Hay $\angle BAM = \angle DBI$

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle IBD$ có:

$$\angle BMA = \angle DIB = 90^\circ \quad (BM \perp AC \text{ tại } M, OD \perp BC \text{ tại } I).$$

$$\angle BAM = \angle DBI \quad (\text{chứng minh trên})$$

$$\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle IBD (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AM}{IB} \Rightarrow AB \cdot IB = AM \cdot BD$$

Vì bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC , I là trung điểm BC (OD là đường trung trực của BC).

Suy ra $IB = IC = IM$, nên $\triangle ICM$ cân tại I .

Suy ra $\angle ICM = \angle IMC$.

Gọi Bx là tia đối của tia BD . Suy ra $\angle ICM = \angle BCA = \angle ABx$.

Do đó $\angle IMC = \angle ABx$. Suy ra $180^\circ - \angle IMC = 180^\circ - \angle ABx \Rightarrow \angle AMI = \angle ABD$ (1)

$$\text{Mà } \frac{AB}{BD} = \frac{AM}{IB} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{IM} \quad (IB = IM) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AMI \sim \triangle ABD$ (c.g.c).

c) Từ $\triangle AMI \sim \triangle ABD$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AD}$; $\widehat{MAK} = \widehat{PAB}$ (3).

Lại có $\widehat{KMA} = \widehat{PBA}$ (cùng bù với $\widehat{EMN}$).

Xét $\triangle AMK$ và $\triangle ABP$ có: $\widehat{MAK} = \widehat{PAB}$; $\widehat{KMA} = \widehat{PBA}$.

Suy ra $\triangle AMK \sim \triangle ABP$ (g.g). Suy ra $\frac{AK}{AP} = \frac{AM}{AB}$ (4).

Xét $\triangle AID$ có $\frac{AK}{AI} = \frac{AP}{AD}$

$\Rightarrow KP \parallel ID$ (định lí Ta-lét đảo).

Mà $ID \perp BC \Rightarrow KP \perp BC$ (đpcm).

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AK}{AP} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{AP}{AD}$.

CHUYÊN ĐỀ 6: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R \geq r$	Số điểm chung	Hệ thức giữa OO' ; R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau Tiếp xúc trong Tiếp xúc ngoài	1	$OO' = R - r$ $OO' = R + r$
Hai đường tròn không giao nhau	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$

Nhận xét:

- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm thẳng hàng với hai tâm.

B. BÀI TẬP

DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Hai đường tròn tiếp xúc nhau thì số điểm chung là:

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì hai đường tròn tiếp xúc nhau có 1 điểm chung.

Câu 2. [NB] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ tiếp xúc trong và $OO' = d$. Chọn khẳng định đúng.

A. $d = R - r$.

B. $d > R - r$.

C. $d = R + r$.

D. $d < R + r$.

Lời giải

Chọn A

Vì hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc trong thì $OO' = R - r$.

Câu 3. [NB] Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$. Biết $R = 5\text{cm}$; $R' = 2\text{cm}$ và $OO' = 3\text{cm}$. Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Tiếp xúc ngoài.

B. Tiếp xúc trong.

C. Cắt nhau.

D. Đụng nhau.

Lời giải

Chọn B

Vì ta thấy $R - R' = 5 - 2 = 3 = OO'$ nên hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong.

Câu 4. [NB] Cho đoạn thẳng OO' và điểm A nằm trên đoạn OO' sao cho $OA = 2\text{cm}$. Đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') bán kính $O'A$. Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

A. Tiếp xúc ngoài.

B. Tiếp xúc trong.

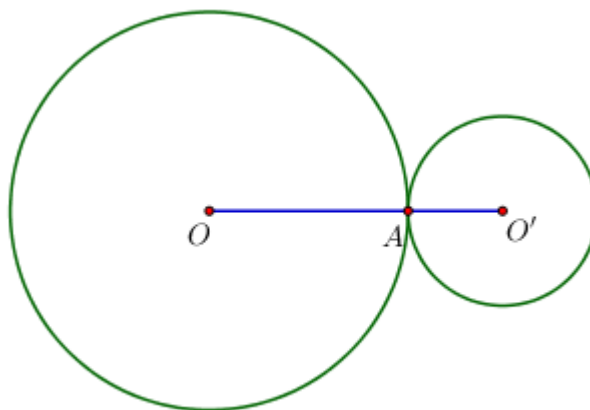
C. Cắt nhau.

D. Đụng nhau.

Lời giải

Chọn A

Ta vẽ hình và quan sát được hai đường tròn có một điểm chung là điểm A và $OO' = OA + AO'$ nên hai đường tròn này tiếp xúc ngoài tại A .



CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 5. [TH] Hai đường tròn $(O; 5cm)$ và $(I; R)$ với $R < 5$. Biết $OI = 3cm$. Giá trị của R để hai đường tròn tiếp xúc trong là:

A. $1cm$.

B. $2cm$.

C. $4cm$.

D. $8cm$.

Lời giải

Chọn B

Để hai đường tròn tiếp xúc trong thì $OI = 5 - R \Rightarrow 3 = 5 - R \Rightarrow R = 2(cm)$.

Câu 6. [TH] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; r)$ với $R > r$ tiếp xúc trong tại điểm A . Dây AM của đường tròn $(O; R)$ cắt đường tròn $(I; r)$ tại điểm B . Biết $\angle MAO = 30^\circ$. Số đo góc $\angle ABI$ là:

A. 60° .

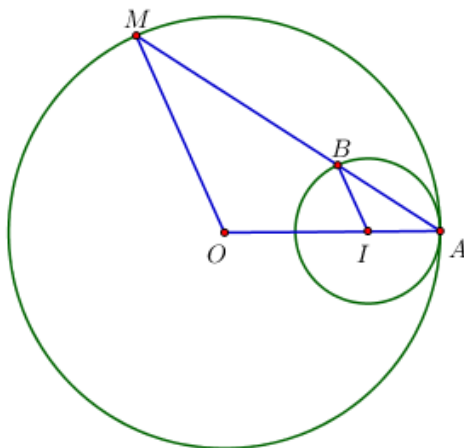
B. 45° .

C. 30° .

D. 25° .

Lời giải

Chọn C



Ta có tam giác MOA cân tại O nên $\angle MAO = \angle OMA$

Tam giác IBA cân tại I nên $\angle IBA = \angle IAB$

$\Rightarrow \angle IBA = \angle OMA$

Mà $\angle MAO = 30^\circ$ nên $\angle ABI = 30^\circ$.

Câu 7. [TH] Cho hai đường tròn (I) và (K) tiếp xúc ngoài tại M và một đường thẳng tiếp xúc với (I) và (K) lần lượt tại B và C . Tứ giác $IBCK$ là:

A. Hình vuông.

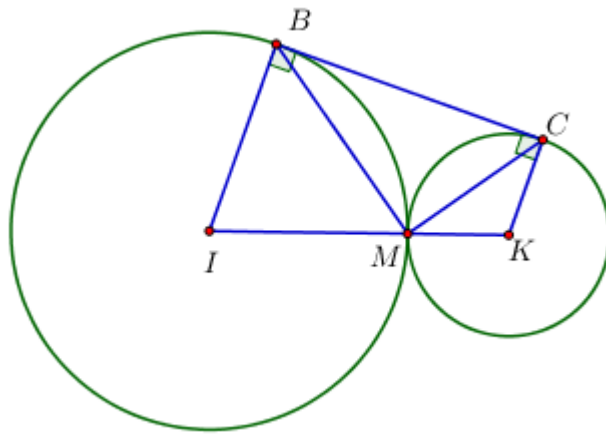
B. Hình chữ nhật.

C. Hình thang.

D. Hình bình hành.

Lời giải

Chọn C



Vì BC là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $BI \perp BC$.

Vì BC là tiếp tuyến của đường tròn (K) nên $CK \perp BC$.

Suy ra $BI \parallel CK$

$\Rightarrow$ Tứ giác $IBCK$ là hình thang.

Câu 8. [TH] Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A và một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1) và (O_2) lần lượt tại B và C . Tam giác ABC là:

A. Tam giác cân.

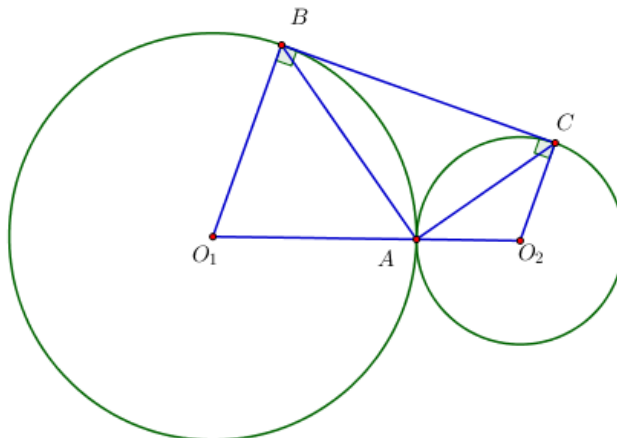
B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông.

D. Tam giác vuông cân.

Lời giải

Chọn C



Xét (O_1) có $O_1B = O_1A$

$\Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại O_1

$\Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\Rightarrow \Delta O_2AC \text{ cân tại } O_2$$

$$\Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$$

$$\text{Mà } \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180^\circ - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90^\circ$$

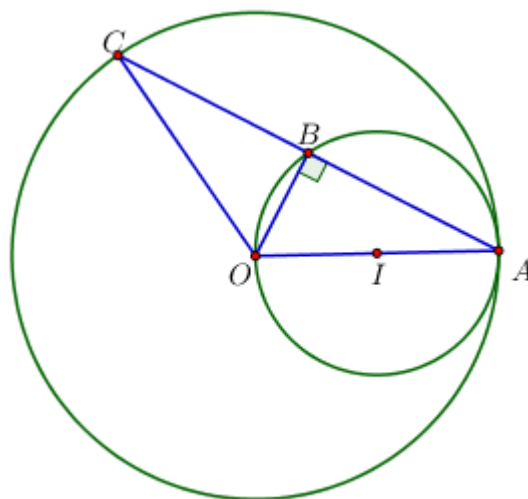
$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } A.$$

Câu 9. [TH] Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn tâm I đường kính OA . Dây AC khác đường kính của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại B . Khẳng định đúng là:
A. $AB > BC$. **B.** $AB = BC$. **C.** $AB < BC$. **D.** $BC = OC$.

Lời giải

Chọn B



Xét (I) có OA là đường kính và $B \in (I)$ nên $\angle ABO$ vuông tại $B \Rightarrow OB \perp AB$.

Xét (O) có $OA = OC$ nên ΔAOC cân tại O có OB là đường cao cũng là đường trung tuyến nên $AB = BC$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 10. [VD] Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính AO (cùng phía với nửa đường tròn (O)). Một cát tuyến bất kì qua A cắt (O') ; (O) lần lượt tại C, D . Nếu BC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O') thì độ dài BC theo R là:

A. $BC = 2R$.

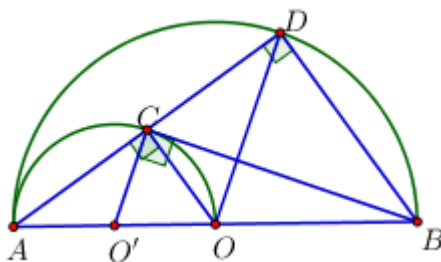
B. $BC = R\sqrt{2}$

C. $BC = R\sqrt{3}$.

D. $BC = R\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $OB = R$; $OO' = \frac{R}{2} \Rightarrow O'B = \frac{3R}{2}$; $O'C = \frac{R}{2}$

Theo định lý Pytago ta có:

$$BC = \sqrt{O'B^2 - O'C^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{4} - \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{2}.$$

Câu 11. [VD] Cho đoạn OO' và điểm A nằm trên đoạn OO' sao cho $OA = 2OA'$. Đường

tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') bán kính $O'A$. Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại C . Kết luận đúng là:

A. $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$.

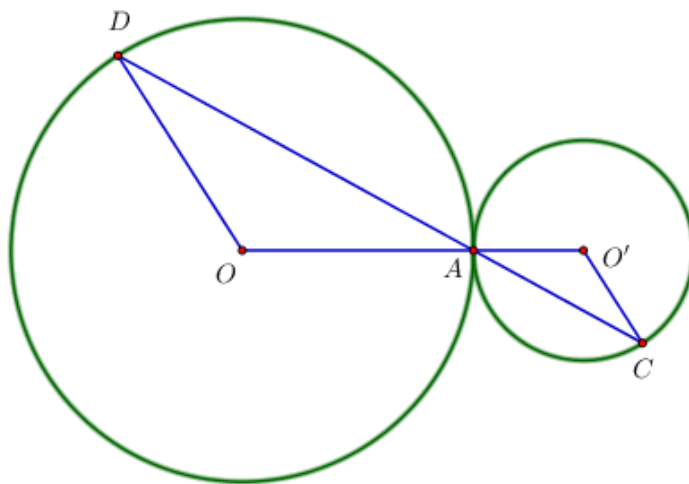
B. $\frac{AD}{AC} = 3$.

C. $\frac{AD}{AC} = 2$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn C



Vì hai đường tròn có một điểm chung là A và $OO' = OA + O'A = R + r$ nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Xét đường tròn (O') và (O) có $O'A = \frac{1}{2}OA$ nên $\frac{OA}{O'A} = 2$

Xét $\triangle O'AC$ cân tại O' và $\triangle OAD$ cân tại D có $\widehat{OAD} = \widehat{O'AD}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{ODA} = \widehat{OCA}$

Suy ra $\triangle OAD \sim \triangle O'AC$ (g - g) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{OA}{O'A} = 2$

Câu 12. [VDC] Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB của (O) ; $AO'C$ của (O') . Gọi DE vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O) vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O') ($D \in (O)$; $E \in (O')$). Gọi M là giao điểm của BD và CE . Diện tích tứ giác $ADME$ biết $\widehat{BOA} = 60^\circ$ và $OA = 8\text{ cm}$ là:

A. $12\sqrt{3}\text{cm}^2$.

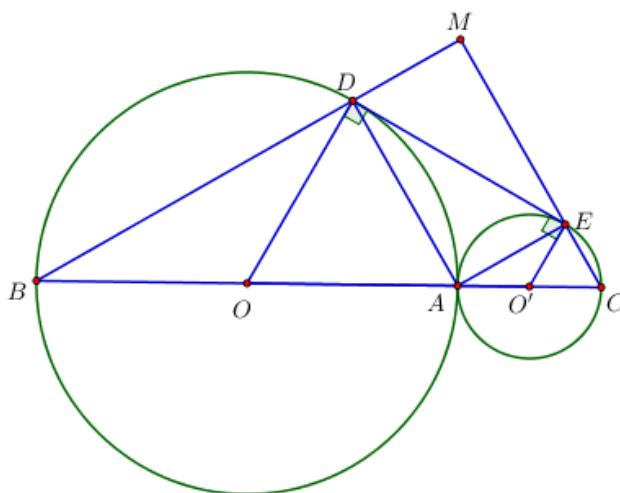
B. $\frac{64}{3}\sqrt{3}\text{cm}^2$.

C. $\frac{32}{3}\sqrt{3}\text{cm}^2$.

D. 36cm^2 .

Lời giải

Chọn B



CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Xét (O) có $OD = OA \Rightarrow \triangle OAD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{OAD}$

Xét (O') có $O'E = O'A \Rightarrow \triangle O'EA$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'EA} = \widehat{O'AE}$

Mà $\widehat{O} + \widehat{O'} = 360^\circ - \widehat{O'ED} - \widehat{ODE} = 180^\circ$

$$\Rightarrow 180^\circ - \widehat{ODA} - \widehat{OAD} + 180^\circ - \widehat{O'EA} - \widehat{O'AE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{OAD} + \widehat{O'AE}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{O'AE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ADE$ vuông tại A .

Mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ (vì tam giác BAD có cạnh AB là đường kính của (O) và $D \in (O)$ nên $BD \perp AD \Rightarrow \widehat{MDA} = 90^\circ$

Tương tự ta có $\widehat{MEA} = 90^\circ$

Nên tứ giác $DMEA$ là hình chữ nhật

Xét tam giác OAD cân tại O có $\widehat{DOA} = 60^\circ$ nên $\triangle DOA$ đều, suy ra $OA = AD = 8$ cm và $\widehat{ODA} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ADE} = 30^\circ$. Xét tam giác ADE có $EA = AD \cdot \tan \widehat{EDA} = 8 \cdot \tan 30^\circ = \frac{8}{3}\sqrt{3}$

$$S_{DMEA} = AD \cdot AE = 8 \cdot \frac{8}{3}\sqrt{3} = \frac{64}{3}\sqrt{3} (cm^2)$$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

- a) Hai đường tròn có điểm chung.
- b) Hai đường tròn có nhiều hơn một điểm chung.
- c) Hai đường tròn có đúng một điểm chung.
- d) Hai đường tròn không có điểm chung.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có 1 điểm chung nên a, c đúng còn b, d sai.

Câu 2. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn tâm I đường kính OA . Dây AC khác đường kính của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại B .

