

Người làm: Hà Văn Anh

Zalo: Hà Văn Anh

- số đt zalo: 0988242115

Email: quinhonngayve@gmail.com

CĐ 13: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau

A. Trắc nghiệm

Câu 1: (HSG 7 huyện Thanh Sơn, 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC , $\angle C = 50^\circ$ các đường cao AD , BE cắt nhau tại K . Số đo $\angle AKB$ là:
A. 130° B. 120° C. 110° D. 100°

Câu 2: (HSG 7 huyện Thanh Sơn, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2 \cdot AB$. Số đo góc C là:
A. 60° B. 45° C. 35° D. 30°

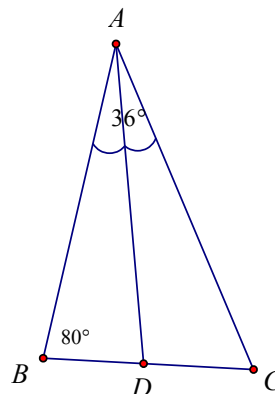
Câu 3: (HSG 7 huyện Thanh Sơn, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , các đường phân giác BK , CH cắt nhau tại I . Biết $\angle BIC = 121^\circ$. Khi đó góc A bằng:
A. 76° B. 32° C. 62° D. 59°

Câu 3. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle B = 80^\circ$, $\angle A = 36^\circ$. Tia phân giác $\angle BAC$ cắt BC tại D . Số đo $\angle ADC$ là
A. 90° B. 88° C. 82° D. 98°

Lời giải

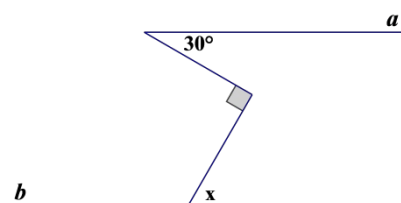


Vì AD là phân giác của $\angle BAC$ nên $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$.

Vì $\angle ADC$ là góc ngoài của $\triangle ABD$ nên $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = 80^\circ + 18^\circ = 98^\circ$.

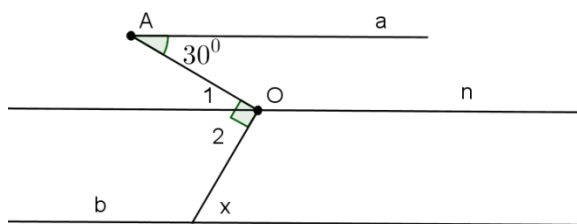
Câu 4: (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $a \parallel b$ như hình vẽ bên. Số đo góc x bằng:



A. 150° B. 90° C. 60° D. 30°

Lời giải



Kẻ $n // a // b$

Vì $n // a \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{A}$ (2 góc so le trong)

$$\Rightarrow \hat{O}_1 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O} - 30^\circ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Vì $n // b \Rightarrow x = \hat{O}_2$ (2 góc so le trong)

$$\Rightarrow x = \hat{O}_2 = 60^\circ$$

Câu 5: (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

$\triangle ABC$ có $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{B} - \hat{C} = 20^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Số đo $\hat{CBE}$ là.

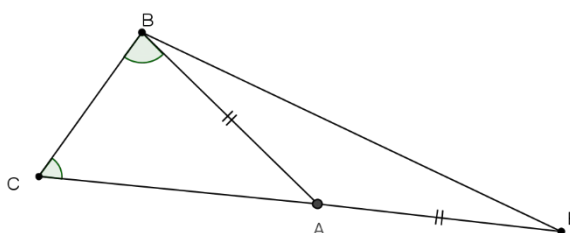
A. 80° .

B. 100° .

C. 90° .

D. 120° .

Lời giải



Ta có: $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ cân tại $A \Rightarrow \hat{E} = \hat{ABE}$

Mà $\hat{BAC} = \hat{ABE} + \hat{E} = 40^\circ$ (góc ngoài của $\triangle ABE$)

Ta có: $\hat{BAC} + \hat{ABC} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{ABC} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{BAC} = 140^\circ$

Có $\hat{ABC} - \hat{C} = 20^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{ABC} + 20^\circ$

$$\Rightarrow \hat{ABC} + (\hat{ABC} + 20^\circ) = 140^\circ \Rightarrow 2.\hat{ABC} = 140^\circ + 20^\circ = 160^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{ABC} = 80^\circ \Rightarrow \hat{CBE} = \hat{ABC} + \hat{ABE} = 100^\circ$$

Câu 6: (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên cạnh BC lấy điểm 2 điểm D và E sao cho $BD = BA$; $CE = CA$. Khi đó $\hat{DAE}$ có số đo là.

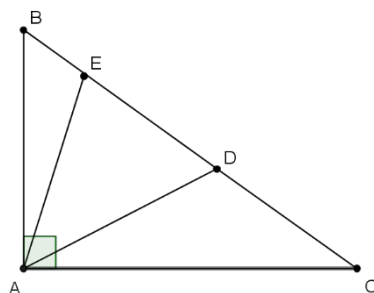
A. 20° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải



Xét $\triangle ACE$ cân tại $C \Rightarrow \angle CAE = \angle CEA$

$\triangle BAD$ cân tại $B \Rightarrow \angle BAD = \angle BDA$

$\Rightarrow \angle BAD + \angle CAE = \angle AED + \angle ADE$

$\Rightarrow 90^\circ + \angle BAE = 180^\circ - \angle BAE$

$\Rightarrow 2\angle BAE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BAE = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Vậy $\angle DAE = 45^\circ$

Câu 7: (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC . Hai tia phân giác của $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau tại I . Nếu $\angle BIC = 120^\circ$ thì số đo $\angle BAC$ bằng.

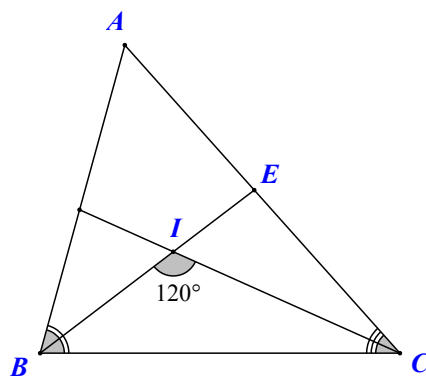
A. 120°

B. 100°

C. 90°

D. 60°

Lời giải

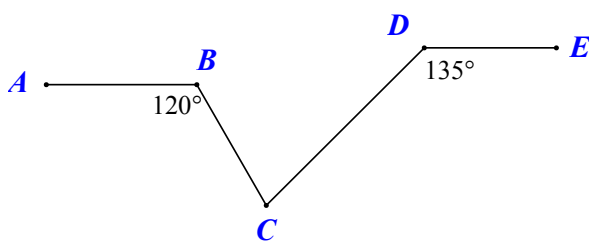


Trong tam giác BIC có $\angle IBC + \angle ICB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow 2\angle IBC + 2\angle ICB = 2 \cdot 60^\circ$

Mà $\angle ABC = 2\angle IBC$ và $\angle ACB = 2\angle ICB$

$\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ \Rightarrow \angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ$



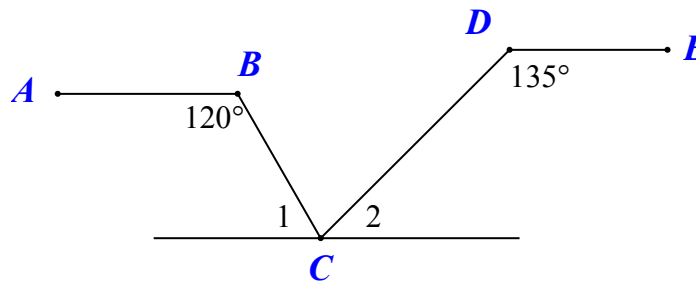
Câu 8: (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho hình vẽ $AB \parallel DE$. Số đo $\angle BCD$ bằng

A. 75°

- B. 85°
C. 45°
D. 65°

Lời giải



Kẻ đường thẳng qua C và song song với AB .

Mà $AB \parallel DE$ nên đường thẳng đó cũng song song với DE .

Do đó $\angle_1 + \angle ABC = 180^\circ$ và $\angle_2 + \angle CDE = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

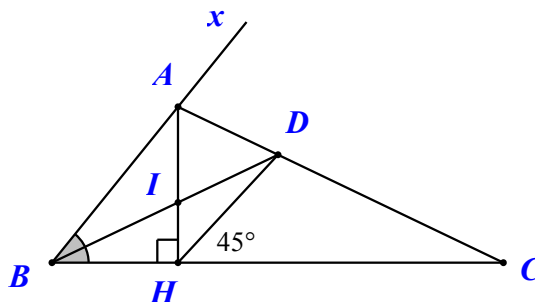
$\Rightarrow \angle_1 = 60^\circ, \angle_2 = 45^\circ \Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

Câu 9: (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có đường cao $AH (H \in BC)$ cắt đường phân giác BD tại I , biết $\angle HDB = 45^\circ$. Số đo $\angle ABD$ bằng

- A. 40° B. 60° C. 45° D. 50°

Lời giải



Tam giác BDH có $\angle HDB = \angle HBD + \angle HDB$ (tính chất góc ngoài tam giác)

Mà $\angle HDB = 45^\circ$ nên $\angle HBD + \angle HDB = 45^\circ$ suy ra $\angle HBD < 45^\circ$

Lại có $\angle ABD = \angle HBD$ suy ra $\angle ABD < 45^\circ$

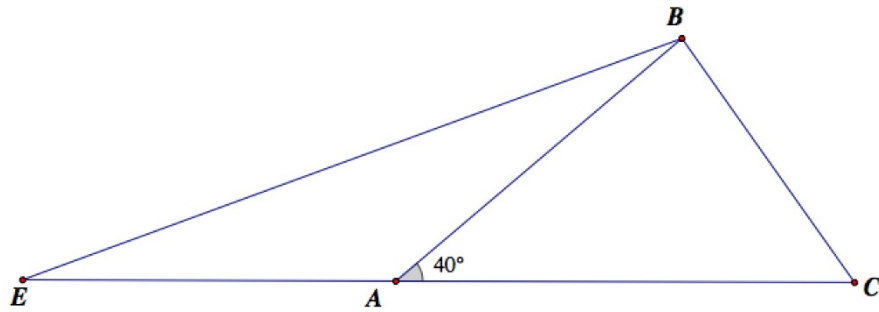
Vậy trong các đáp án chỉ có $\angle ABD = 40^\circ$ là thỏa mãn.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Đức Thọ, 2022 - 2023)

Tam giác ABC có $\angle A = 40^\circ; \angle B - \angle C = 30^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Tính số đo góc CBE .

Lời giải



Ta có: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (tổng ba góc của tam giác) $\Rightarrow \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Mà $\angle B - \angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle B = 85^\circ, \angle C = 55^\circ$

Có: $\angle BAE + \angle BAC = 180^\circ$ (2 góc kề bù) $\Rightarrow \angle BAE = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Xét $\triangle BAE$ có: $AE = AB \Rightarrow \triangle BAE$ cân tại $E \Rightarrow \angle ABE = \angle AEB = \frac{180^\circ - \angle BAE}{2} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$

Vậy $\angle EBC = \angle ABC + \angle ABE = 85^\circ + 20^\circ = 105^\circ$

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD , biết $\frac{AB}{OB} = \frac{16}{17}$ và $CD = 32 \text{ cm}$. Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là

- A. 184 cm . B. 92 cm . C. 196 cm . D. 204 cm .

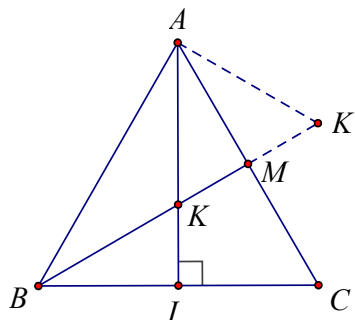
Lời giải

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ đều độ dài cạnh là 6 cm . Kẻ AI vuông góc với BC tại I , đường thẳng BM ($M \in AC$) cắt AI tại K , biết $MA = 3 \text{ cm}$ và $KI = \sqrt{3} \text{ cm}$. Độ dài cạnh AI là

- A. $3\sqrt{2} \text{ cm}$. B. 3 cm . C. $3\sqrt{3} \text{ cm}$. D. $6\sqrt{3} \text{ cm}$.

Lời giải



Vì $\triangle ABC$ đều độ dài cạnh là 6 cm mà $M \in AC$ và $MA = 3 \text{ cm}$ nên M là trung điểm AC .

Suy ra $BM \perp AC$. Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle AMK = \triangle BIK$ (g-c-g).

Do đó: $KM = KI = \sqrt{3} \text{ cm}$.