- a) $BC = BA$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

- b) $BC > AO$.
- c) $AC > BC$.
- d) $AC < AB$.

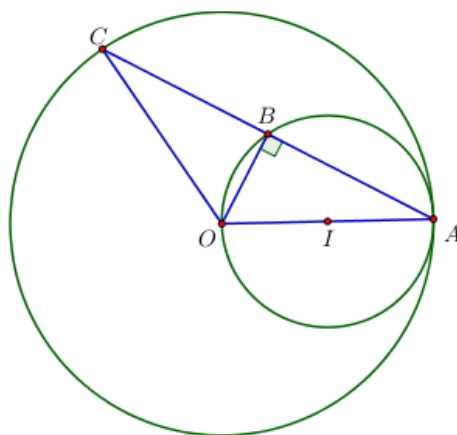
Lời giải

- a) D**

- b) S**

- c) D**

- d) S**



Xét (I) có OA là đường kính và $B \in (I)$ nên $\angle ABO$ vuông tại $B \Rightarrow OB \perp AB$.

$$\Rightarrow \Delta OBA \text{ vuông tại } B \Rightarrow OA > BA$$

Xét (O) có $OA = OC$ nên $\triangle AOC$ cân tại O có OB là đường cao cũng là đường trung tuyến nên $AB = BC$. Do đó ý a đúng.

Mà $OA > BA$ nên $BC < OA$. Do đó ý b sai.

Vì $AB = BC$ và $B \in AC$ nên $AC > BC$, $AC > AB$. Do đó ý c đúng, d sai.

Câu 3. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A và một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1) và (O_2) lần lượt tại B và C . Lấy M là trung điểm của BC .

- a) AM là tiếp tuyến của đường tròn (O_1) .
- b) AM không là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) .
- c) AM là đường trung bình của hình thang O_1BCO_2 .
- d) AM là đường trung tuyến của ΔABC .

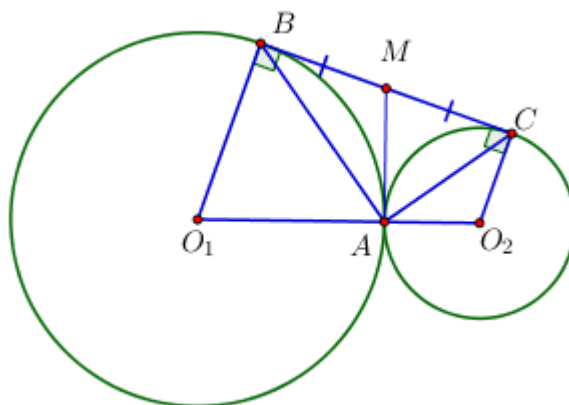
Lời giải

- a) D**

- b) S**

- c) S

- d) $\mathbb{D}$**



Xét ΔABC có M là trung điểm của BC nên AM là đường trung tuyến của ΔABC . Do đó ý d đúng.

Xét (O_1) có $O_1B = O_1A$

$\Rightarrow \Delta O_1AB$ cân tại O_1

$\Rightarrow \widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$

Xét (O_2) có $O_2C = O_2A$

$\Rightarrow \Delta O_2AC$ cân tại O_2

$\Rightarrow \widehat{O_2CA} = \widehat{O_2AC}$

Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 360^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ$

$\Rightarrow 180^\circ - \widehat{O_1BA} - \widehat{O_1AB} + 180^\circ - \widehat{O_2CA} - \widehat{O_2AC} = 180^\circ$

$\Rightarrow 2(\widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC}) = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{O_1AB} + \widehat{O_2AC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

Xét ΔBMA cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MAB}$

Mà $\widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB}$ (cmt) nên $\widehat{O_1BA} + \widehat{MBA} = \widehat{O_1AB} + \widehat{MAB}$

$\Rightarrow \widehat{O_1AM} = \widehat{O_1BM} = 90^\circ$

$\Rightarrow MA \perp AO_1$ tại A mà $A \in (O_1)$ nên AM là tiếp tuyến của (O_1) nên ý a đúng.

Tương tự ta có $MA \perp AO_2$ tại A mà $A \in (O_2)$ nên AM là tiếp tuyến của (O_2) nên ý b sai.

Vì chưa có A là trung điểm của O_1O_2 nên chưa thể khẳng định AM là đường trung bình của hình thang O_1BCO_2 nên ý c sai.

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB của (O) ; $AO'C$ của (O') . Gọi DE vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O) vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O') ($D \in (O)$; $E \in (O')$). Gọi M là giao điểm của BD và CE .

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

- a) $OD \parallel O'E$.
b) Tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật.
c) $\angle AOD = 60^\circ$.
d) AM không là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

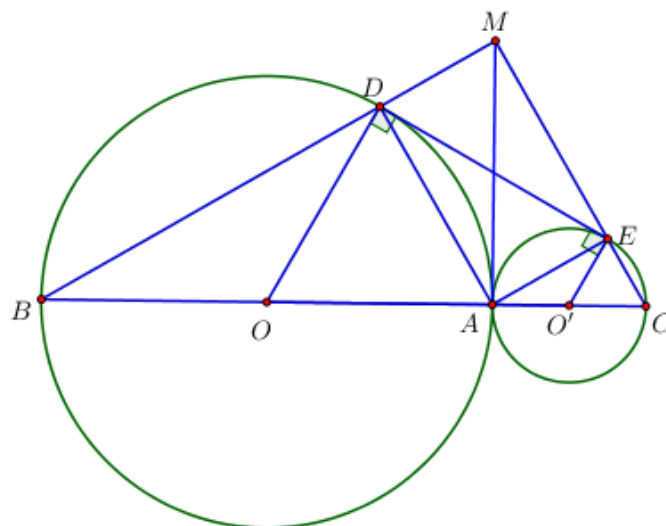
Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S



Ta có DE vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O) vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O') ($D \in (O)$; $E \in (O')$) nên $OD \perp DE$ và $O'E \perp DE \Rightarrow OD \parallel O'E$. Do đó ý a đúng.

Xét (O) có $OD = OA \Rightarrow \triangle OAD$ cân tại $O \Rightarrow \angle ODA = \angle OAD$

Xét (O') có $O'E = O'A \Rightarrow \triangle O'EA$ cân tại $O' \Rightarrow \angle O'EA = \angle O'AE$

Mà $\angle O + \angle O' = 360^\circ - \angle OED - \angle ODE = 180^\circ$

$$\Rightarrow 180^\circ - \angle ODA - \angle OAD + 180^\circ - \angle O'EA - \angle O'AE = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\angle OAD + \angle O'AE) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OAD + \angle O'AE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DAE = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ADE$ vuông tại A .

Mà $\angle BAD = 90^\circ$ (vì tam giác BAD có cạnh AB là đường kính của (O) và $D \in (O)$) nên $BD \perp AD \Rightarrow \angle MDA = 90^\circ$

Tương tự ta có $\angle MEA = 90^\circ$

Nên tứ giác $DMEA$ là hình chữ nhật. Do đó ý b đúng.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Xét tam giác OAD cân tại O nhưng không có thêm điều kiện gì nên chưa thể khẳng định $\widehat{AOD} = 60^\circ$.
Do đó ý c sai.

Vì $\widehat{MAE} = \widehat{DEA}$ (Tính chất hình chữ nhật $DMEA$) mà $\widehat{EAO'} = \widehat{AEO'}$ ($\triangle O'AE$ cân tại O')

Nên $\widehat{MAO'} = \widehat{DEO'}$ mà $\widehat{DEO'} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO'} = 90^\circ$

$\Rightarrow MA \perp OO'$ mà $A \in (O')$ suy ra MA là tiếp tuyến của đường tròn (O') . Do đó ý d sai.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB] Hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc nhau thì chúng có bao nhiêu điểm chung?

Lời giải

Đáp án: 1 điểm chung.

Hai đường tròn tiếp xúc nhau có 1 điểm chung.

Câu 2. [NB] Cho $OI = 8cm$, vẽ đường tròn $(O; 5cm)$ và $(I; 3cm)$. Hỏi vị trí tương đối của hai đường tròn là gì?

Lời giải

Đáp án: Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Vì $R + r = 5 + 3 = 8$ (cm) và $OI = 8cm$ nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Câu 3. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 2cm)$ và $(A; 3cm)$ tiếp xúc trong tại điểm M . Độ dài OA là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $OA = 1cm$.

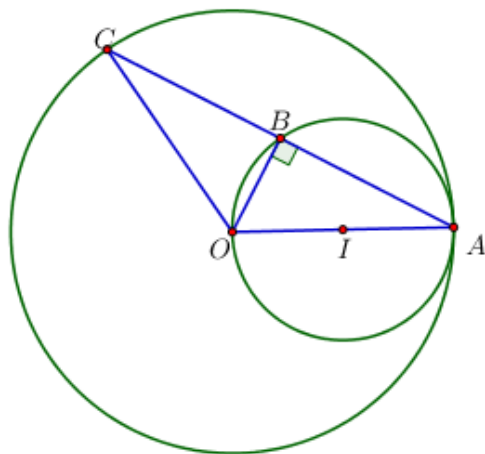
Ta có $OA = R - r = AM - OM = 3 - 2 = 1(cm)$

Vậy $OA = 1cm$.

Câu 4. [TH] Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn tâm I đường kính OA . Dây AC khác đường kính của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại B . Biết $AC = 8cm$. Độ dài AB là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $AB = 4cm$.



Xét (I) có OA là đường kính và $B \in (I)$ nên $\angle ABO$ vuông tại $B \Rightarrow OB \perp AB$.

Xét (O) có $OA = OC$ nên $\triangle AOC$ cân tại O có OB là đường cao cũng là đường trung tuyến nên $AB = BC$ mà $B \in AC$ nên B là trung điểm AC .

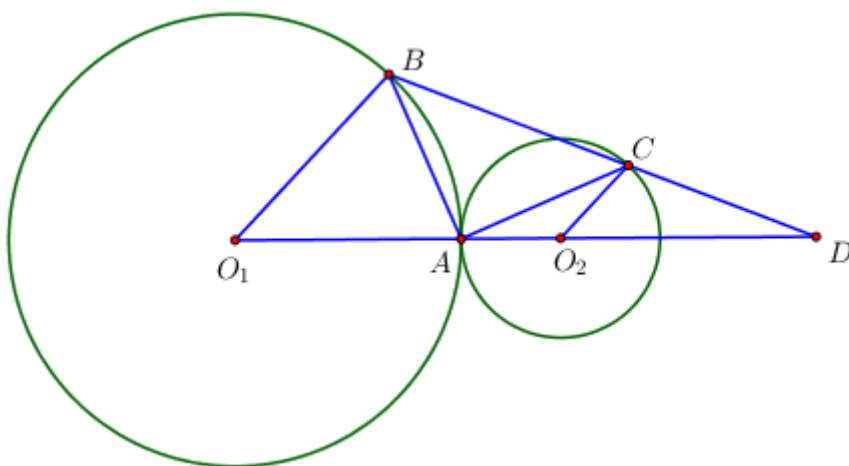
$$\Rightarrow AB = \frac{1}{2}AC \text{ mà } AC = 8cm \Rightarrow AB = 4cm.$$

Vậy $AB = 4cm$.

Câu 5. [VD] Cho $(O_1; 3cm)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2; 1cm)$. Vẽ bán kính O_1B và O_2C song song với nhau (Hai điểm B và C nằm cùng phía so với đường thẳng O_1O_2). Độ dài O_1D là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $O_1D = 6cm$



Vì $\triangle O_1BD$ có $O_1B \parallel O_2C$ nên theo hệ quả định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{O_2D}{O_1D} = \frac{O_2C}{O_1B} = \frac{1}{3} \quad \frac{O_1O_2}{O_1D} = \frac{2}{3} \text{ suy ra}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\text{Mà } O_1O_2 = O_1A + O_2A = 3 + 1 = 4 \Rightarrow O_1D = \frac{2}{3}O_1O_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 = 6(\text{cm})$$

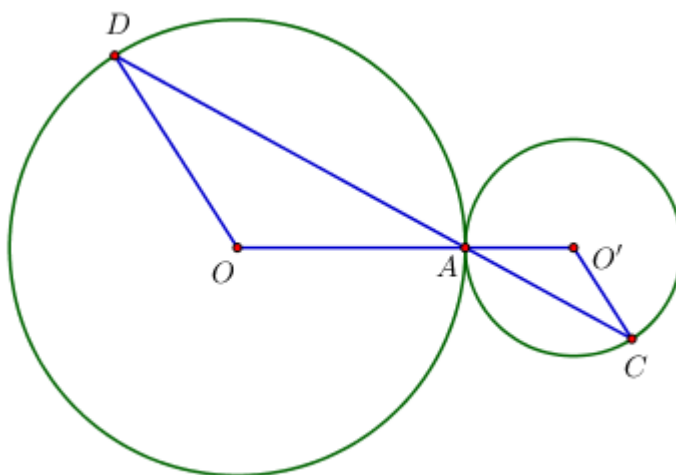
$$\text{Vậy } O_1D = 6\text{ cm}.$$

Câu 6. [VD] Cho đoạn OO' và điểm A nằm trên đoạn OO' sao cho $OA = 2O'A$. Đường

tròn (O) bán kính OA và đường tròn (O') bán kính $O'A$. Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại C . Khi đó tỉ số của AD và DC là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$.



Vì hai đường tròn có một điểm chung là A và $OO' = OA + O'A = R + r$ nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Xét đường tròn (O') và (O) có $O'A = \frac{1}{2}OA$ nên $\frac{OA}{O'A} = 2$

Xét $\triangle O'AC$ cân tại O' và $\triangle OAD$ cân tại D có $\angle OAD = \angle O'AD$ (đối đỉnh) nên $\angle ODA = \angle OCA$

$$\text{Suy ra } \triangle OAD \sim \triangle O'AC \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{OA}{O'A} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AD}{AD + AC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}.$$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

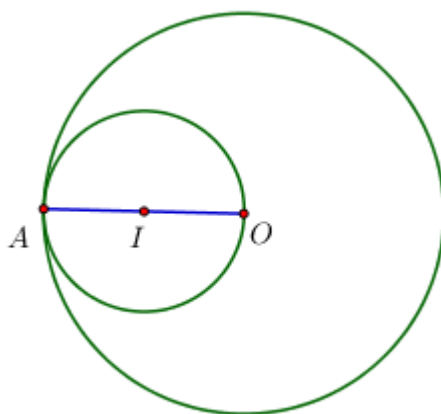
Áp dụng các kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn tiếp xúc nhau.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]:

Cho đoạn thẳng AB . Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB . Vẽ đường tròn tâm I đường kính OA . Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Lời giải



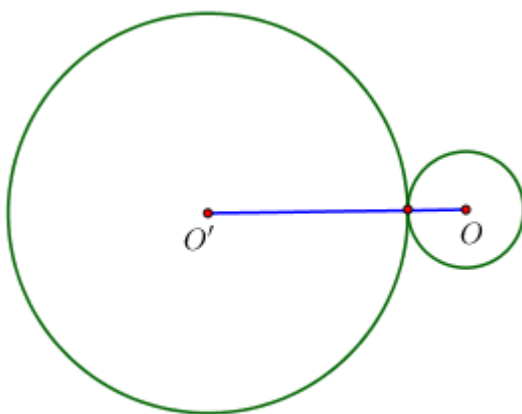
Ta có $OI = \frac{OA}{2}$ mà $R - r = OA - \frac{OA}{2} = \frac{OA}{2} \Rightarrow OI = R - r$

Vậy hai đường tròn tiếp xúc trong.

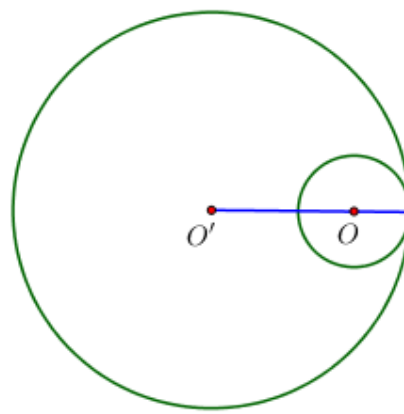
Ví dụ 2 [TH]:

Cho hai đường tròn $(O; 4\text{cm})$ và $(O'; 11\text{cm})$. Biết $OO' = 2a + 3$ (cm) với a là một số thực dương. Tìm a để hai đường tròn đã cho tiếp xúc nhau.

Lời giải



Hình 1



Hình 2

Ta xét các trường hợp:

- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài (hình 1), ta có $OO' = R + R' \Rightarrow 2a + 3 = 15 \Rightarrow a = 6$ (cm)
- Hai đường tròn tiếp xúc trong (hình 2), ta có $OO' = R' - R \Rightarrow 2a + 3 = 7 \Rightarrow a = 2$ (cm)

Vậy $a = 6$ cm hoặc $a = 2$ cm.