Xét $\triangle AMK$ vuông tại M có $\angle MAK = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

Suy ra $\triangle AMK$ chính là nửa tam giác đều (lấy K' trên tia đối của tia MK sao cho $MK' = MK$ ta được ngay $\triangle AKK'$ đều). Do đó: $AK = 2MK = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.
 Vậy $AI = AK + IK = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

Câu 3: (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A , trọng tâm $G, BC = 6\text{cm}$. Khi đó AG bằng

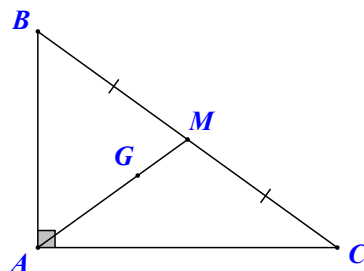
A. 1,5cm

B. 2cm

C. 1cm

D. 3cm

Lời giải



Do tam giác ABC vuông tại A nên $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.6 = 3(\text{cm})$
 Suy ra $AG = \frac{2}{3}.AM = \frac{2}{3}.3 = 2(\text{cm})$

Câu 4: (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại $A, AB = AC = x, BC = 2$ và $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy D sao cho $\angle ACD = 10^\circ$. Độ dài AD bằng

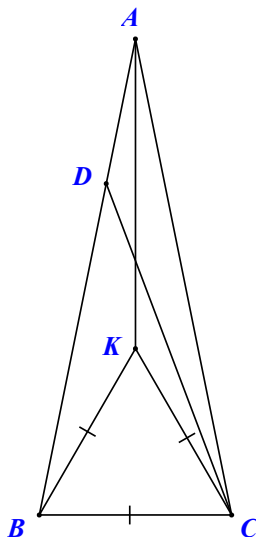
A. $\frac{x}{2}$

B. $\sqrt{x}$

C. 1

D. 2

Lời giải



Vẽ điểm K nằm cùng phía với A đối với BC sao cho tam giác KBC là tam giác đều.

Vì $\angle A = 20^\circ$ nên $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

Suy ra $\angle KCB < \angle ACB$ ($60^\circ < 80^\circ$) do đó K nằm trong tam giác ABC
 Kẻ AK .

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle AKC$ có: $AB = AC (=x), BK = CK$ (cạnh của tam giác đều), KA là cạnh chung.

$$\Rightarrow \triangle AKB = \triangle AKC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \angle KAB = \angle KAC = \frac{\angle BAC}{2} = 10^\circ$$

$$\text{Ta có } \angle KCA = \angle KCA - \angle KCB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle ADC \text{ và } \triangle CKA: AC \text{ là cạnh chung, } \angle DAC = \angle KCA (=20^\circ), \angle ACD = \angle KAC (=10^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle CKA \text{ (g.c.g)}$$

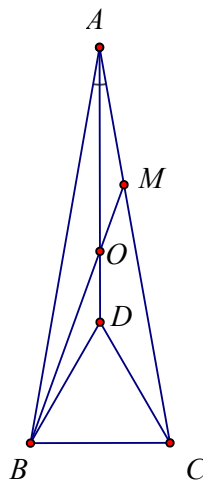
$$\text{Do đó } AD = CK \Rightarrow AD = BC = 2$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle BAC = 20^\circ$. Vẽ tam giác đều BCD sao cho điểm D nằm trong tam giác ABC . Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh $AM = BC$.

Lời giải



Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có:

$AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A), $BD = CD$ (do $\triangle BCD$ đều), AD chung.

Suy ra: $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c). Suy ra $\angle DAB = \angle DAC$ (hai góc tương ứng).

Do đó: $\angle DAB = 20^\circ : 2 = 10^\circ$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A , mà $\angle BAC = 20^\circ$ (giả thiết) nên $\angle ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$.

Vì $\triangle BCD$ là tam giác đều nên $\angle BDC = 60^\circ$.

Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $\angle ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

Tia BM là phân giác của $\angle ABD$ nên $\angle ABM = 10^\circ$.

Xét tam $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có:

AB cạnh chung, $\angle BAM = \angle BAD = 20^\circ$, $\angle ABM = \angle DAB = 10^\circ$.

Suy ra: $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g).

Suy ra $AM = BD$, mà $BD = BC$ (do $\triangle BCD$ đều) nên $AM = BC$.

Dạng 3. Bất đẳng thức trong tam giác

A. Trắc nghiệm

Câu 1: (HSG 7 huyện Thanh Sơn, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM , CN . Biết $AC > AB$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $BM \leq CN$ B. $BM > CN$ C. $BM < CN$ D.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $4\angle A = 6\angle B = 3\angle C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AC > AB > BC$ B. $AC > BC > AB$ C. $AB > BC > AC$ D. $AB > AC > BC$

Lời giải

Vì $3\angle C = 4\angle A = 6\angle B$ nên $\angle C > \angle A > \angle B$.

Do đó: $AB > BC > AC$ (mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong $\triangle ABC$).

Câu 3: (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Tam giác ABC cân có $AB = 8\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$ thì chu vi tam giác đó bằng:

- A. 21cm B. 18cm
C. 21cm hoặc 18cm D. 20cm hoặc 18cm

Lời giải

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $8 - 5 < BC < 8 + 5 \Rightarrow 3 < BC < 13$

Suy ra $BC = 5\text{cm}$ hoặc $BC = 8\text{cm}$

Do đó chu vi tam giác ABC bằng: $5 + 5 + 8 = 18(\text{cm})$ hoặc $5 + 8 + 8 = 21(\text{cm})$

Câu 4. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 10\text{ cm}$. Biết độ dài cạnh BC (đơn vị cm) là một số nguyên.

Hỏi độ dài cạnh BC có thể nhận được bao nhiêu giá trị?

- A. 10. B. 8. C. 11. D. 9.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\triangle ABC$ ta được:

$$AC - AB < BC < AC + AB$$

Suy ra: $10 - 5 < BC < 10 + 5$ hay $5 < BC < 15$.

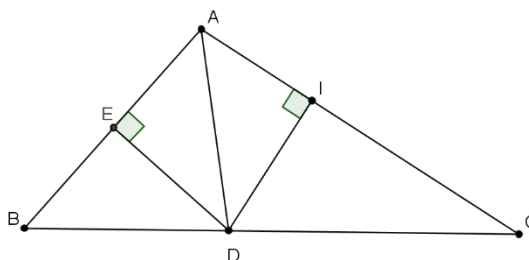
Mà Biết độ dài cạnh BC (đơn vị cm) là một số nguyên nên BC có thể nhận một trong 9 giá trị 6 cm, 7 cm, 8 cm, ..., 14cm.

Câu 5: (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $(AB < AC)$. Vẽ AD là tia phân giác của góc A ($D \in BC$). Gọi E và I lần lượt là các hình chiếu của D trên cạnh AB ; AC . Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. $\triangle AED = \triangle AID$. B. $\triangle BED = \triangle CID$. C. $\triangle ADB = \triangle ADC$. D. $\triangle AED = \triangle BED$.

Lời giải



vì E và I lượt là các hình chiếu của D trên cạnh AB ; AC .

$$\angle AED = 90^\circ; \angle AID = 90^\circ$$

Xét 2 tam giác $\triangle EAD$ và $\triangle AID$ có

AD : cạnh huyền chung

$$\widehat{EAD} = \widehat{IAD} \text{ (AD là phân giác của } \widehat{BAC} \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \triangle AED = \triangle AID$$

Câu 6: (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} = 70^\circ$; $\widehat{ACB} = 50^\circ$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ B . Khẳng định nào sau đây là đúng.