Ví dụ 3 [TH]:

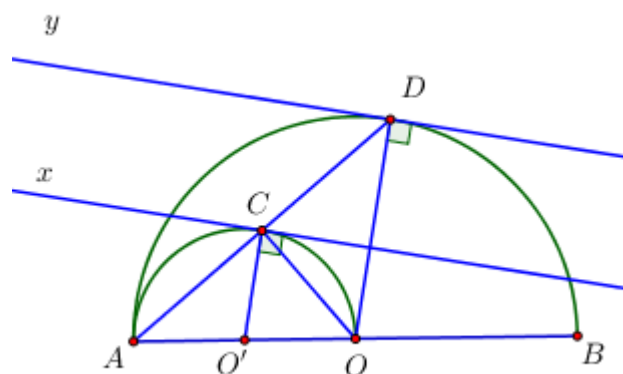
Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Vẽ nửa đường tròn tâm O' đường kính AO (cùng phía với nửa đường tròn (O)). Một cát tuyến bất kì qua A cắt (O') ; (O) lần lượt tại C, D . Chứng minh rằng:

a) C là trung điểm của AD .

b) $O'C \parallel OD$.

c) Các tiếp tuyến tại C và D của các nửa đường tròn song song với nhau.

Lời giải



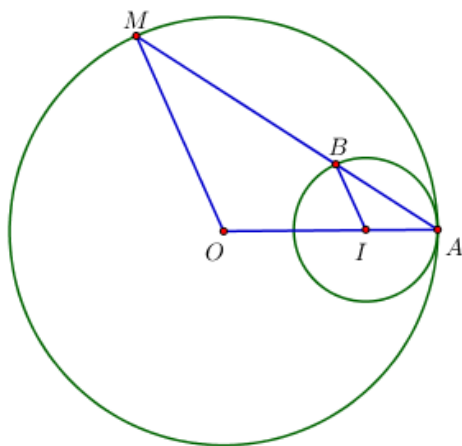
- a) Xét nửa đường tròn (O') có AO là đường kính và $C \in (O')$ nên $\angle ACO = 90^\circ \Rightarrow AD \perp CO$.
Xét (O) có $OA = OD \Rightarrow \triangle OAD$ cân tại O có OC là đường cao nên OC cũng là đường trung tuyến hay C là trung điểm của AD .
- b) Xét tam giác AOD có $O'C$ là đường trung bình nên $O'C \parallel OD$
- c) Kẻ các tiếp tuyến $Cx; Dy$ với các nửa đường tròn ta có $Cx \perp O'C; Dy \perp OD$ mà $O'C \parallel OD$ nên $Cx \parallel Dy$.

Ví dụ 4 [VD]:

Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ MN là tiếp tuyến của cả hai đường tròn với $M \in (O); N \in (O')$; M khác N . Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO' ; Q là điểm đối xứng với N qua OO' . Tiếp tuyến chung tại A của đường tròn (O) và (O') cắt MN tại B , cắt PQ tại C . Chứng minh rằng:

- a) $MN = PQ$.
- b) PQ cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O') .
- c) Tứ giác $MPNQ$ là hình thang cân.
- d) B là trung điểm của MN .

Lời giải



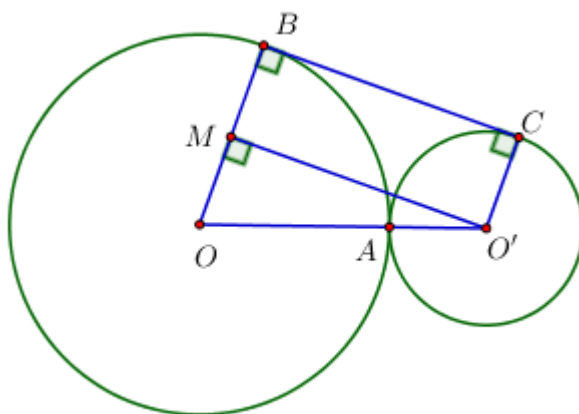
Ta có tam giác MOA cân tại O nên $\widehat{MAO} = \widehat{OMA}$

Tam giác IBA cân tại I nên $\widehat{IBA} = \widehat{IAB}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $IB \parallel OM$.

Bài 3. [VD] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A với $R > r$. Gọi BC là tiếp tuyến của cả hai đường tròn (O) và (O') ($B \in (O), C \in (O')$). Tính BC theo R và r .

Hướng dẫn



Kẻ $O'M \perp OB$ với $M \in OB$

Ta thấy $BMO'C$ là hình chữ nhật nên $BM = r$; $BC = O'M$.

$\Rightarrow OM = R - r$

Xét $\Delta O'OM$, theo định lý Pytago có $O'M^2 + OM^2 = O'O^2 \Rightarrow O'M = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$.

Vậy $BC = 2\sqrt{Rr}$.

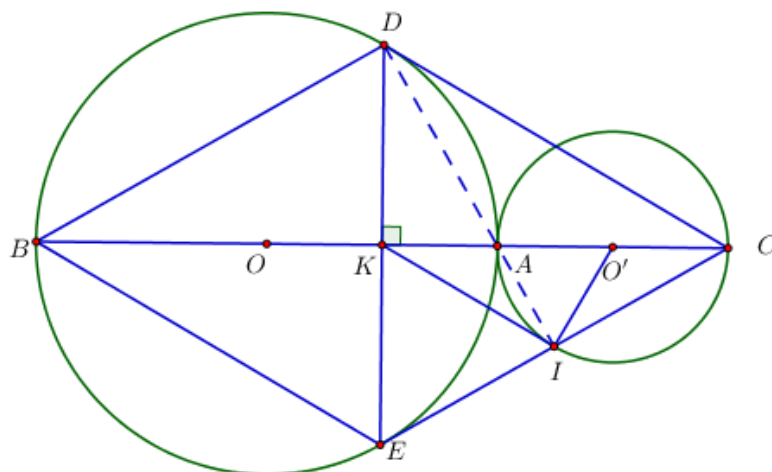
Bài 4. [VD] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A với $R > R'$. Đường nối tâm OO' cắt (O) và (O') lần lượt tại B, C . Gọi K là trung điểm của BC . Dây DE của (O) vuông góc với BC tại K .

a) Chứng minh rằng $BDCE$ là hình thoi.

b) Gọi I là giao điểm của EC và (O') . Chứng minh rằng D, A, I thẳng hàng.

c) Chứng minh KI là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Hướng dẫn



a) Vì BC vuông góc với DE nên K là trung điểm của DE mà K là trung điểm của BC nên tứ giác $BDCE$ là hình bình hành mà $BC \perp DE \Rightarrow BDCE$ là hình thoi.

b) Vì $\triangle ADB$ nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính nên $\triangle ADB$ vuông tại D . Gọi I' là giao điểm của AD và CE .

Vì $BD \parallel EC$ nên $\angle BDI' = \angle AIC$ (hai góc so le trong) mà $\angle BDI' = 90^\circ$ nên $\angle AIC = 90^\circ$ (1).

Vì $\triangle AIC$ nội tiếp đường tròn (O') có AC là đường kính nên $\triangle AIC$ vuông tại $I \Rightarrow \angle AIC = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$. Vậy D, A, I thẳng hàng.

c) Ta có $\angle EDI = \angle DIK$ (vì $\triangle DIE$ vuông tại I có K là trung điểm của DE)

Lại có $\angle KCI = \angle DIK$ (cùng phụ với $\angle DEC$)

Mặt khác $\angle KCI = \angle O'IC$

$\Rightarrow \angle DIK = \angle O'IC$

$\Rightarrow \angle DIK + \angle AIO' = \angle O'IC + \angle AIO' = \angle AIC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle KIO' = 90^\circ \Rightarrow KI \perp IO'$ mà $I \in (O')$ nên KI là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

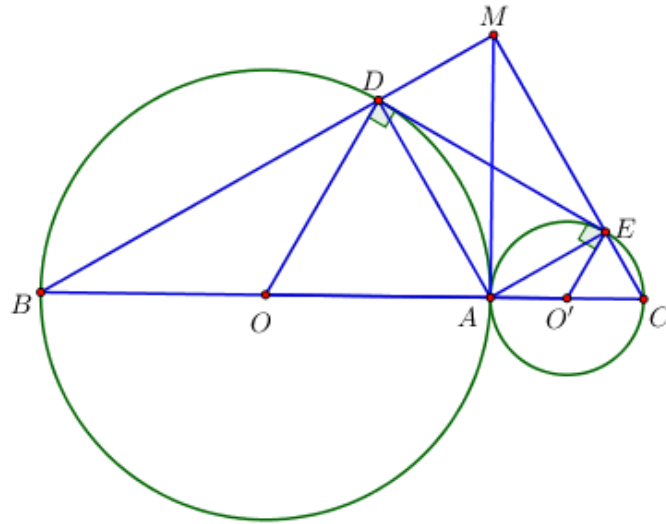
Bài 5. [VD] Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB của (O) ; $AO'C$ của (O') . Gọi DE vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O) vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O') ($D \in (O)$; $E \in (O')$). Gọi M là giao điểm của BD và CE . Chứng minh rằng

a) Tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật.

b) AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) và (O') .

c) $MD \cdot MB = ME \cdot MC$.

Hướng dẫn



a) Xét (O) có $OD = OA \Rightarrow \Delta OAD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{OAD}$

Xét (O') có $O'E = O'A \Rightarrow \Delta O'EA$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'EA} = \widehat{O'AE}$

Mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ - \widehat{B'ED} - \widehat{B'DE} = 180^\circ$

$$\Rightarrow 180^\circ - \widehat{ODA} - \widehat{OAD} + 180^\circ - \widehat{O'EA} - \widehat{O'AE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\widehat{OAD} + \widehat{O'AE}) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{O'AE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \Delta ADE$ vuông tại A .

Mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ (vì tam giác BAD có cạnh AB là đường kính của (O) và $D \in (O)$ nên $BD \perp AD \Rightarrow \widehat{MDA} = 90^\circ$

Tương tự ta có $\widehat{MEA} = 90^\circ$

Nên tứ giác $DMEA$ là hình chữ nhật.

b) Vì $\widehat{MAE} = \widehat{DEA}$ (Tính chất hình chữ nhật $DMEA$) mà $\widehat{EAO'} = \widehat{EO'A}$ ($\Delta O'AE$ cân tại O')

Nên $\widehat{MAO'} = \widehat{EO'A}$ mà $\widehat{EO'A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO'} = 90^\circ$

$\Rightarrow MA \perp OO'$ mà $A \in (O)$ suy ra MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Mặt khác $MA \perp OO'$ và $A \in (O')$ nên MA là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

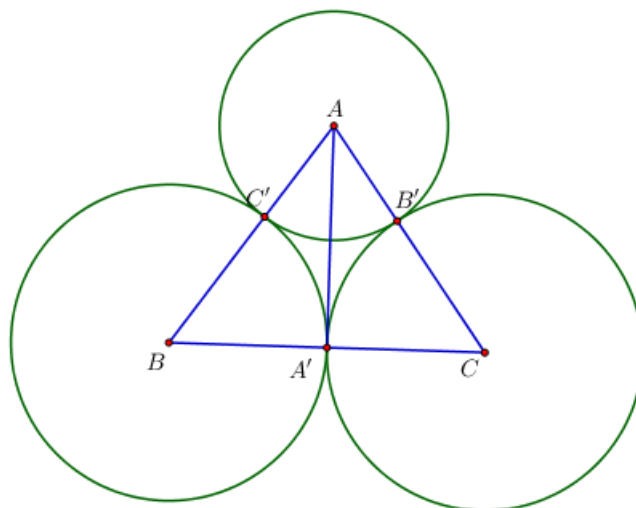
c) Ta sẽ chứng minh $\Delta MDE \sim \Delta MCB$ (g - g). Từ đó suy ra $MD.MB = ME.MC$.

Bài 6. [VD] Cho các đường tròn $(A; 10cm)$; $(B; 15cm)$; $(C; 15cm)$ tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Hai đường tròn (B) và (C) tiếp xúc với nhau tại A' . Đường tròn (A) tiếp xúc với đường tròn (B) và (C) lần lượt tại C' và B' .

a) Chứng minh AA' là tiếp tuyến chung của đường tròn.

b) Tính AA' .

Hướng dẫn



a) Theo tính chất đoạn nối tâm của hai đường tròn tiếp xúc ngoài ta có:

$AB = BC' + C'A = 25\text{cm}$; $AC = AB' + B'C = 25\text{cm}$; $BC = BA' + A'C = 30\text{cm}$ và A' là trung điểm của BC (vì $A'B = A'C = 15\text{cm}$)

$\triangle ABC$ cân tại A có AA' là đường trung tuyến nên cũng là đường cao

$\Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow AA'$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (B) và (C) .

b) Xét tam giác $AA'C$ vuông tại A' có:

$$AA'^2 = AC^2 - A'C^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow AA' = 20\text{cm}.$$

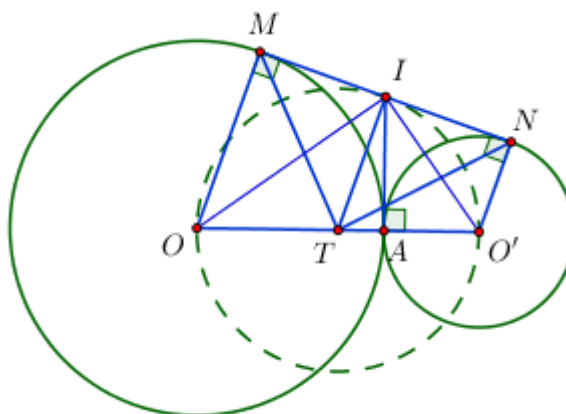
Bài 7. [VD] Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Tiếp tuyến của cả hai đường tròn có tiếp điểm với hai đường tròn lần lượt ở M và N . Tiếp tuyến của hai đường tròn tại A cắt MN tại I .

a) Chứng minh tam giác MAN và OIO' là các tam giác vuông.

b) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng MN với đường tròn đường kính OO' .

c) Tính $S_{OIO'}$ biết bán kính của hai đường tròn tâm O và O' lần lượt bằng 48cm và 27cm .

Hướng dẫn



CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

a) Ta có: $IM = IA$ và $IN = IA$ nên $IM = IA = IN$

Tam giác MAN là tam giác vuông ở đỉnh A

Do đó OI và $O'I$ lần lượt là phân giác của hai góc kề bù $\widehat{MIA}$ và $\widehat{AIN}$ nên $OI \perp IO' = I$

Tam giác IOO' vuông tại đỉnh I

b) Gọi I' là trung điểm của OO' thì $II' = IO' = I'O'$, nên II' là bán kính của đường tròn qua ba điểm O, I, O'

Mặt khác tứ giác $OMNO'$ là hình thang, II' là đường trung bình của hình thang này, do đó $II' \parallel OM; OM \perp MN \Rightarrow II' \perp MN$ tại I .

Vậy đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn qua ba điểm O, I, O' tại điểm I .

c) Tam giác OIO' vuông tại I ta có đường cao IA , nên ta có:

$$IA^2 = OA.O'A = 48.27 = 1296 \Rightarrow IA = 36(cm)$$

Diện tích tam giác OIO' là: $S_{OIO'} = \frac{OO'.IA}{2} = \frac{75.36}{2} = 1350(cm^2)$

ĐẠNG 2: CÁC BÀI TOÁN VỀ HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Nếu hai đường tròn cắt nhau thì số điểm chung là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Vì hai đường tròn cắt nhau có hai điểm chung.

Câu 2. [NB] Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Hệ thức đúng là:

- A. $OO' = R + R'$. B. $R - R' < OO' < R + R'$. C. $OO' > R + R'$. D. $OO' > R + R'$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R > R'$ cắt nhau thì $R - R' < OO' < R + R'$

Câu 3. [NB] Hai đường tròn $(O; R)$ và $(A; r)$. Biết $R = 1,5cm; r = 3,5cm$ và $OA = 4cm$. Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

- A. Tiếp xúc trong. B. Tiếp xúc ngoài. C. Cắt nhau. D. Đụng nhau.

Lời giải

Chọn C

Ta có $R + r = 1,5 + 3,5 = 5$ (cm) và $r - R = 3,5 - 1,5 = 2$ (cm)

Mà $OA = 4cm$ nên $r - R < OA < R + r$.

Vậy hai đường tròn cắt nhau.

Câu 4. [NB] Cho $IK = 5cm$. Lấy điểm A nằm giữa I và K sao $AK = 2cm$. Vẽ đường tròn tâm $(I; 5cm)$ và $(A; 4cm)$. Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

A. Tiếp xúc trong.

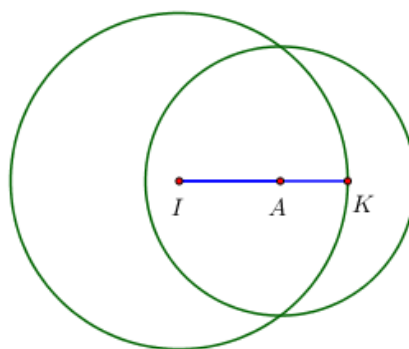
B. Tiếp xúc ngoài.

C. Cắt nhau.

D. Đụng nhau.

Lời giải

Chọn C



Có $IA = IK - AK = 3cm$

Suy ra $5 - 3 < IA < 5 + 3$. Vậy hai đường tròn cắt nhau.