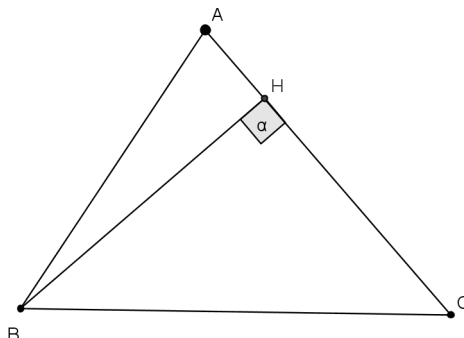
A. $HB < HC$.

B. $HB > HC$.

C. $HB = HC$.

D. $\widehat{BAC} = 70^\circ$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } \widehat{HCB} = \widehat{ACB} = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HBC} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\text{Vì } \widehat{HBC} < \widehat{HCB} \Rightarrow HC < HB$$

B. Tự luận

Dạng 4. Hình khối trong thực tiễn

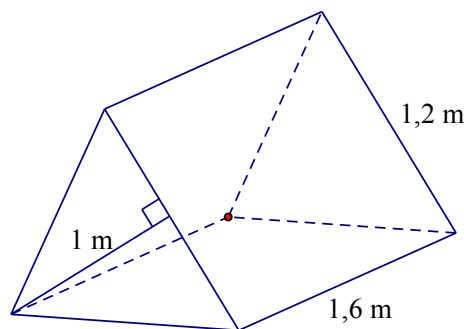
A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Để xúc cát lên các xe tải, người ta dùng một máy xúc với gầu xúc (Hình 1) có dạng gần như một lăng trụ đứng tam giác kích thước như Hình 2. Nếu coi dung tích của gầu xúc đúng bằng thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác thì muốn xúc 60 m^3 cát xe phải múc ít nhất bao nhiêu gầu?



Hình 1



Hình 2

A. 62.

B. 63.

C. 64.

D. 60.

Lời giải

$$\text{Dung tích gầu xúc là: } \frac{1 \cdot 1,2}{2} \cdot 1,6 = 0,96 (\text{m}^3)$$

$$\text{Vì } 60 : 0,96 = 62,5 \text{ nên xe phải múc ít nhất } 63 \text{ gầu.}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

A.

B.

C.

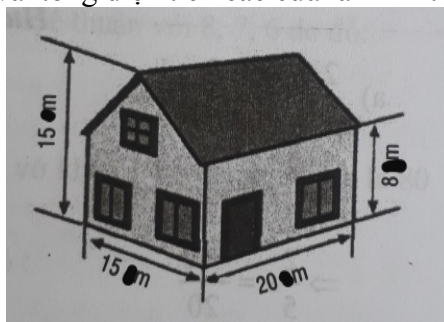
D.

Lời giải

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường THCS Nguyệt Ân 2022 - 2023)

Một ngôi nhà có kích thước như hình vẽ (Hình 1). Tính thể tích của ngôi nhà.
 Khi đó phải cần bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được tường mặt ngoài ngôi nhà (không sơn cửa)?
 Biết 1lít sơn bao phủ được 4m^2 và tổng diện tích các cửa là 9m^2 .



Hình 1

Lời giải

Thể tích ngôi nhà là:

$$V = 15 \cdot 20 \cdot 8 + \frac{15 \cdot (15 - 8)}{2} \cdot 20 = 3450 (\text{m}^3)$$

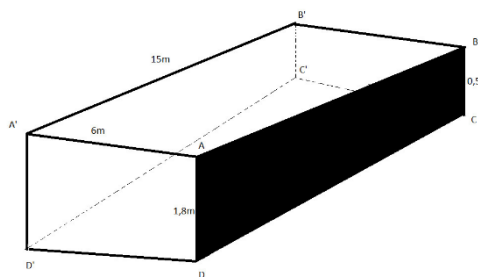
- Diện tích tường mặt ngoài ngôi nhà là:

$$S_1 = (15 + 20) \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot (15 - 8) \cdot \frac{15}{2} = 665 (\text{m}^2)$$

- Diện tích tường cần sơn là : $S_2 = 665 - 9 = 656 (\text{m}^2)$

Số lít sơn cần là: $656 : 4 = 164$ (lít).

Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

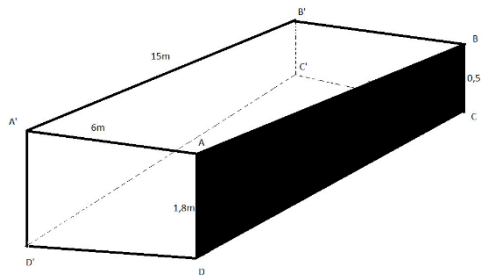


Hồ bơi của một trường THCS có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD A'B'C'D'$ với hai đáy là $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hình thang vuông, $A'B'$ (chiều dài hồ) là đường cao của hình thang $ABCD$. Hãy tính:

a) Diện tích đáy $ABCD$ của lăng trụ?

b) Thể tích của nước chứa trong hồ?

Lời giải



(m²)

a) Diện tích đáy hình lăng trụ là: $\frac{(1,8+0,5).15}{2} = 17,25$

b) Thể tích của nước chứa trong hồ: $17,25.6 = 103,5$ (m³)

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

Một gia đình xây bể chứa nước hình hộp chữ nhật, phần trong lòng bể có đáy là hình vuông cạnh 1,5m, chiều cao bể là 1m. Sau đó họ dùng các viên gạch men kích thước 20x30cm, dày 1cm để ốp xung quanh thành bể và đáy bể. Hỏi gia đình đó cần ít nhất bao nhiêu viên gạch ốp?

Lời giải

Diện tích đáy của bể là: $1,5.1,5 = 2,25$ (m²)

Diện tích xung quanh của bể là: $S_{xq} = Ch = 1,5.4.1 = 6$ (m²)

Diện tích xung quanh và đáy bể là: $2,25 + 6 = 8,25$ (m²)

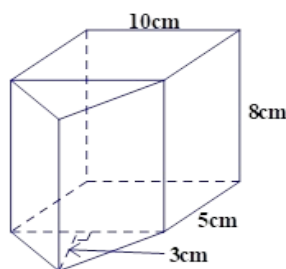
Diện tích một viên gạch là: $20.30 = 600$ (cm²) = 0,06 (m²)

Ta có: $8,25 : 0,06 = 137,5$

Như vậy cần ít nhất 138 viên gạch ốp.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tính thể tích vật thể có cấu trúc và kích thước được mô tả như hình vẽ sau:



Lời giải

Thể tích của hình hộp chữ nhật là: $5.10.8 = 400$ (cm³)

Thể tích hình lăng trụ đứng tam giác là: $\frac{1}{2} 3.10.8 = 120$ (cm³)

Thể tích của vật thể đó là: $V = 400 + 120 = 520$ (cm³)

Câu 5. (HSG 7 huyện Đức Thọ, 2022 - 2023)

Diện tích ba mặt của một hình hộp chữ nhật là 30 cm², 40 cm² và 75 cm². Hỏi thể tích của hình hộp đó bằng bao nhiêu cm³?