Câu 5. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 6cm)$ và $(O'; 5cm)$ có $OO' = 8cm$. Đường thẳng OO' cắt (O) và (O') cắt lần lượt tại A, B . Độ dài AB là:

A. $6cm$.

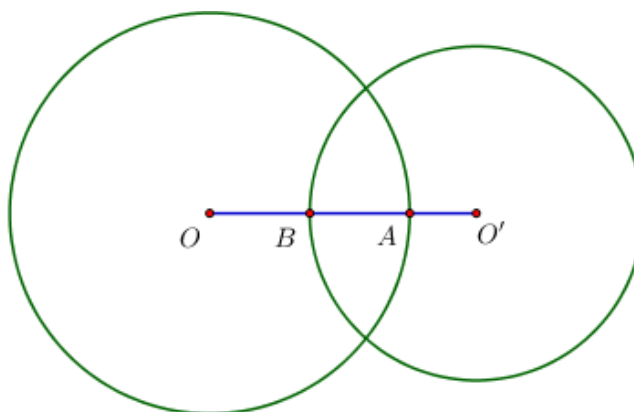
B. $3cm$.

C. $5cm$.

D. $8cm$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $OB + AB = OA \Rightarrow OB + AB = 6$

$O'A + AB = O'B \Rightarrow O'A + AB = 5$

Suy ra $OB + AB + O'A + AB = 11 \Rightarrow OO' + AB = 11 \Rightarrow AB = 3(cm)$.

Câu 6. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 5)$ và $(O'; 5)$ cắt nhau tại A và B . Biết $OO' = 8$. Độ dài dây cung AB là:

A. $6cm$.

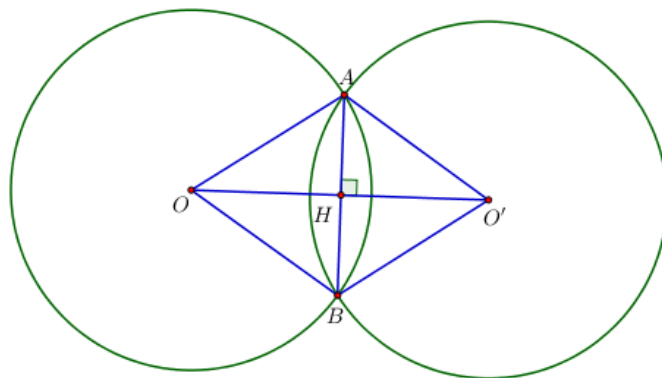
B. $7cm$.

C. $5cm$.

D. $8cm$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $OA = O'A = 5cm$ nên tam giác AOO' cân tại A .

Kẻ AH vuông góc với OO' nên H là trung điểm của OO' . Suy ra $OH = 4cm$.

Xét tam giác AOH vuông tại H nên suy ra

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 5^2 - 4^2 = 9 = 3^2$$

Do đó $AH = 3cm$

Mà $AB = 2AH$

Vậy $AB = 6cm$.

Câu 7. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 20cm)$ và $(O'; 15cm)$ cắt nhau tại A và B . Biết rằng $AB = 24cm$ và O, O' nằm cùng phía đối với AB . Độ dài đoạn nối tâm OO' là:

A. $OO' = 7cm$.

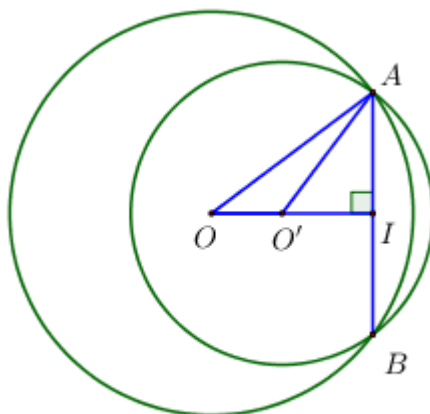
B. $OO' = 8cm$.

C. $OO' = 9cm$.

D. $OO' = 25cm$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $OI \perp AB$ tại $I \Rightarrow I$ là trung điểm AB .

Ta có: $AI = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12 (cm)$

Theo định lý Pytago ta có: $OI^2 = OA^2 - AI^2 = 256 \Rightarrow OI = 16cm$ và $O'I = \sqrt{O'A^2 - IA^2} = 9cm$

Do đó $OO' = OI - O'I = 16 - 9 = 7 (cm)$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 8. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 8cm)$ và $(O'; 6cm)$ cắt nhau tại A, B sao cho OA là tiếp tuyến của (O') . Độ dài dây AB là:

A. $AB = 8,6cm$

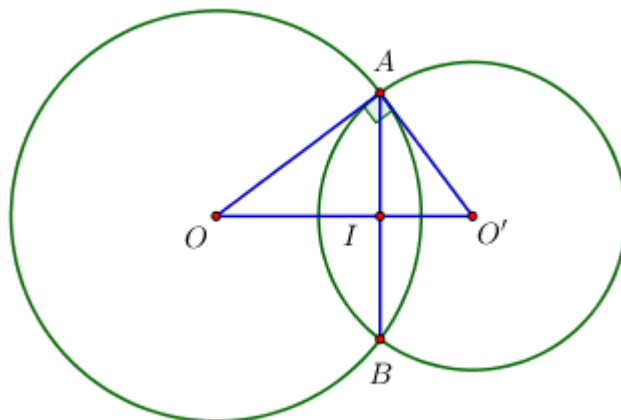
B. $AB = 6,9cm$

C. $AB = 4,8cm$

D. $AB = 9,6cm$

Lời giải

Chọn D



Vì OA là tiếp tuyến của (O') nên $\triangle OAO'$ vuông tại A .

Vì (O) và (O') cắt nhau tại A, B nên ta dễ dàng chỉ ra được OO' là trung trực của đoạn AB .

Gọi giao điểm của AB và OO' là I thì $AB \perp OO'$ tại I là trung điểm của AB .

Áp dụng định lý Pytago vào tam giác vuông OAO' ta có:

$$OA^2 + O'A^2 = OO'^2 \Rightarrow OO' = 10cm$$

Xét tam giác vuông OAO' ta có:

$$OA \cdot AO' = OO' \cdot AI \Rightarrow 8 \cdot 6 = 10 \cdot AI \Rightarrow AI = 4,8cm \Rightarrow AB = 9,6cm$$

Câu 9. [VD] Cho hai đường tròn $(O); (O')$ cắt nhau tại A, B trong đó $O' \in (O)$. Kẻ đường kính $O'OC$ của đường tròn (O) . Chọn khẳng định đúng.

A. $\angle AOC < 90^\circ$

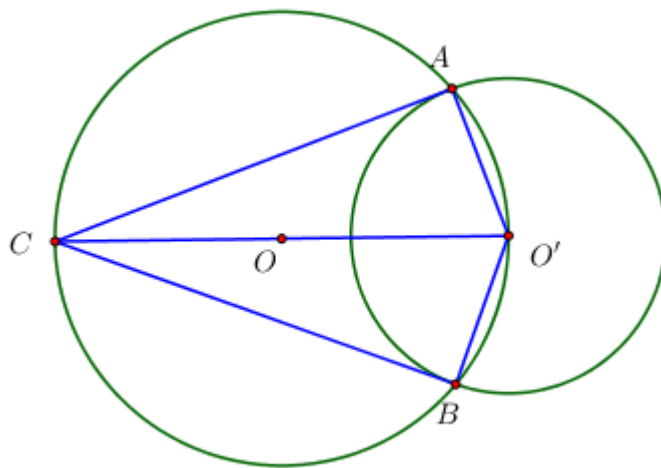
B. $\angle BO'C > 90^\circ$

C. OO' là đường trung trực của AB .

D. $AC \neq CB$

Lời giải

Chọn C



Xét đường tròn (O) có OC là đường kính, suy ra $\angle BO' = \angle AO' = 90^\circ$ hay $CB \perp O'B$ và $AC \perp AO'$

Do đó AC, BC là hai tiếp tuyến của (O') nên $AC = CB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta có $AO = OB$ và $O'A = O'B$ suy ra OO' là đường trung trực của AB .

Nên các khẳng định A, B, D đều sai, C đúng.

Câu 10. [VD] Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B . Gọi I là trung điểm của OO' . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA cắt (O) tại C và cắt (O') tại D . So sánh AC và AD ta được kết luận là:

A. $AC = AD$.

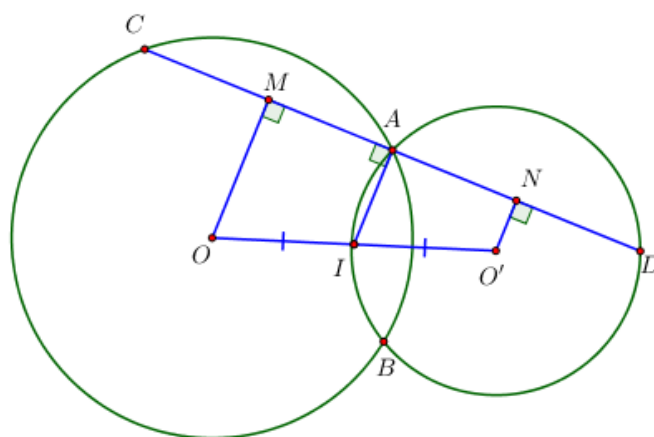
B. $AC < AD$.

C. $AC > AD$.

D. Không so sánh được.

Lời giải

Chọn A



Vẽ $OM \perp AC$ tại $M \Rightarrow MA = MC = \frac{1}{2}AC$ (1)

$O'N \perp AD$ tại $N \Rightarrow NA = ND = \frac{1}{2}AD$ (2)

Hình thang $OO'NM$ có: $IO = IO'$ và $IA \parallel OM \parallel O'N \Rightarrow MA = NA$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC = AD$.

Câu 11. [VD] Cho hai đường tròn $(O); (O')$ cắt nhau tại A, B với O, O' nằm cùng phía đối với AB .

Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O') . Độ dài CD biết $OO' = 6cm$ là:

A. $6cm$.

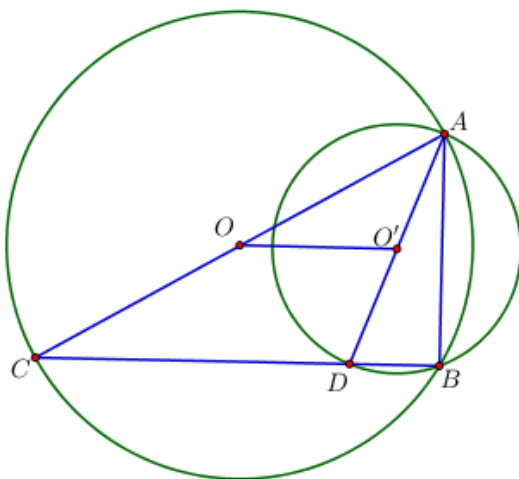
B. $8cm$.

C. $12cm$.

D. $15cm$.

Lời giải

Chọn C



Xét đường tròn (O) có AC là đường kính, suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B hay $\angle CBA = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AB$

Xét đường tròn (O') có AD là đường kính, suy ra $\triangle ABD$ vuông tại B hay $\angle DBA = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AB$

Suy ra $BC \equiv BD$ hay ba điểm B, C, D thẳng hàng

Xét tam giác ADC có O là trung điểm đoạn AC và O' là trung điểm đoạn AD nên OO' là đường

trung bình của tam giác $ADC \Rightarrow OO' = \frac{CD}{2}$ (tính chất đường trung bình).

$\Rightarrow CD = 2.OO' = 2.6 = 12(cm)$

Câu 12. [VD] Cho đường thẳng xy và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau. Gọi M là một điểm di động trên xy . Vẽ đường tròn đường kính OM cắt đường tròn (O) tại A và B . Kẻ $OH \perp xy$. Khẳng định đúng là:

A. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là H .

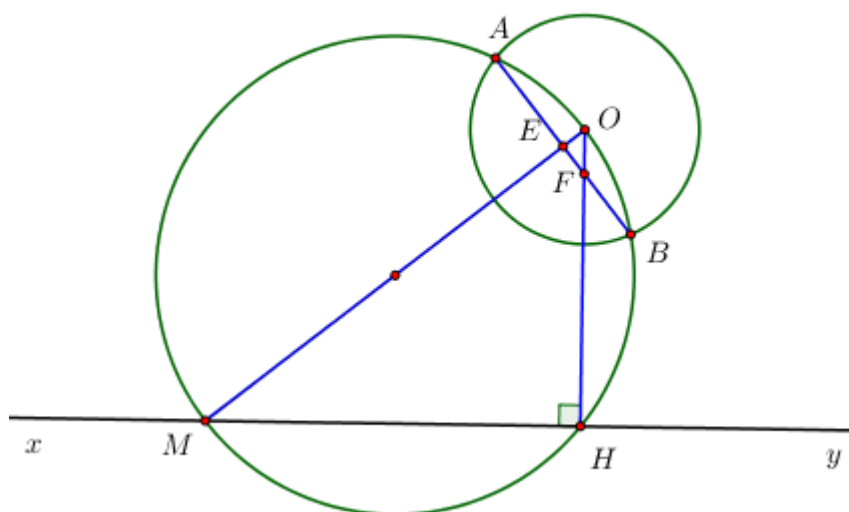
B. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là trung điểm OH .

C. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là giao của OH và AB .

D. Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định là giao của OH và $(O; R)$.

Lời giải

Chọn C



Vì $OH \perp xy$ nên H là một điểm cố định và OH không đổi.

Gọi giao điểm của AB và OM là E ; giao điểm của AB với OH là F .

Vì $(O; R)$ và đường tròn đường kính OM cắt nhau tại $A; B$ nên ta dễ dàng chỉ ra được OM là đường trung trực của AB suy ra $AB \perp OM$.

Lại có điểm A nằm trên đường tròn đường kính OM nên $\angle OAM = 90^\circ$

Xét $\triangle OEF$ và $\triangle OHM$ có $\angle$ chung và $\angle OEF = \angle OHM = 90^\circ$ nên $\triangle OEF \sim \triangle OHM$ (g - g)

$$\frac{OE}{OH} = \frac{OF}{OM} \Rightarrow OE \cdot OM = OF \cdot OH$$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A có AE là đường cao nên ta có $OM \cdot OE = OA^2 = R^2 \Rightarrow OF \cdot OH = R^2$

$$\Rightarrow OF = \frac{R^2}{OH}$$

Do OH không đổi nên OF cũng không đổi

Vậy F là một điểm cố định hay AB luôn đi qua một điểm cố định là giao của AB và OH .

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho hai đường tròn cắt nhau.

- a) Hai đường tròn có điểm chung.
- b) Hai đường tròn có nhiều hơn một điểm chung.
- c) Hai đường tròn có đúng một điểm chung.
- d) Hai đường tròn không có điểm chung.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S

Hai đường tròn cắt nhau có hai điểm chung nên a, b đúng còn c, d sai.

Câu 2. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ cắt nhau tại M và N . Biết $OO' = 24cm$, $MN = 10cm$.

a) $R > 14cm$.

b) $R > 10cm$.

c) $R = 13cm$.

d) $R = 14cm$.

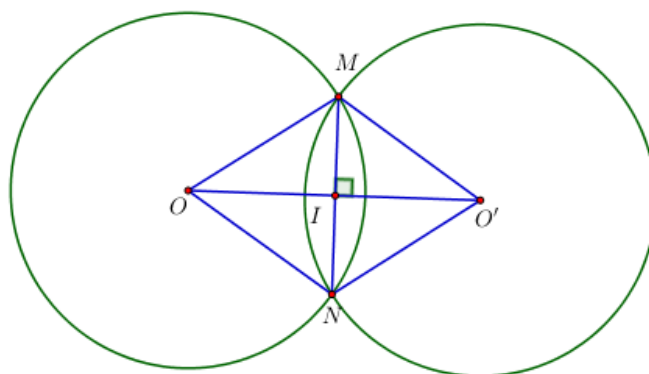
Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) S



Gọi giao điểm của OO' và MN là I .

Vì $OM = ON = O'M = O'N = R$ nên tứ giác $OMON$ là hình thoi.

$\Rightarrow OO' \perp MN$ tại điểm I là trung điểm của mỗi đoạn OO' và MN .

Do đó: $IM = \frac{MN}{2} = 5cm$ $IO = \frac{OO'}{2} = 12cm$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác MIO ta có:

$$R = OM = \sqrt{IM^2 + IO^2} = 13$$

$$R = 13(cm)$$

Vậy nên các ý a, d sai còn các ý b, c đúng.

Câu 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Gọi I là trung điểm của OO' . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA , cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D (khác A).

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

- a) $AC = AD$.
- b) $AC > AD$.
- c) $AC < CD$.
- d) $AC = \frac{CD}{3}$.