Lời giải

Gọi kích thước ba cạnh của hình hộp chữ nhật lần là a, b, c ($a, b, c > 0$, cm)

Vì các mặt là các hình chữ nhật, nên diện tích ba mặt lần lượt là:

$$\begin{cases} ab = 30 \\ bc = 40 \Rightarrow (abc)^2 = 30.40.75 \Rightarrow abc = 300 \\ ac = 75 \end{cases}$$

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là: $V = abc = 300 \text{ cm}^3$

Dạng 5. Bài toán chứng minh tổng hợp

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

A.

B.

C.

D.

Lời giải

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023)

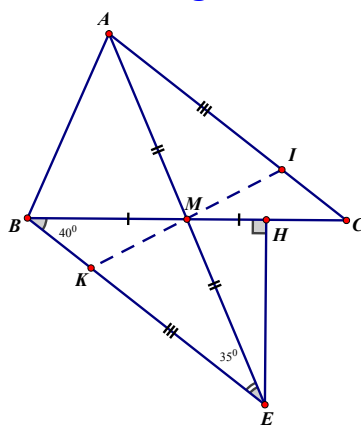
Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$

a) Chứng minh $\triangle AMC = \triangle EMB$

b) Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

c) Từ E kẻ EH vuông góc với BC (H thuộc BC). Biết $\angle HBE = 40^\circ$; $\angle MEB = 35^\circ$. Tính $\angle MEH$ và $\angle EMB$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$MB = MC (gt)$$

$$ME = MA (gt)$$

$$\angle EMB = \angle AMC \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

Do đó $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c)

b) Do $\triangle AMC = \triangle EMB$

suy ra: $AC = EB$ hay $AI + IC = EK + KB$,

do $AI = EK$ nên $IC = KB$

$$\angle ACM = \angle EBM \text{ hay } \angle ICM = \angle KBM$$

Xét $\triangle ICM$ và $\triangle KBM$ có: $MB = MC$ (gt)

$IC = KC$; $\angle ICM = \angle KBM$ (theo chứng minh trên)

Do đó $\triangle ICM = \triangle KBM$ (g.c.g)

suy ra $\angle CMI = \angle BKM$ do đó: $\angle BKM + \angle KMB = \angle CMI + \angle KMB = 180^\circ$.

Vậy I, K, M thẳng hàng.

c) Ta có: $\angle EMH = \angle MBE + \angle MEB = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

suy ra:

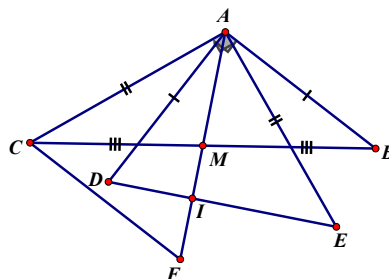
$$\angle EMB = 180^\circ - \angle EMH = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$\angle MEH = 90^\circ - \angle EMH = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có góc A tù. Kẻ AD vuông góc với AB và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ AE vuông góc với AC và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh DE vuông góc với AM

Lời giải



Gọi I là giao điểm của DE và AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MA = MF$.

Xét hai tam giác MAB và MFC có: $MB = MC$ (gt);

$MA = MF$ (theo cách vẽ); $\angle AMB = \angle FMC$ (hai góc đối đỉnh) do đó $\triangle MAB = \triangle MFC$ (c.g.c)

suy ra: $CF = AB = AD$; $\angle MBA = \angle MCF$ $AB \parallel CF$ (hai góc so le trong bằng nhau)

$$\Rightarrow \angle FCA + \angle CAB = 180^\circ \quad (1)$$

Mặt khác theo giả thiết thì

$$\angle CAE + \angle DAB = \angle CAF + \angle FAE + \angle BAF + \angle PAD$$

$$= \angle FAE + \angle PAD + \angle CAB = 180^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle FCA = \angle FAE + \angle PAD = \angle DAE$

Xét hai tam giác $\triangle ACF$ và $\triangle EAD$ có: $CF = AD$; $\angle FCA = \angle DAE$ (theo chứng minh trên);

$CA = AE$ (gt) do đó: $\triangle ACF = \triangle EAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AED = \angle AEI = \angle CAF$

mà $\angle CAF + \angle FAE = \angle CAF + \angle FAE = 90^\circ$ nên

$\angle AEI + \angle FAE = 90^\circ$ do đó trong tam giác AIE

$$\angle AIE = 180^\circ - (\angle AEI + \angle FAE) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

ta có:

Vậy DE vuông góc với AM

Câu 3. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường THCS Nguyễn Ân 2022 - 2023)

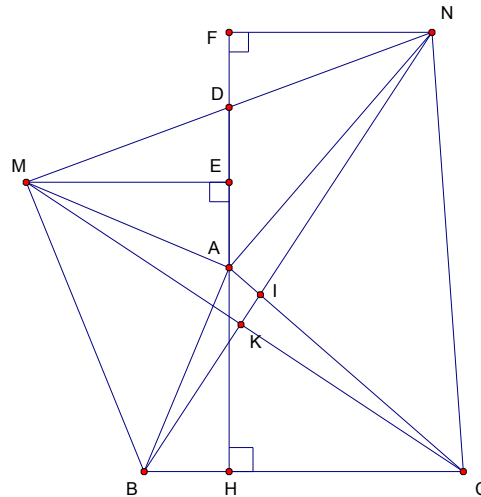
Cho $\triangle ABC$ có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$

a) Chứng minh rằng. $\triangle AMC = \triangle ABN$

b) Chứng minh. $BN \perp CM$

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có

$$AM = AB \text{ (} \triangle AMB \text{ vuông cân)}$$

$$AC = AN \text{ (} \triangle ACN \text{ vuông cân)}$$

$$\angle MAC = \angle NAC (= 90^\circ + \angle BAC)$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)

b) Gọi I là giao điểm của BN với AC , K là giao điểm của BN với MC .

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle IAN$ có:

$$\angle INI = \angle KCI \text{ vì } (\triangle AMC = \triangle ABN)$$

$$\angle AIN = \angle KIC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle KIC = \angle AIN = 90^\circ \text{ do đó: } MC \perp BN$$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH .

- Ta có: $\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ$ (vì $\angle MAB = 90^\circ$)

Lại có $\angle MAE + \angle AME = 90^\circ$ nên $\angle AME = \angle BAH$

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$ vuông tại E và H

Có:

$$\angle AME = \angle BAH \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AM = AB$$

Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow ME = AH$$

- Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA$

$$\Rightarrow FN = AH$$

Xét $\triangle MED$ và $\triangle NFD$ vuông tại E và F

$$\text{Có: } ME = NF = AH$$

$$\angle EMD = \angle FND \text{ (} \angle MDE = \angle FDN \text{)}$$

Suy ra $\triangle MED = \triangle NFD$

$$\Rightarrow MD = ND$$

Vậy: AH đi qua trung điểm của MN (đpcm)

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

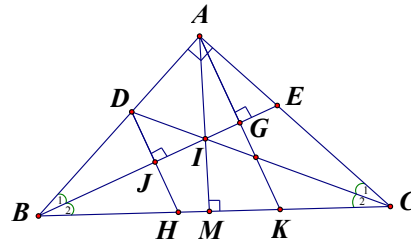
Cho tam giác ABC vuông cân tại A , tia phân giác của góc B và góc C cắt AC và AB lần lượt tại E và D .

a) Chứng minh rằng $BE = CD$; $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD , AI cắt BC ở M . Chứng minh rằng tam giác MAB vuông cân.

c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE , các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H . Chứng minh $KH = KC$.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC$ và $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$

BE ; CD là các tia phân giác của $\angle ABC$ và $\angle ACB \Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2 = \angle C_1 = \angle C_2 = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$
Xét $\triangle BCE$ và $\triangle CBD$ có:

$$\left. \begin{array}{l} CE = BD \\ \angle ABC = \angle ACB \\ BC \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCD = \triangle CBE \quad (\text{c.g.c})$$

$\Rightarrow BE = CD$ và $BD = CE$ (Hai cạnh tương ứng)

mà $AB = AC$

$$\Rightarrow AB - BD = AC - CE$$

$$\Rightarrow AD = AE$$

b) Có tia phân giác của góc $\angle ABC$ và góc $\angle ACB$ cắt AC và AB lần lượt tại E và $D \Rightarrow BE$ và CD là hai đường phân giác của $\triangle ABC$ cắt nhau tại I

$\Rightarrow AI$ là đường phân giác thứ ba của tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AI$ đồng thời là đường cao, đường trung tuyến của tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AI \perp BC$ tại M và $MB = MC$

Có $\triangle MAB$ vuông tại M có $\angle ABM = 45^\circ \Rightarrow \angle BAM = 45^\circ$

$\Rightarrow$ tam giác MAB vuông cân tại M .

Từ (1), (2), (3) ta có $\Rightarrow KC = HK$

c) Gọi J và G lần lượt là giao điểm của DH và AK với BE

Xét $\triangle BDH$ có BJ là đường cao đồng thời là phân giác $\Rightarrow \triangle BDH$ cân tại B

$$\Rightarrow BD = BH$$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle BAK$ cân tại $B \Rightarrow BA = BK$

$$\Rightarrow BA - BD = BK - BH \text{ hay } AD = HK$$

Mà $AD = AE \Rightarrow AE = HK$ (1)

Có $\triangle BAK$ cân tại B mà $\angle ABK = 45^\circ \Rightarrow \angle BAK = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$

$$\Rightarrow \angle KAC = 90^\circ - \angle BAK = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$$

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle CK A$ có

$$\left. \begin{array}{l} \angle IAC = \angle KCA = 45^\circ \\ AC \text{ chung} \\ \angle KAC = \angle C_1 = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AIC = \triangle CK A \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AI = KC \quad (2)$$

$$\text{Có } \angle IAG = \angle BAG - \angle BAI = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$$

$$\angle IAG = \angle KAC = 22,5^\circ$$

Xét $\triangle IAE$ có AG là đường cao đồng thời là phân giác của $\angle IAE$

$$\Rightarrow \triangle IAE \text{ cân tại } A \Rightarrow AI = AE \quad (3)$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

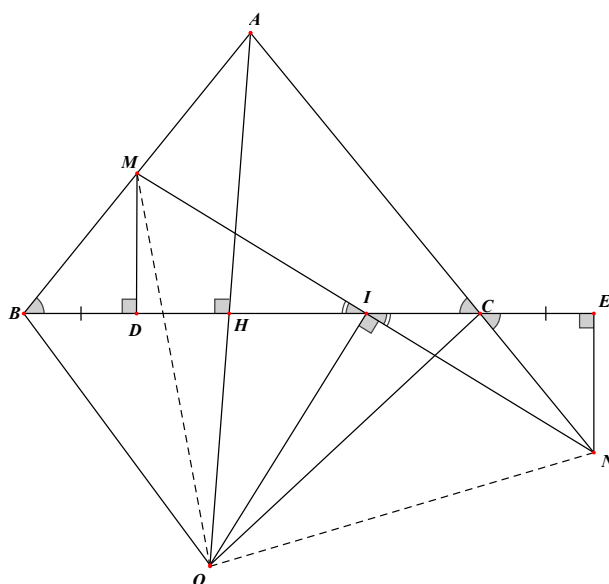
Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D (D không trùng với B và C), trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt cạnh AB và tia AC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh: $\triangle MDB = \triangle NEC$.

b) Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh: I là trung điểm DE .

c) Chứng minh rằng: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle MDB = \triangle NEC$

$$\text{Ta có } \angle ABC = \angle ACB \text{ (gt) mà } \angle ACB = \angle ECN \text{ (đd)}$$

$$\text{Nên } \angle ABC = \angle ECN \text{ hay } \angle DBM = \angle ECN$$

Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có:

$$\angle DBM = \angle ECN \text{ (cmt)}$$

$$BD = CE \text{ (gt)}$$

$$\angle D = \angle E = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\text{Suy ra } \triangle MDB = \triangle NEC \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow DM = EN \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow MB = NC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Chứng minh: I là trung điểm DE .

Gọi I là giao điểm của BC và MN

Ta có $\triangle MDI$ vuông tại D nên $\widehat{DMI} + \widehat{MID} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E nên $\widehat{ENI} + \widehat{NIE} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\widehat{MID} = \widehat{NIE}$ (đđ) nên $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$

Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có

$$\widehat{DMI} = \widehat{ENI} \text{ (cmt)}$$

$$DM = EN \text{ (cm câu a)}$$

$$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle MDI = \triangle NEI$ (c-g-c)

$$\Rightarrow IM = IN, ID = IE \text{ (cạnh tương ứng)}$$

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN đồng thời I là trung điểm của DE .

c) Chứng minh rằng: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ$$

$$HB = HC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

Nên $\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC} \text{ (góc tương ứng)}$$

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I .