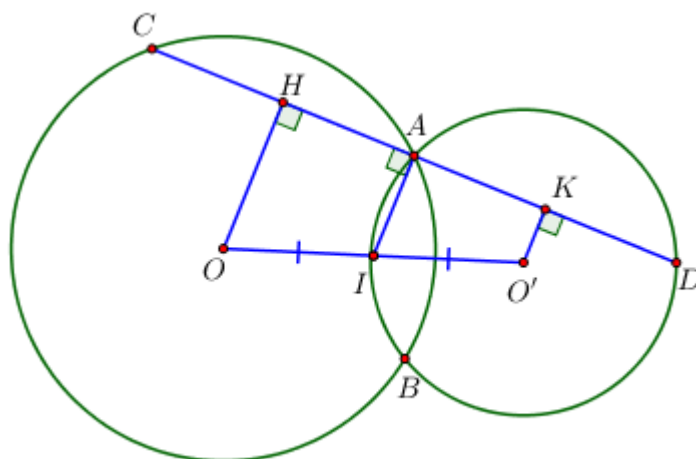
Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S



Kẻ $OH \perp CD$, $O'K \perp CD$

Ta có: $IA \perp CD$

Suy ra : $OH \parallel IA \parallel O'K$

Suy ra : $AH = AK$ (tính chất đường thẳng song song cách đều) (1)

Ta có : $OH \perp AC$

Suy ra : $HA = HC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = 2AH$ (2)

Lại có : $O'K \perp AD$

Suy ra : $AK = KD = \frac{1}{2}AD \Rightarrow AD = 2AK$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $AC = AD$ nên ý a đúng, ý b sai.

Mà A nằm giữa hai điểm C và D nên $CD = 2AC \Rightarrow CD = \frac{AC}{2}$ nên ý c đúng, ý d sai.

Câu 4. Cho hai đường tròn $(O); (O')$ cắt nhau tại A, B (O, O' nằm khác phía đối với AB). Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O') .

- a) $OO' = \frac{CD}{2}$.
 b) C, B, D thẳng hàng.
 c) $OO' \perp AB$.
 d) $BC = BD$.

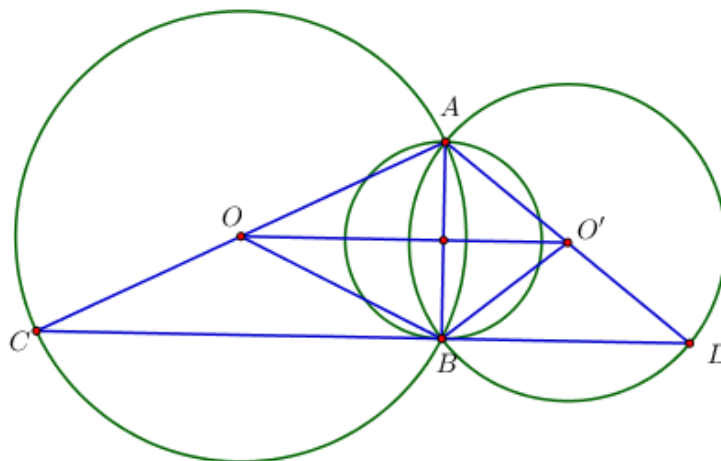
Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) S



Hai đường tròn (O) ; (O') cắt nhau tại A và B nên dễ dàng chỉ ra được OO' là đường trung trực của $AB \Rightarrow OO' \perp AB$ (tính chất đường nối tâm) nên khẳng định c đúng.

Xét đường tròn (O) có AC là đường kính, suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B hay $\angle CBA = 90^\circ$.

Xét đường tròn (O') có AD là đường kính, suy ra $\triangle ABD$ vuông tại B hay $\angle DBA = 90^\circ$.

Suy ra $\angle CBA + \angle DBA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ hay ba điểm B, C, D thẳng hàng nên khẳng định b đúng.

Xét tam giác ADC có O là trung điểm đoạn AC và O' là trung điểm đoạn AD nên OO' là đường

trung bình của tam giác $ACD \Rightarrow OO' = \frac{CD}{2}$ (tính chất đường trung bình) nên khẳng định a đúng.

Ta chưa thể kết luận gì về độ dài BC và BD nên khẳng định d sai.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Hai đường tròn (O) và (I) cắt nhau thì chúng có bao nhiêu điểm chung?

Lời giải

Đáp án: 2 điểm chung.

Hai đường tròn cắt nhau có 2 điểm chung.

Câu 2. [NB] Cho $OI = 6cm$, vẽ đường tròn $(O; 5cm)$ và $(I; 3cm)$. Hỏi vị trí tương đối của hai đường tròn là gì?

Lời giải

Đáp án: Hai đường tròn cắt nhau

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Ta thấy $5 - 3 < OI < 5 + 3$ nên hai đường tròn cắt nhau.

Câu 3. [TH] Cho $(O; 4cm)$ và $(A; 7cm)$. Độ dài đoạn OA cần thỏa mãn điều kiện gì để hai đường tròn đó cắt nhau?

Lời giải

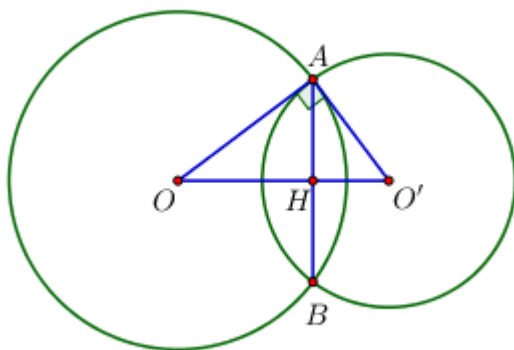
Đáp án: $3cm < OA < 11cm$

Để hai đường tròn đó cắt nhau thì $7 - 4 < OA < 7 + 4$ hay $3cm < OA < 11cm$.

Câu 4. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 4cm)$ và $(O'; 3cm)$ có $OO' = 5cm$. Đường thẳng OO' cắt (O) và (O') cắt lần lượt tại A, B . Độ dài AB là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $AB = 4,8cm$



Ta có $OO'^2 = 5^2 = 25$

$$OA^2 + O'A^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\Rightarrow OA^2 + O'A^2 = OO'^2$$

Áp dụng định lý Pytago đảo cho $\triangle OAO'$ có $OA^2 + O'A^2 = OO'^2$ suy ra $\triangle OAO'$ vuông tại A .

Gọi H là giao điểm của AB và OO' .

Ta dễ dàng chỉ ra được OO' là đường trung trực của AB .

Ta có $OO' \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm của AB .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $\triangle OAO'$ có

$$AH \cdot OO' = OA \cdot AO' \Rightarrow AH \cdot 5 = 4 \cdot 3$$

$$\Rightarrow AH = 2,4cm$$

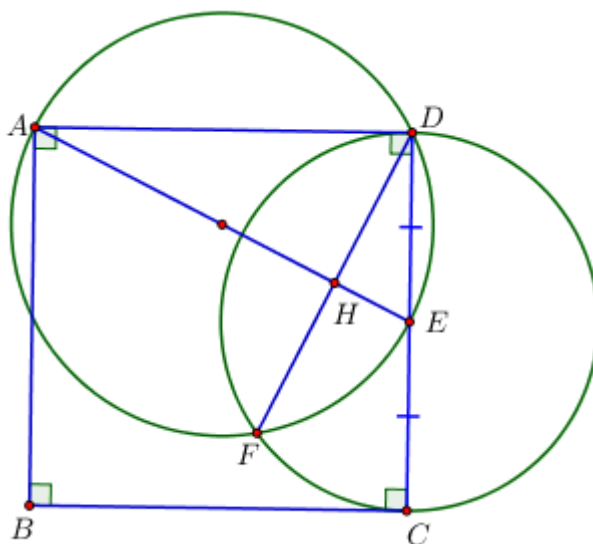
$$\Rightarrow AB = 2AH = 2 \cdot 2,4 = 4,8(cm)$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 5. [VD] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm của CD . Vẽ đường tròn đường kính AE và đường tròn đường kính CD . Độ dài dây cung chung DF của hai đường tròn đó.

Lời giải

Đáp án: $DF = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$



Dễ dàng chỉ ra được AE là đường trung trực của DF

Gọi DF cắt AE tại $H \Rightarrow AE \perp DF$.

Ta có $\triangle DAE$ vuông tại D nên $AE^2 = DE^2 + AD^2$

Mà $DE = \frac{a}{2}$; $AD = a \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Ta lại có $DH \cdot AE = DE \cdot AD$

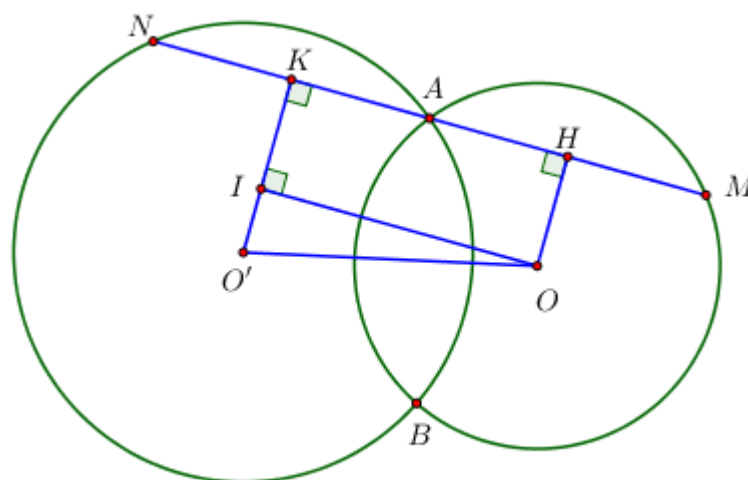
Mà $DE = \frac{a}{2}$; $AE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AD = a \Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow DF = 2DH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 6. [VD] Cho hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(O'; 4cm)$ cắt nhau tại A và B . Qua A kẻ đường thẳng d cắt $(O; 3cm)$ tại M ($M \neq A$), cắt $(O'; 4cm)$ tại N ($N \neq A$). Nếu $OO' = 5cm$ thì giá trị lớn nhất của MN là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: Giá trị lớn nhất của MN là $10cm$ khi đường thẳng d song song với OO' .



Kẻ $OH \perp AM$ tại H , $OK \perp AN$ tại K , $OI \perp O'K$ tại I .
 $\Rightarrow HM = HA$, $AK = KN$ và tứ giác $HOIK$ là hình chữ nhật
 $\Rightarrow MN = 2HK$ và $HK = OI$.

Ta có $OI \leq OO'$ (đường vuông góc, đường xiên)
 $\Rightarrow MN = 2HK = 2OI \leq 2OO' = 10cm$

Dấu “=” xảy ra khi $OI = OO'$ khi và chỉ khi $I \equiv O'$ hay $d \parallel OO'$.

Vậy giá trị lớn nhất của MN là $10cm$ khi đường thẳng d song song với OO' .

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

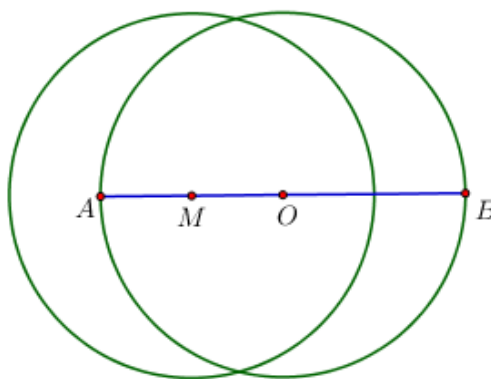
Phương pháp giải:

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]:

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là trung điểm của OA . Vẽ đường tròn $(M; R)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn đó.

Lời giải



Ta có $OM = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$
 $\Rightarrow 0 < OM < R + R$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

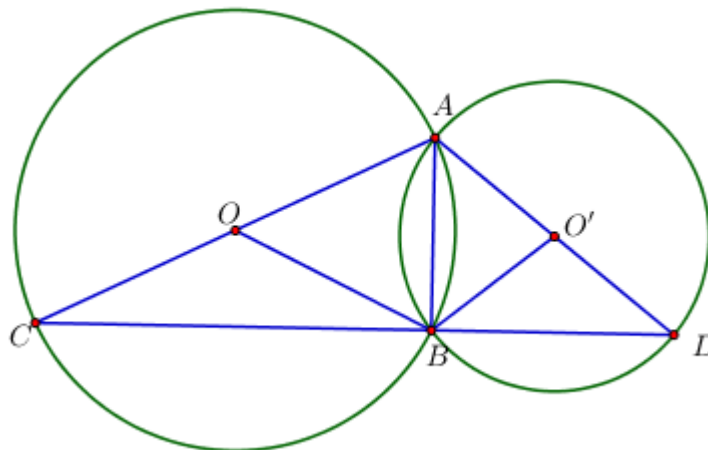
Vậy hai đường tròn $(O; R)$ và $(M; R)$ cắt nhau.

Ví dụ 2 [TH]:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC , $AO'D$. Chứng minh rằng:

- Ba điểm C, B, D thẳng hàng.
- $AB \perp CD$.

Lời giải



- Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có AC là đường kính nên $\angle ABC = 90^\circ$

$$\Rightarrow AB \perp BC$$

Tam giác ABD nội tiếp trong đường tròn (O') có AD là đường kính nên $\angle ABD = 90^\circ$.

$$\text{Ta có: } \angle CBD = \angle ABC + \angle ABD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

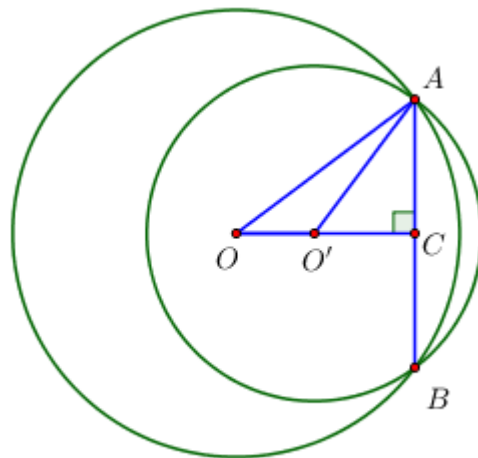
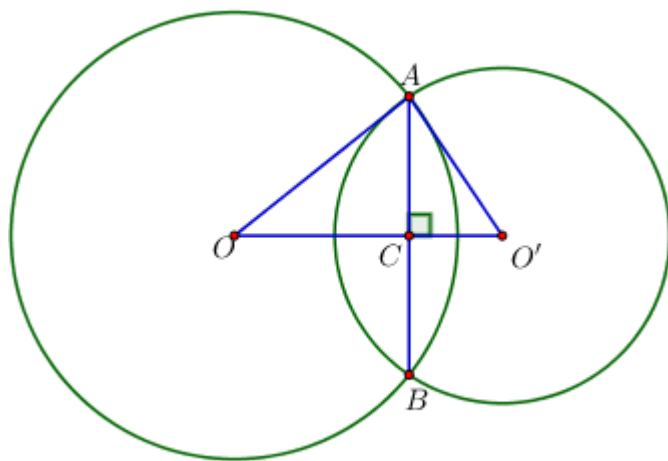
Vậy ba điểm C, B, D thẳng hàng.

- Có $AB \perp BC$ mà $B \in CD \Rightarrow AB \perp CD$

Ví dụ 3 [TH]:

Cho hai đường tròn $(O; 20)$ và $(O'; 15)$ cắt nhau tại A và B . Tính đoạn thẳng nối OO' biết rằng $AB = 24$.

Lời giải



Ta có 2 trường hợp xảy ra:

Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB và OO' .

TH1: O và O' nằm khác phía so với AB

Khi đó $OO' = OC + CO'$

Ta có $OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$

$$CO' = \sqrt{O'B^2 - BC^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$

Do đó $OO' = OC + CO' = 16 + 9 = 25$

TH2: O và O' nằm cùng phía so với AB

Khi đó $OO' = OC - CO'$

Ta có $OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$

$$CO' = \sqrt{O'B^2 - BC^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$

Do đó $OO' = OC - CO' = 16 - 9 = 7$

Ví dụ 4 [VD]:

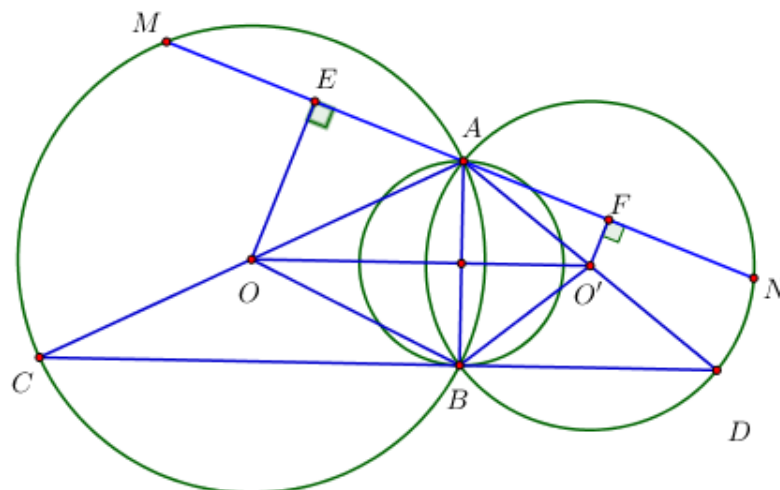
Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại hai điểm A và B . Vẽ đường kính AOC và đường kính $AO'D$. Qua A vẽ cát tuyến cắt (O) và (O') lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh CD tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

$$MN \leq CD$$

b) Chứng minh .