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ có

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OAC} \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

OA cạnh chung

Nên $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c-g-c)

$$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA} \text{ (góc tương ứng) (1)}$$

$$\Rightarrow OB = OC \text{ (cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle OIM$ và $\triangle OIN$ có

$$IM = IN \text{ (I là trung điểm MN)}$$

$$\widehat{OIM} = \widehat{OIN} = 90^\circ$$

OI cạnh chung

Nên $\triangle OIM = \triangle OIN$ (c-g-c)

$$\Rightarrow OM = ON \text{ (cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle OMB$ và $\triangle OCN$ có

$$OM = ON \text{ (cmt)}$$

$$OB = OC \text{ (cmt)}$$

$$MB = NC \text{ (cm câu a)}$$

Nên $\triangle OMB = \triangle OCN$ (c-c-c)

$$\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCN} \text{ (góc tương ứng) (2)}$$

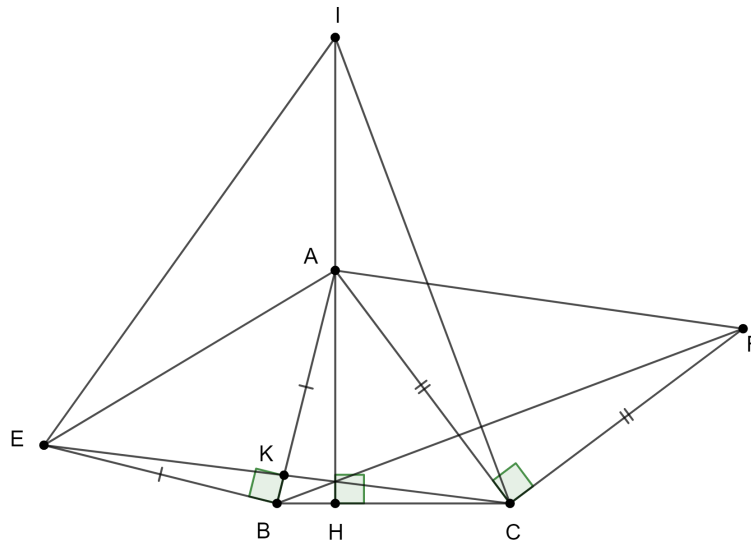
Từ (1);(2) suy ra $\angle BCA = \angle CN = 90^\circ$ do đó $OC \perp AC$
 Vậy O là điểm cố định.

Câu 6. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn, AH là đường cao. Vẽ về phía ngoài của tam giác ABC các tam giác ABE vuông cân ở B và tam giác ACF vuông cân ở C . Trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh:

- $\triangle ABI = \triangle BEC$.
- $BI = CE$ và $BI \perp CE$.
- AH, CE, BF cắt nhau tại một điểm.

Lời giải



- Ta có $\angle BAI + \angle BAH = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
 $\angle CBE + \angle BAH = 90^\circ + \angle ABH + \angle BAH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle BAI = \angle CBE$

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle BEC$ có: $AB = BE; \angle BAI = \angle EBC; AI = BC$
 $\Rightarrow \triangle ABI = \triangle BEC$ (c-g-c)

- $\triangle ABI = \triangle BEC$ (cmt) $\Rightarrow BI = CE \Rightarrow \angle ABI = \angle BEC$

$\triangle BEC$ có:

$$\begin{aligned} \angle EBC + \angle ECB + \angle BEC &= 180^\circ \\ \Rightarrow 90^\circ + \angle ABH + \angle ECB + \angle EBA &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle ABH + \angle ECB + \angle EBA &= 90^\circ \\ \Rightarrow \angle KBC + \angle ECB &= 90^\circ \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle BCK$ vuông tại $K \Rightarrow CE \perp BI$.

Chứng minh tương tự $BF \perp CI$.

- Xét $\triangle BIC$ có $IH \perp BC; CE \perp BI; BF \perp IC$
 $\Rightarrow IH; CE; BF$ là ba đường cao của tam giác.

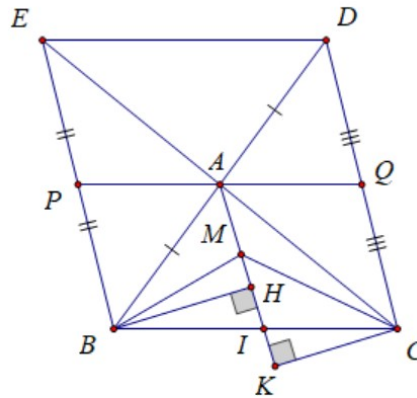
Vậy $IH; CE; BF$ đồng quy.

Câu 7. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Trên tia đối của tia AB , lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD cắt đường thẳng AC tại E .

- a) Chứng minh rằng $BE = CD$; $DE \parallel BC$.
- b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CD . Chứng minh A là trung điểm của PQ .
- c) Gọi M là một điểm bất kỳ nằm trong $\triangle ABC$. Đặt biểu thức $T = MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của T .

Lời giải



- a) Vì $BE \parallel CD$ nên $\angle ABE = \angle ADC$ (hai góc so le trong)
- Xét $\triangle AEB$ và $\triangle ACD$ có: $\angle EAB = \angle CAD$ (hai góc đối đỉnh), $AB = AD$, $\angle ABE = \angle ADC$
 $\Rightarrow \triangle AEB = \triangle ACD$ (g.c.g)
- Suy ra $BE = CD$ (hai cạnh tương ứng).
- Xét $\triangle AED$ và $\triangle ACB$ có: $AB = AD$, $\angle EAB = \angle CAD$ (hai góc đối đỉnh),
 $AE = AC$ (do $\triangle AEB = \triangle ACD$)
 $\Rightarrow \triangle AED = \triangle ACB$ (c.g.c)
- Suy ra $\angle ADE = \angle ABC$ (hai góc tương ứng)
- Suy ra $ED \parallel BC$
- b) Vì $PD = \frac{1}{2}BE$ và $QD = \frac{1}{2}CD$ mà $BE = CD$ nên $PB = QD$.
- Xét $\triangle APB$ và $\triangle AQD$ có: $AB = AD$, $\angle PBA = \angle QDQ$, $PB = QD$
 $\Rightarrow \triangle APB = \triangle AQD$ (c.g.c)
- Suy ra $\angle PAB = \angle QAD$ và $AP = AQ$
- Mặt khác $\angle PAQ + \angle QAB = 180^\circ$
- Do đó $\angle PAB + \angle QAB = 180^\circ$ hay ba điểm A, P, Q thẳng hàng.
- Vì $AP = AQ$ và A, P, Q thẳng hàng nên A là trung điểm của PQ .
- c) Gọi I là giao điểm của AM và BC . Kẻ $BH \perp AM$, $CK \perp AM$.
- Ta có $MA \cdot BC = MA \cdot (BI + CI) = MA \cdot BI + MA \cdot CI \Rightarrow MA \cdot BC \geq MA \cdot BH + MA \cdot CK$
- Hay $MA \cdot BC \geq 2S_{\triangle ABM} + 2S_{\triangle ACM}$
- Tương tự $MB \cdot AC \geq 2S_{\triangle ABM} + 2S_{\triangle BCM}$
- $MC \cdot AB \geq 2S_{\triangle ACM} + 2S_{\triangle BCM}$
- Suy ra $T = MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB \geq 4S_{\triangle ABC}$

Dấu “=” xảy ra khi $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$

Khi đó M là trực tâm của ΔABC .