Lời giải



a) Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có AC là đường kính nên $\angle ABC = 90^\circ$

$\Rightarrow AB \perp BC$

Tam giác ABD nội tiếp trong đường tròn (O') có AD là đường kính nên $\angle ABD = 90^\circ$.

Ta có: $\angle CBD = \angle ABC + \angle ABD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Có $AB \perp BC$ mà $B \in CD \Rightarrow AB \perp CD$

Do đó CD tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

b) Xét tam giác ACD có OO' là đường trung bình nên $OO' = \frac{1}{2}CD$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của O và O' nên MN

Khi đó E, F lần lượt là trung điểm của AM và $AN \Rightarrow EF = \frac{1}{2}MN$

Ta đưa việc so sánh CD với MN qua so sánh OO' với EF

Xét 2 đường thẳng OE và $O'F$ song song với nhau.

Vì EF vuông góc với cả hai đoạn thẳng đó nên EF là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn nối từ một điểm trên OE tới một điểm trên $O'F$. Khi đó: $EF \leq OO' \Rightarrow MN \leq CD$

$(O; 5)$ và $(O'; 8)$ có vị trí tương đối với nhau như thế nào biết $OO' = 12$.

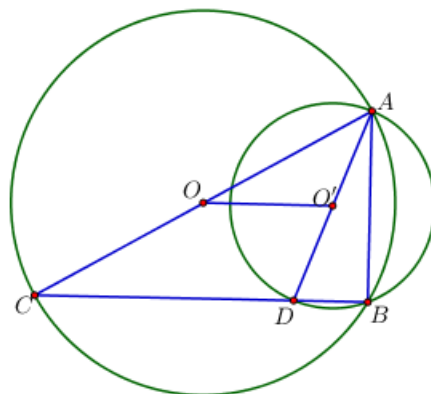
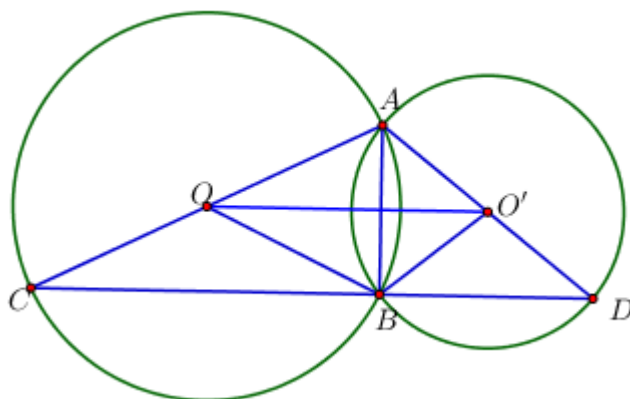
Hướng dẫn

Ta có: $8 - 5 < OO' < 8 + 5 \Rightarrow$ Hai đường tròn cắt nhau.

Bài 2. [TH] Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng vuông góc với

AB tại B cắt đường tròn (O) và (O') theo thứ tự C và D (khác B). Chứng minh rằng $OO' = \frac{1}{2}CD$.

Hướng dẫn



Xét đường tròn (O) có AC là đường kính, suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B hay $\angle CBA = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AB$

Xét đường tròn (O') có AD là đường kính, suy ra $\triangle ABD$ vuông tại B hay $\angle DBA = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AB$

Suy ra $BC \equiv BD$ hay ba điểm B, C, D thẳng hàng

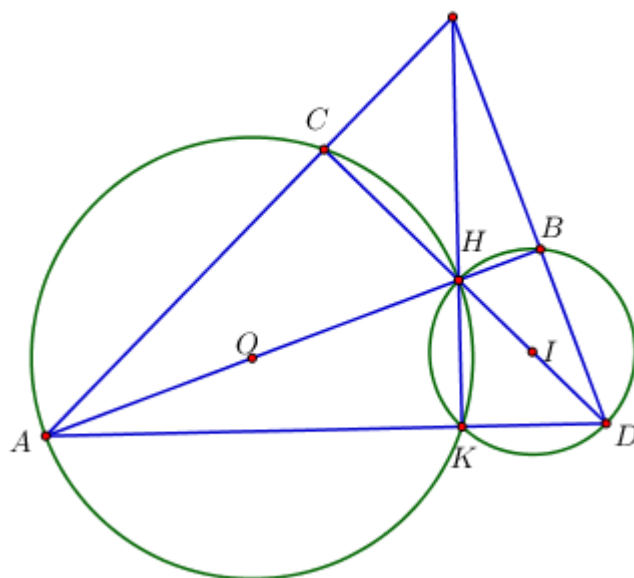
Xét tam giác ADC có O là trung điểm đoạn AC và O' là trung điểm đoạn AD nên OO' là đường

trung bình của tam giác $ADC \Rightarrow OO' = \frac{CD}{2}$ (tính chất đường trung bình).

Bài 3. [VD] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; R')$ cắt nhau tại K và H . Đường thẳng OH cắt (O) tại A cắt (I) tại B , đường thẳng IH cắt (O) tại C , cắt (I) tại D (A, D khác H).

Chứng minh ba đường thẳng AC, BD, HK đồng quy tại một điểm.

Hướng dẫn



Chứng minh tương tự bài 2 ta có A, K, D thẳng hàng.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Ta có $\triangle ACH$ nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AH là đường kính nên $\triangle ACH$ vuông tại C suy ra $DC \perp AC$ hay $DH \perp AC$ (1).

Lại $\triangle AKH$ nội tiếp đường tròn (O) có cạnh AH là đường kính nên $\triangle AKH$ vuông tại K suy ra $HK \perp AK$ hay $HK \perp AD$ (2).

Tương tự $AH \perp BD$ (3).

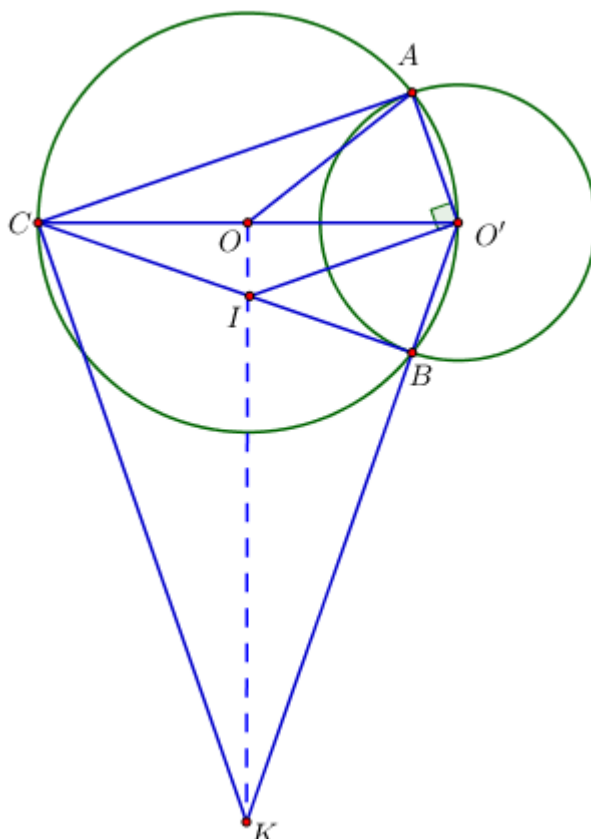
Từ (1), (2) và (3) suy ra AC, BD, HK đồng quy tại một điểm (Ba đường cao trong tam giác AHD).

Bài 4. [VD] Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B , trong đó O' nằm trên đường tròn (O) . Kẻ đường kính $O'C$ của đường tròn (O) .

a) Chứng minh rằng CA, CB là các tiếp tuyến của đường tròn (O') .

b) Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB ở I . Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng $O'B$ ở K . Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Xét đường tròn (O) có $O'C$ là đường kính, suy ra $\angle BO'O = \angle AO'O = 90^\circ$ hay $CB \perp O'B$ và $AC \perp AO'$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Do đó $AC; BC$ là hai tiếp tuyến của (O') .

b) Trong đường tròn (O') ta có AC và BC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại C

Suy ra: $\angle ACO' = \angle BCO'$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $O'I \perp O'A$ (gt) và $CA \perp O'A$ (chứng minh trên)

Suy ra: $O'I \parallel CA \Rightarrow \angle ACO' = \angle IO'I$ (hai góc so le trong)

Suy ra: $\angle BCO' = \angle IO'I$

Hay tam giác CIO' cân tại $I \Rightarrow IC = IO'$

Khi đó I nằm trên đường trung trực của $O'C$.

Lại có: $\angle AO'C = \angle BO'C$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$KC \perp CA$ (gt)

$O'A \perp AC$ (chứng minh trên)

Suy ra: $KC \parallel O'A \Rightarrow \angle AO'C = \angle CKO'$ (hai góc so le trong)

Suy ra: $\angle CKO' = \angle KO'C$

Hay tam giác CKO' cân tại $K \Rightarrow KC = KO'$

Khi đó K nằm trên đường trung trực của $O'C$

Mặt khác: $OC = OO' (=R)$

Suy ra O, I, K nằm trên đường trung trực của $O'C$

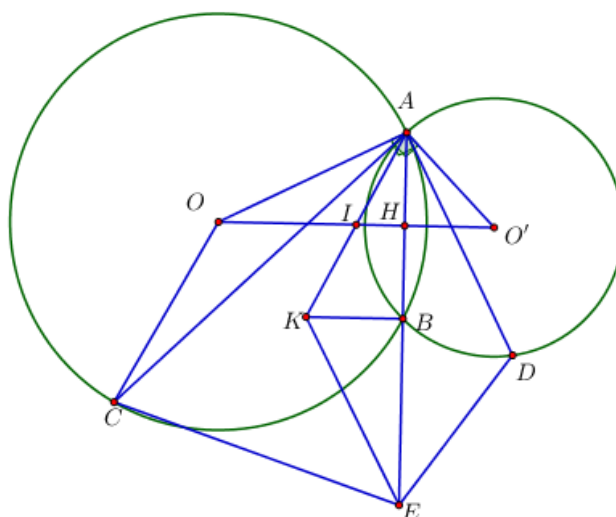
Vậy O, I, K thẳng hàng.

Bài 5. [VD] Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Dây AC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O') tại A . Dây AD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A . Gọi K là điểm đối xứng với A qua trung điểm I của OO' , E là điểm đối xứng với A qua. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp KB$.

b) Bốn điểm A, C, E, D cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn



a) Gọi H là giao điểm của AB và OO' .

Vì $OA = OB; O'A = O'B$ nên OO' là đường trung trực của AB nên $OO' \perp AB$ tại H .

Ta có: $HA = HB$

I là trung điểm của OO' nên $IH \perp AB$ (1)

Trong tam giác ABK , ta có:

$HA = HB$ (chứng minh trên)

$IA = IK$ (tính chất đối xứng tâm)

Suy ra IH là đường trung bình của tam giác ABK

Suy ra $IH \parallel BK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AB \perp KB$

b) Vì $AB \perp KB$ nên $AE \perp KB$

Lại có: $AB = BE$ (tính chất đối xứng tâm)

Suy ra: $KA = KE$ (tính chất đường trung trực) (3)

Ta có: $IO = IO'$ (gt)

$IA = IK$ (chứng minh trên)

Tứ giác $AOKO'$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình bình hành

Suy ra: $OK \parallel O'A$ và $O'K \parallel OA$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$CA \perp O'A$ (vì CA là tiếp tuyến của đường tròn (O'))

$OK \parallel O'A$ (chứng minh trên)

Suy ra: $OK \perp AC$

Khi đó OK là đường trung trực của AC

Suy ra: $KA = KC$ (tính chất đường trung trực) (4)

$DA \perp OA$ (vì DA là tiếp tuyến của đường tròn (O))

$O'K \parallel OA$ (chứng minh trên)

Suy ra: $O'K \perp DA$

Khi đó $O'K$ là đường trung trực của AD .

Suy ra: $KA = KD$ (tính chất đường trung trực) (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $KA = KC = KE = KD$

Vậy bốn điểm A, C, E, D cùng nằm trên một đường tròn.

DẠNG 3: CÁC BÀI TOÁN VỀ HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG GIAO NHAU

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Hai đường tròn không giao nhau thì số điểm chung là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Vì hai đường tròn không giao nhau thì không có điểm chung.

Câu 2. [NB] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ đựng nhau và $OO' = d$. Chọn khẳng định đúng.

- A.** $d = R - r$. **B.** $d < R - r$. **C.** $d = R + r$. **D.** $d > R + r$.

Lời giải

Chọn B

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Vì hai đường tròn đựng nhau $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ đựng nhau thì $OO' < R - r$ hay $d < R - r$.

Câu 3. [NB] Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$. Biết $R = 5cm$; $R' = 2cm$ và $OO' = 9cm$. Vị trí tương đối của hai đường tròn là:

- A.** Tiếp xúc. **B.** Ngoài nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Đựng nhau.

Lời giải

Chọn B

Vì $OO' = 9 > 5 + 2 = R + R'$ nên hai đường tròn ngoài nhau.

Câu 4. [NB] Hai đường tròn $(O; 3cm)$ và $(I; 7cm)$. Biết $OI = 2cm$, số điểm chung của hai đường tròn là:

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

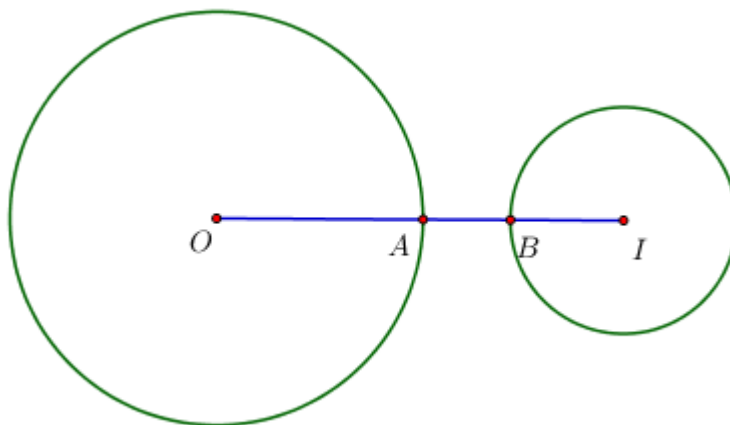
Vì $OI = 2 < 7 - 3 = R - r$ nên hai đường tròn đựng nhau. Do đó hai đường tròn không có điểm chung.

Câu 5. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 5cm)$ và $(I; 3cm)$ và $OI = 10cm$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn OI với $(O; 5cm)$ và $(I; 3cm)$. Độ dài đoạn AB là:

- A.** 3cm. **B.** 4cm. **C.** 5cm. **D.** 2cm.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AB = OI - OA - IB$

Mà $OI = 10cm$, $OA = 5cm$, $IB = 3cm$ nên $AB = 10 - 5 - 3 = 2(cm)$

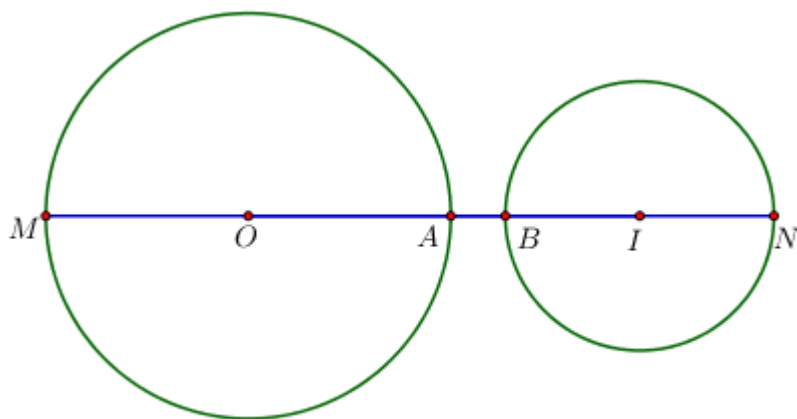
CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 6. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 5cm)$ và $(I; 3cm)$ và $OI = 10cm$. Gọi M, A là giao điểm của OI với $(O; 5cm)$ với. Gọi B, N là giao điểm của OI với $(I; 3cm)$ với A, B nằm giữa hai điểm O và I . Độ dài đoạn MN là:

- A.** $20cm$. **B.** $18cm$. **C.** $15cm$. **D.** $2cm$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $MN = MO + OI + IN$

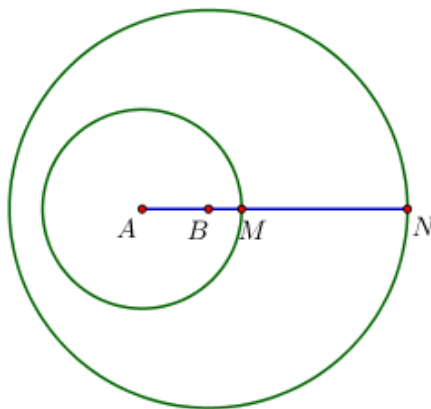
Mà $OI = 10cm$, $OM = 5cm$, $IN = 3cm$ nên $MN = 5 + 10 + 3 = 18(cm)$

Câu 7. [TH] Cho hai đường tròn $(A; 3cm)$ và $(B; 6cm)$ và $AB = 2cm$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của tia AB với $(A; 3cm)$ và $(B; 6cm)$. Độ dài đoạn MN là:

- A.** $3cm$. **B.** $4cm$. **C.** $5cm$. **D.** $2cm$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $MN = BN - BM = BN - (AM - AB) = BN - AM + AB$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Mà $BN = 6\text{cm}$, $AM = 3\text{cm}$, $AB = 2\text{cm}$ nên $MN = 6 - 3 + 2 = 5(\text{cm})$

Câu 8. [TH] Cho hai đường tròn $(A; r)$ và $(B; R)$ trong nhau với $R > r$ và $AB = 2\text{cm}$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB với $(A; R)$. Gọi C, D lần lượt là giao điểm của AB với $(B; r)$ sao cho C, M nằm cùng phía đối với A còn N, D nằm cùng phía đối với B . Hiệu $ND - CM$ là:

A. 1cm .

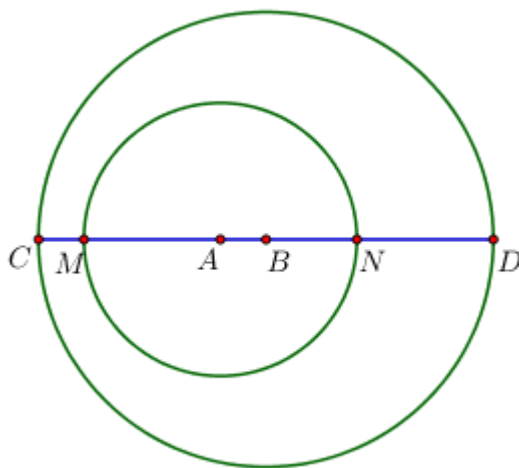
B. 2cm .

C. 4cm .

D. 6cm .

Lời giải

Chọn C



Ta có $CM = BC - AM - AB$

$$ND = BD - BN = BD - (AN - AB) = BD - AN + AB$$

Mà $BC = BD$, $AM = AN$ nên $ND - CM = 2AB = 2.2 = 4(\text{cm})$

Câu 9. [VD] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ở ngoài nhau. Gọi MN và EF là tiếp tuyến của cả hai đường tròn (M và E thuộc (O) , N và F thuộc (O')) với M và N nằm cùng phía đối với OO' ; E và F nằm cùng phía đối với OO' . Kết luận đúng là:

A. $MN < EF$.

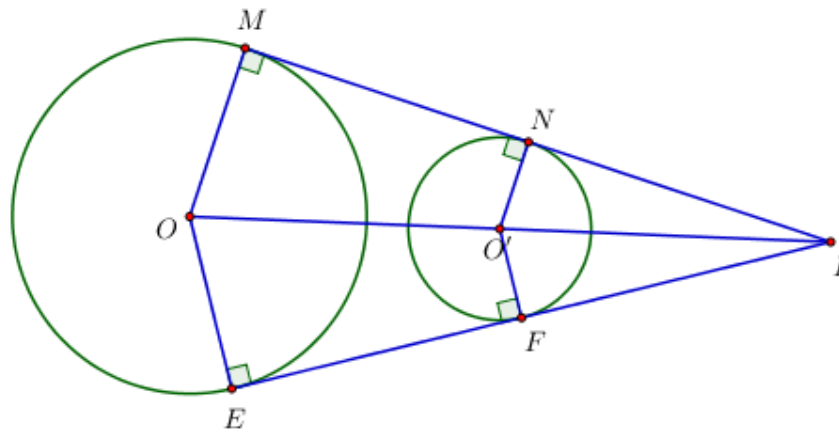
B. $MN = EF$.

C. $MN > EF$.

D. $OM = ON$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là giao điểm của MN và EF .

Ta có $MN = MI - NI$ và $EF = EI - FI$

Mà $MI = EI$; $NI = FI$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $MN = EF$.

Câu 10. [VD] Cho đường tròn $(O; 4)$ đường kính BC và đường tròn $(O; R)$ với $R < 4$. Kẻ tiếp tuyến CD của $(O; R)$ với $D \in (O; 4)$, cho $\angle BCD = 30^\circ$. Giá trị của R là:

A. 1.

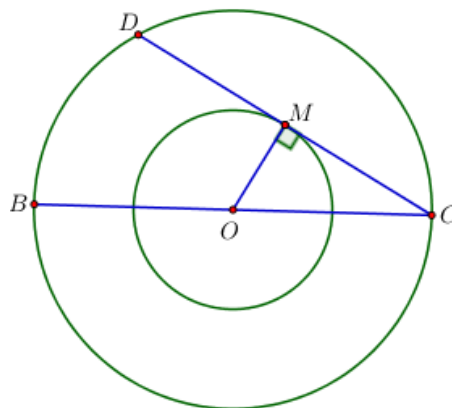
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B



Ta có $OC = 4$.

Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến CD với $(O; R)$.

Vì CD là tiếp tuyến của $(O; R)$ nên $OM \perp CD$

$\Rightarrow OM = OC \cdot \sin 30^\circ = 2 \Rightarrow R = 2$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 11. [VD] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ ở ngoài nhau. Gọi MN là tiếp tuyến của cả hai đường tròn (M thuộc (O) , N thuộc (O')) với M và N nằm cùng phía đối với OO' . Gọi I là giao điểm của MN và OO' . Tỉ số $\frac{IO}{IO'}$ tính theo R và r là

A. $\frac{R}{r}$.

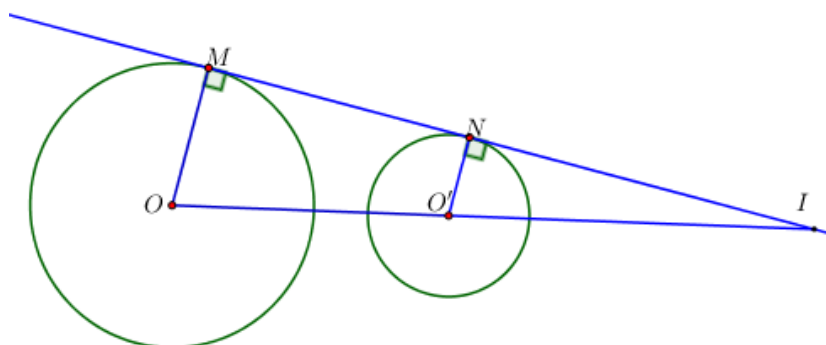
B. $\frac{R}{2r}$.

C. $\frac{2R}{r}$.

D. $\frac{R\sqrt{2}}{r}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\triangle IOM$ đồng dạng với $\triangle IO'N$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{IO}{IO'} = \frac{R}{r}.$$

Câu 12. [VDC] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ ở ngoài nhau với $R > r$. Gọi MN và EF là tiếp tuyến của cả hai đường tròn (M và E thuộc (O) , N và F thuộc (O')) với M và N nằm cùng phía đối với OO' ; E và F nằm khác phía đối với OO' ; M và E nằm cùng phía đối với OO' . Biết $OO' = 10\text{cm}$, $MN = 8\text{cm}$, $EF = 6\text{cm}$. Bán kính của đường tròn (O) là:

A. 1cm .

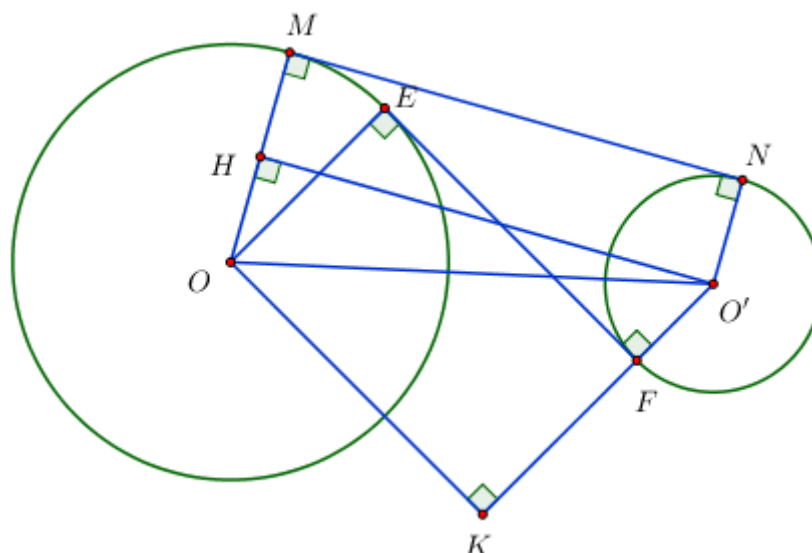
B. 2cm .

C. 7cm .

D. 6cm .

Lời giải

Chọn C



Kẻ $O'H \perp OM$ tại H ; $OK \perp O'F$ tại K .

Ta có: $OH = R - r$; $O'K = R + r$,

mà $OH^2 = O'O^2 - MN^2 = 36$

và $O'K^2 = O'O^2 - EF^2 = 64$

$\Rightarrow OH = 6$; $O'K = 8$

$\Rightarrow R = (6 + 8) : 2 = 7(cm)$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho hai đường tròn ngoài nhau.

- a) Hai đường tròn có điểm chung.
- b) Hai đường tròn có nhiều hơn một điểm chung.
- c) Hai đường tròn có đúng một điểm chung.
- d) Hai đường tròn không có điểm chung.

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Hai đường tròn ngoài nhau thì không có điểm chung nên a, b, c sai còn d đúng

Câu 2. Cho hai đường tròn đồng tâm O . Biết BC là đường kính của đường tròn lớn . Dây CD của đường tròn lớn đồng thời là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ sao cho $\angle BCD = 30^\circ$. Biết $BC = 4cm$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

a) Điểm M là trung điểm CD .

b) $CD = 4cm$.

c) $MO \parallel BD$.

d) $\angle BDC$ là góc nhọn.

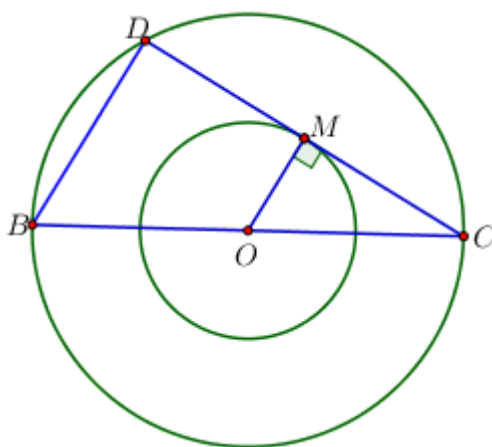
Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S



Ta có tam giác BDC nội tiếp đường tròn lớn có BC là đường kính nên $\angle BDC = 90^\circ$ nên ý d sai.

Ta có $OM \perp CD$ nên điểm M là trung điểm CD . Do đó ý a đúng.

Có $\angle BDC = 90^\circ$ nên $DC < BC$ hay $DC < 4cm$ nên ý b sai.

Có $MO \parallel BD$ (cùng vuông góc với CD) nên ý c đúng.

Câu 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ ở ngoài nhau. Gọi MN và EF là tiếp tuyến của cả hai đường tròn (M và E thuộc (O) , N và F thuộc (O')) với M và N nằm cùng phía đối với OO' ; E và F nằm cùng phía đối với OO' .

a) $OM = r$.

b) $MN = EF$.

c) $OM < O'N$.

d) Ba điểm O, O', I thẳng hàng.

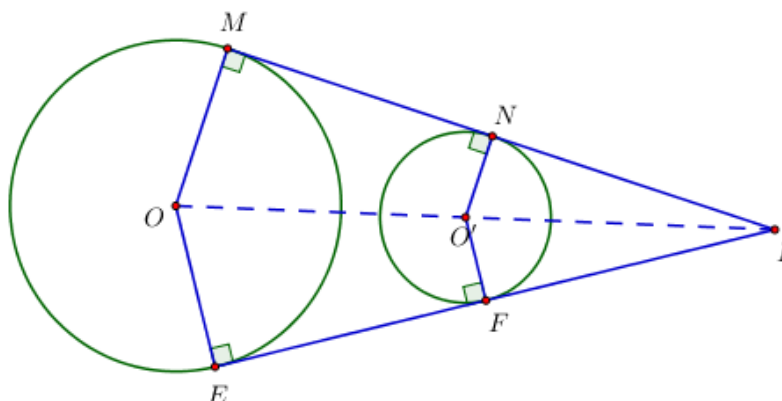
Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) Đ



Ta có $OM = R$ mà $R > r$ nên $OM > r$ nên ý a sai.

Ta có $O'N = r$ nên $OM > O'N$ nên ý c sai.

Gọi I là giao điểm của MN và EF .

Ta có $MN = MI - NI$ và $EF = EI - FI$

Mà $MI = EI$; $NI = FI$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $MN = EF$ nên ý b đúng

Ta có IO' là tia phân giác của $\angle NIF$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Và IO là tia phân giác của $\angle MIE$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $IO \equiv IO'$ hay O, O', I thẳng hàng nên ý d đúng.

Câu 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ ở ngoài nhau. Gọi MN tiếp xúc với cả hai đường tròn (M thuộc (O) , N thuộc (O')) với M và N nằm cùng phía đối với OO' . Gọi E là điểm đối xứng với M qua OO' . Gọi I là giao điểm của MN và OO' .

a) $\frac{IO}{IO'} = \frac{2R}{r}$.

b) $OM > r$.

c) Tứ giác $MNO'O$ là hình thang cân.

d) Đường thẳng EI tiếp xúc với $(O; R)$ và $(O'; r)$.

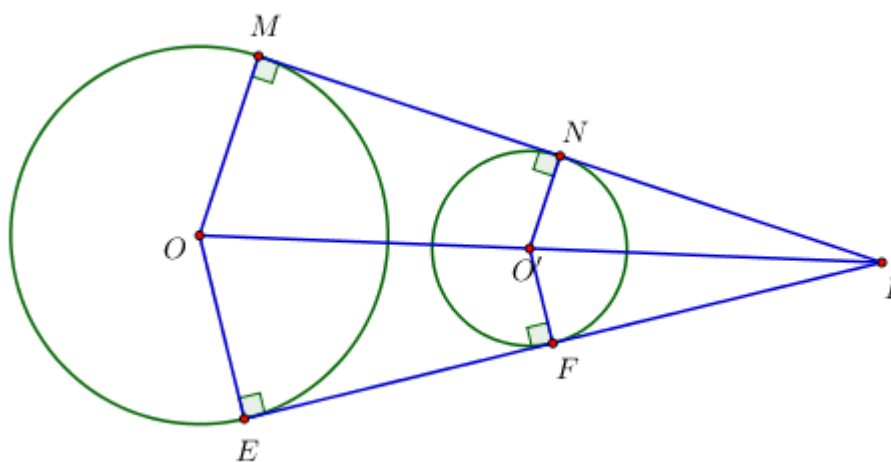
Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) Đ



Ta có $OM = R > r$ nên ý b đúng.

Ta có $MO \parallel O'N$ (cùng vuông góc với MN) nên $MNO'O$ là hình thang mà $\angle MN = 90^\circ$ nên $MNO'O$ là hình thang vuông nên ý c sai.

Ta có $\triangle IOM$ đồng dạng với $\triangle IO'N$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{IO}{IO'} = \frac{R}{r} \text{ nên ý a sai.}$$

Ta có E là điểm đối xứng với M qua OO' nên OO' là đường trung trực của $ME \Rightarrow OO' \perp ME$

Ta có OO' là đường trung trực của ME nên $OM = OE$ suy ra $\triangle MOE$ cân tại O mà $OI \perp EM$ nên OI là đường phân giác của $\angle MOE$.

Từ đó ta có $\triangle MOI = \triangle EOI$ (c – g – c)

$$\Rightarrow \angle OMI = \angle OEI \text{ mà } \angle OMI = 90^\circ \text{ nên } \angle OEI = 90^\circ$$

Do đó $OE \perp EI$ mà $E \in (O)$ suy ra EI tiếp xúc với (O) .

Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ O' xuống EI .

Ta có $O'F \perp EI$, $OE \perp EI \Rightarrow OE \parallel O'F$. Do đó $\triangle IO'F$ đồng dạng với $\triangle IOE$

$$\Rightarrow \frac{OE}{O'F} = \frac{IO}{IO'} \text{ mà } \frac{IO}{IO'} = \frac{R}{r}$$

$$\text{Suy ra } \frac{OE}{O'F} = \frac{R}{r} \text{ mà } OE = R \text{ nên } O'F = r \text{ hay } F \in (O'; r)$$

Từ đó $O'F \perp EI$ và $F \in (O'; r)$ nên EI tiếp xúc với (O') . Do đó ý d đúng.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Câu 1. [NB] Cho hai đường tròn $(A; 3cm)$ và $(B; 5cm)$ và $AB = 10cm$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn này.

Lời giải

Đáp án: Hai đường tròn ở ngoài nhau.

Vì $AB = 10 > 5 + 3$ nên hai đường tròn ở ngoài nhau.

Câu 2. [NB] Cho hai đường tròn $(A; 3cm)$ và $(B; 5cm)$ và $AB = 1cm$. Hai đường tròn này có bao nhiêu điểm chung?

Lời giải

Đáp án: Không có điểm chung nào.

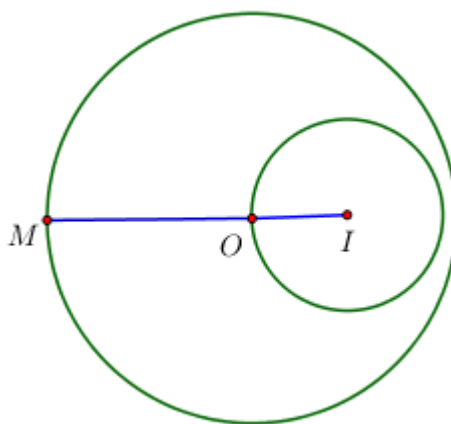
Vì $AB = 1 < 5 - 3$ nên hai đường tròn đựng nhau.

Do đó hai đường tròn này không có điểm chung.

Câu 3. [TH] Cho hai đường tròn $(O; 4cm)$ và $(I; 3cm)$ và $OI = 3cm$. Gọi M lần lượt là giao điểm của tia IO với $(O; 4cm)$. Độ dài đoạn IM là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $IM = 7cm$



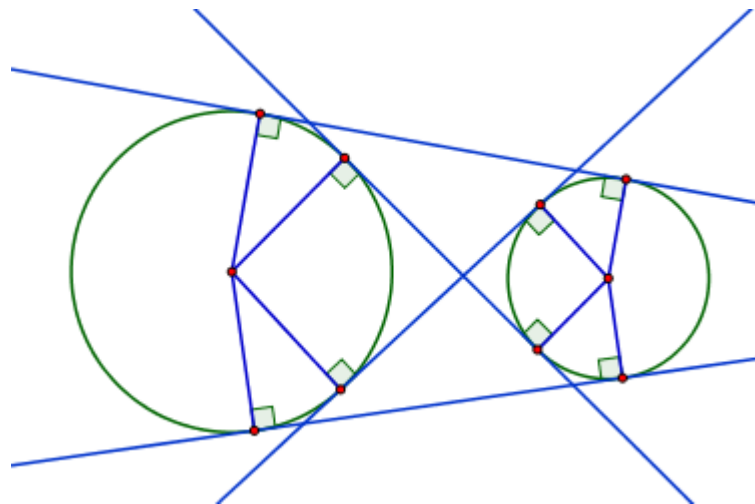
Ta có : $IM = OI + OM$

Mà $OM = 4cm$, $OI = 3cm \Rightarrow IM = 7cm$.

Câu 4. [TH] Cho hai đường tròn ở ngoài nhau. Hỏi có thể vẽ tất cả bao nhiêu đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn?

Lời giải

Đáp án: 4 đường thẳng thoả mãn.

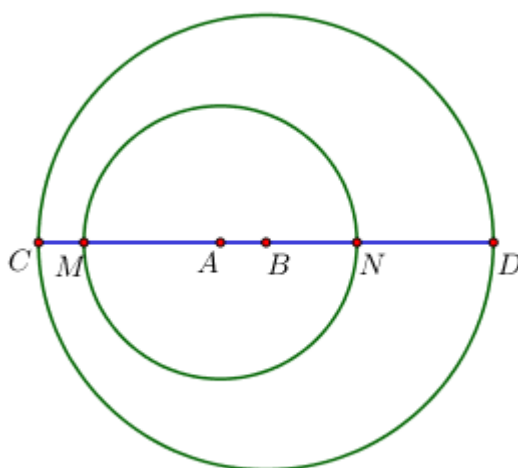


Có thể vẽ được tất cả 4 đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn.

Câu 5. [TH] Cho hai đường tròn $(A; 3cm)$ và $(B; 5cm)$ đựng nhau.. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB với $(A; 3cm)$. Gọi C, D lần lượt là giao điểm của AB với $(B; 5cm)$ sao cho C, M nằm cùng phía đối với A còn N, D nằm cùng phía đối với B . Tổng $ND + CM$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $ND + CM = 16cm$



Ta có $CM = BC - AM - AB$

$$ND = BD - BN = BD - (AN - AB) = BD - AN + AB$$

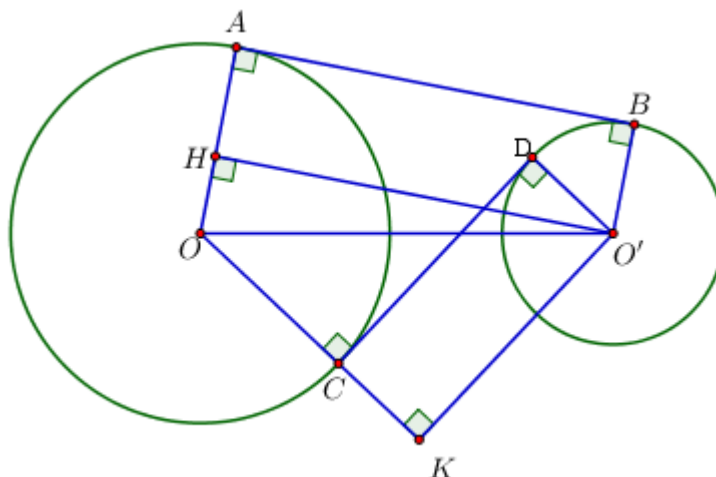
Mà $BC = BD$, $AM = AN$ nên $ND + CM = 2(5 + 3) = 16(cm)$

Câu 6. [VDC] Cho hai đường tròn $(O; 6cm)$ và $(O'; 2cm)$ nằm ngoài nhau. Gọi AB và CD là tiếp tuyến của cả hai đường tròn với A và B nằm cùng phía đối với OO' còn C và D nằm khác phía đối với OO' ($A, C \in (O); B, D \in (O')$). Biết $AB = 2CD$, tính độ dài đoạn nối tâm OO' .

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Đáp án: $OO' = \sqrt{80}cm$



Kẻ $O'H \perp OA$ tại H ; $O'K \perp OC$ tại K .

Tính được: $OH = 6 - 2 = 4(cm)$, $OK = 6 + 2 = 8(cm)$,

Đặt $CD = x \Rightarrow AB = 2x$; $O'O^2 = 64 + x^2$ và $O'O^2 = 16 + 4x^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow OO' = \sqrt{80}cm$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]:

Cho hai đường tròn $(A; 2cm)$ và $(B; 5cm)$ và $AB = 1,5cm$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn này.

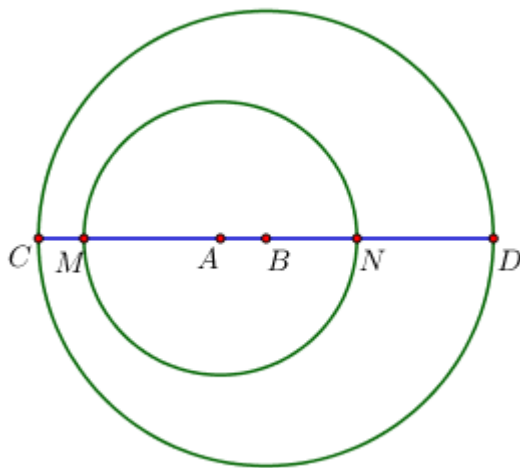
Lời giải

Vì $AB = 1,5 < 5 - 2$ nên hai đường tròn đựng nhau.

Ví dụ 2 [VD]:

Cho hai đường tròn $(A; 3cm)$ và $(B; 5cm)$ và $AB = 1cm$. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB với $(A; 3cm)$. Gọi C, D lần lượt là giao điểm của AB với $(B; 5cm)$ sao cho C, M nằm cùng phía đối với A còn N, D nằm cùng phía đối với B . Tính hiệu $ND - CM$.

Lời giải



Ta có $CM = BC - AM - AB$

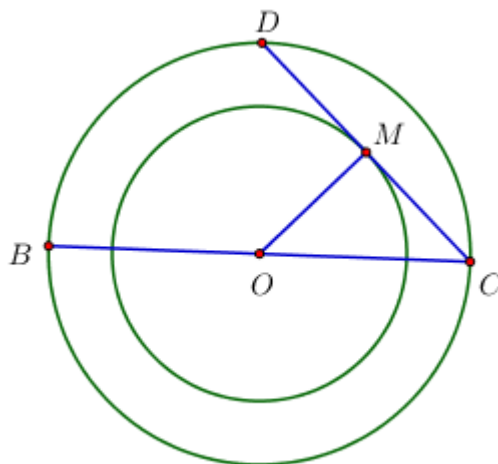
$$ND = BD - BN = BD - (AN - AB) = BD - AN + AB$$

Mà $BC = BD$, $AM = AN$ nên $ND - CM = 2AB = 2.1 = 2(cm)$

Ví dụ 3 [VD]:

Cho hai đường tròn đồng tâm O . Biết BC là đường kính của đường tròn lớn và có độ dài bằng $12cm$. Dây CD của đường tròn lớn đồng thời là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ và $\angle BCD = 45^\circ$. Hãy tính bán kính đường tròn nhỏ.

Lời giải



Gọi tiếp điểm của CD và đường tròn nhỏ là M .

Ta có $OM \perp CD$ tại M .

Ta có $OC = BC : 2 = 12 : 2 = 6(cm)$

Xét $\triangle OMC$ có: $\sin \angle C = \frac{OM}{OC}$

$$\Rightarrow OM = OC \cdot \sin \angle C = 6 \cdot \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}(cm)$$

Ví dụ 4 [VD]:

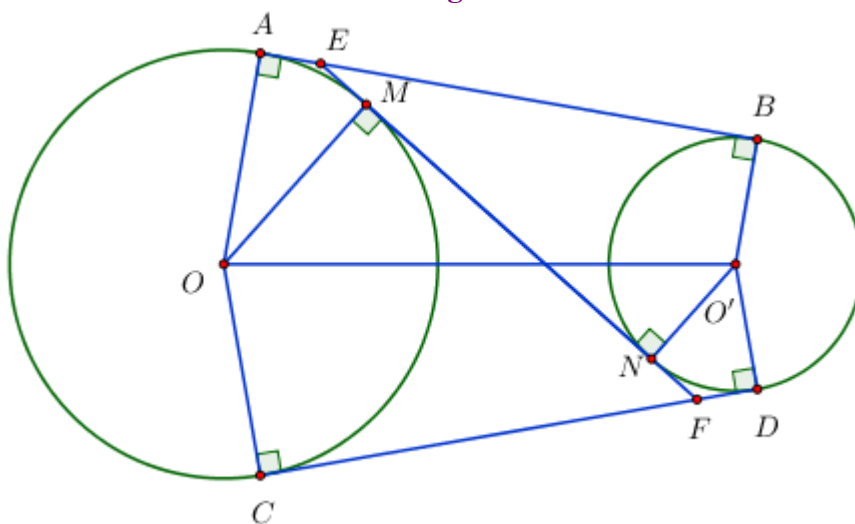
CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến AB và CD ($A, C \in (O); B, D \in (O')$ (với A và B nằm cùng phía đối với OO' ; C và D nằm cùng phía đối với OO') của cả hai đường tròn. Tiếp tuyến MN của cả hai đường tròn cắt AB, CD theo thứ tự tại E, F , ($M \in (O), N \in (O')$) với M và N nằm khác phía đối với OO' . Chứng minh:

a) $AB = EF$.

b) $EM = FN$.

Lời giải



a) Ta có: $AB = AE + BE = EM + EN$ và $CD = FD + FC = NF + NE$
 $\Rightarrow AB + CD = 2EF \Rightarrow AB = EF$.

b) Ta có: $EM = AB - EB = EF - EN = NF$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

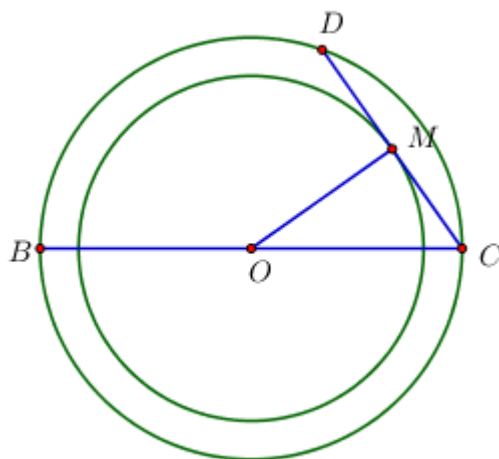
Bài 1. [NB] Cho hai đường tròn $(A; 2cm)$ và $(B; 4cm)$ và $AB = 8cm$. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn này.

Hướng dẫn

Vì $AB = 8 < 4 + 2$ nên hai đường tròn ngoài nhau.

Bài 2. [TH] Cho hai đường tròn đồng tâm O . Biết BC là đường kính của đường tròn lớn. Dây CD của đường tròn lớn đồng thời là tiếp tuyến của đường tròn nhỏ sao cho $\angle BCD = 60^\circ$. Biết $CD = 4cm$. Hãy tính bán kính đường tròn lớn.

Hướng dẫn



Gọi tiếp điểm của CD và đường tròn nhỏ là M .

Ta có $OM \perp CD$ tại M nên M là trung điểm CD

Ta có $MC = CD : 2 = 4 : 2 = 2$ (cm)

Xét $\triangle OMC$ có: $\cos \angle OCM = \frac{CM}{OC}$

$$\Rightarrow OC = CM : \cos \angle OCM = 2 : \cos 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

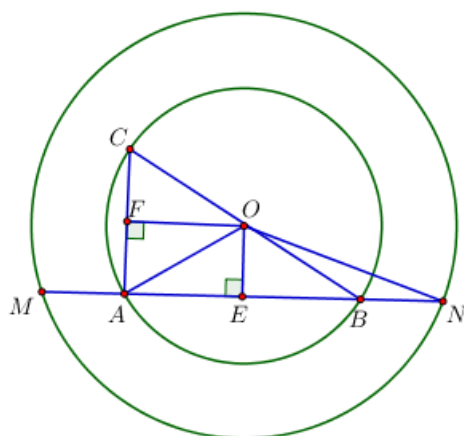
Bài 3. [VD] Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; 7\text{cm})$ và $(O; 5\text{cm})$. Tính diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đó.

Hướng dẫn

Diện tích hình vành khuyên tạo bởi hai đường tròn đó là $\pi \cdot 7^2 - \pi \cdot 5^2 = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 4. [VD] Cho hai đường tròn đồng tâm O , bán kính lần lượt là R và r , dây MN của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại A và B . Gọi BC là đường kính của đường tròn nhỏ. Tính theo R và r giá trị biểu thức $AC^2 + AM^2 + AN^2$.

Hướng dẫn



Kẻ $OE \perp AB$; $OF \perp AC$. Đặt $AC = a$, $AM = b$, $AN = c$

Ta có:
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2; R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2$$

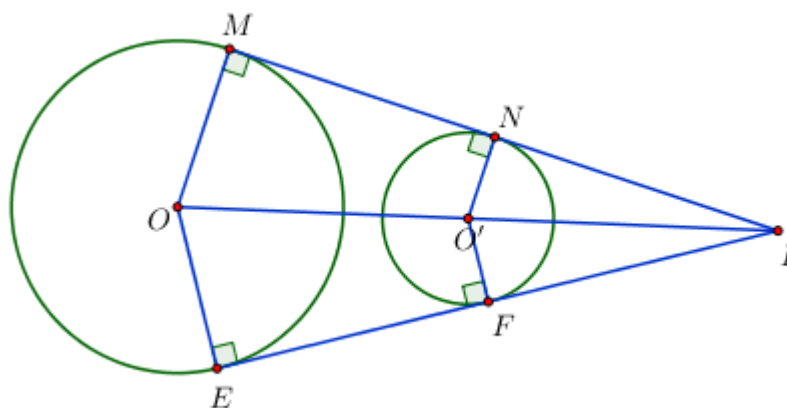
CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Chứng minh được: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(r^2 + R^2)$.

Bài 5. [VD] Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$ ở ngoài nhau. Gọi MN và EF là tiếp tuyến của cả hai đường tròn (M và E thuộc (O) , N và F thuộc (O')) với M và N nằm cùng phía đối với OO' ; E và F nằm cùng phía đối với OO' . Chứng minh rằng:

- $MN = EF$.
- Ba đường thẳng MN, OO', EF đồng quy.
- Tứ giác $MNFE$ là hình thang cân.

Hướng dẫn



- Gọi I là giao điểm của MN và EF .

Ta có $MN = MI - NI$ và $EF = EI - FI$

Mà $MI = EI$; $NI = FI$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $MN = EF$

- Ta có IO' là tia phân giác của $\angle NIF$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Và IO là tia phân giác của $\angle MIE$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $IO \equiv IO'$ hay O, O', I thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng MN, OO', EF đồng quy.

- Ta có $MI = EI$ và $OM = OE$ nên OI là đường trung trực của $ME \Rightarrow OI \perp ME$

Ta lại có $NI = FI$ và $O'N = O'F$ nên $O'I$ là đường trung trực của $NF \Rightarrow O'I \perp NF$

Mà O, O', I thẳng hàng nên $ME \parallel NF$.

Vì $MI = EI$ nên $\angle MNE = \angle FEM$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Từ đó ta có $MNFE$ là hình thang cân.