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $4S_{\Delta ABC}$ khi M là trực tâm của ΔABC .

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm BC , vẽ tia Bx sao cho $\angle Bx = 45^\circ$. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt Bx tại A , trên đoạn BM lấy điểm D bất kỳ. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD . Đường thẳng AM cắt CI tại N .

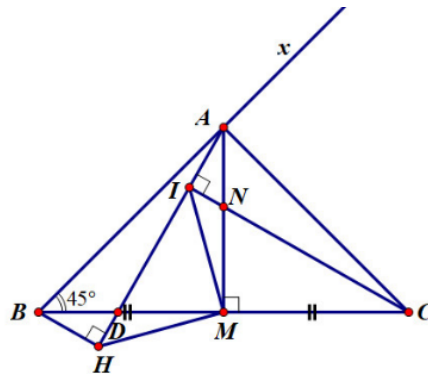
$$DN \perp AC;$$

a) Chứng minh

b) Chứng minh rằng $BH = AI$;

c) Tia phân giác của $\angle HIC$ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



$$\left\{ \begin{array}{l} AM \perp DC \\ CI \perp AD \\ AM \cap CI = N \end{array} \right. \Rightarrow DN \perp AC$$

a) Tam giác AND có

$$\left\{ \begin{array}{l} AM \text{ chung} \\ \angle ABM = \angle ACM = 90^\circ \\ MB = MC (gt) \end{array} \right.$$

Xét ΔABM và ΔACM có:

b)

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM (c.g.c) \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

mà $\angle Bx = 45^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \angle AB = 90^\circ \Rightarrow \angle AI = \angle BH$ (cùng phụ $\angle BAH$)

suy ra: $MA = MB = MC$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC (cmt) \\ \angle AI = \angle BH (cmt) \end{array} \right.$$

- Xét ΔBHA vuông tại H và ΔAIC vuông tại I có:

Suy ra $\Delta BHA = \Delta AIC$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

c) Có ΔBDH vuông tại H nên $\angle MBH + \angle BDH = 90^\circ$; có ΔMAD vuông tại M nên

$\angle MAH + \angle MDA = 90^\circ$, ta lại có $\angle BDH = \angle ADM$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{MBH} = \widehat{MAH}$

$$\left\{ \begin{array}{l} BH = AI \text{ (cmt)} \\ \widehat{MBH} = \widehat{MAI} \text{ (cmt)} \\ BM = AM \text{ (cmt)} \end{array} \right.$$

Xét $\triangle BHM$ và $\triangle AIM$ có:

$$HM = IM \Rightarrow \triangle HMI \text{ cân tại } M$$

Suy ra

$$\widehat{BMH} = \widehat{AMI} \text{ lại có } \widehat{BMI} = \widehat{DMI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{DMI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMI} = 90^\circ$$

và

$$\Rightarrow \triangle HMI \text{ vuông cân tại } M \Rightarrow \widehat{MID} = 45^\circ \text{ mà } \widehat{HIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ$$

Suy ra IM là tia phân giác của góc $\widehat{HIC}$.

Suy ra tia phân giác của $\widehat{HIC}$ luôn đi qua một điểm M cố định.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

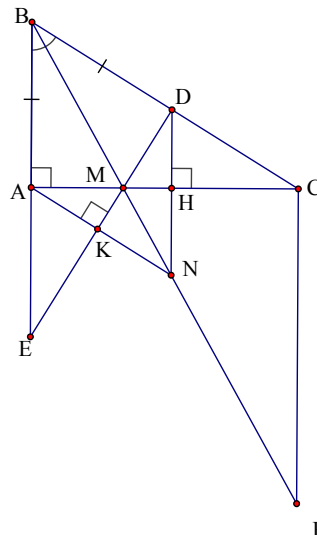
Cho tam giác ABC vuông tại A . Tia phân giác của góc B cắt AC tại điểm M . Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = BA$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BA .

a) Chứng minh: $MA = MD$.

b) Kẻ $DH \perp MC$ ($H \in MC$) và $AK \perp ME$ ($K \in ME$), gọi N là giao điểm của hai tia DH và AK . Chứng minh $\triangle MHN = \triangle MKN$ và ba điểm B, M, N thẳng hàng.

c) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia BM tại F . Chứng minh: $AB + AM < CF + CM$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBM$ có: $AB = BD$ (gt)

$$\widehat{ABM} = \widehat{DBM} \text{ (Vì } BM \text{ là tia phân giác của góc } B)$$

BM cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBM \text{ (c-g-c)}$$

Suy ra $MA = MD$ (hai cạnh tương ứng)

b) Vì $MD = MA$ và $\widehat{AMK} = \widehat{DMH}$ (đối đỉnh)

suy ra $\Delta MAK = \Delta MDH$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow MK = MH$
(hai cạnh tương ứng)

Do đó $\Delta MHN = \Delta MKN$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

$$\Delta ABM = \Delta DBM \text{ (cmt)} \Rightarrow \angle AMB = \angle DMB = \frac{\angle AMD}{2}$$

Vì

$$\Delta MHN = \Delta MKN \Rightarrow \angle HMN = \angle KMN = \frac{\angle HMK}{2}$$

Mặt khác

Mà $\angle AMD = \angle KMH$ (hai góc đối đỉnh)

$$\angle AMB = \angle HMN$$

Suy ra:

Do đó: $\angle BMN = \angle AMB + \angle AMN = \angle HMN + \angle AMN = 180^\circ$

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng

c) Vì $\Delta ABM = \Delta DBM$ (cmt) nên $\angle BDM = \angle BAM = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tam giác MDC vuông tại D nên cạnh huyền MC lớn nhất

$\Rightarrow MC > MD$ mà $MD = MA$ suy ra $MC > MA$ (1)

Mặt khác ta có AB và CF cùng vuông góc với AC suy ra AB song song với $CF \Rightarrow \angle ABM = \angle CFB$ (hai góc so le trong) mà $\angle ABM = \angle CBM$ (Vì BM là tia phân giác của góc B)

$$\Rightarrow \angle CBM = \angle CFB$$

Suy ra tam giác BCF cân tại C nên $CF = CB$

Mà $CB > AB$ (Tam giác ABC vuông tại A nên cạnh huyền BC lớn nhất)

Suy ra $CF > AB$ (2)

Từ (1); (2) ta có: $CM + CF > MA + AB$

Câu 10. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

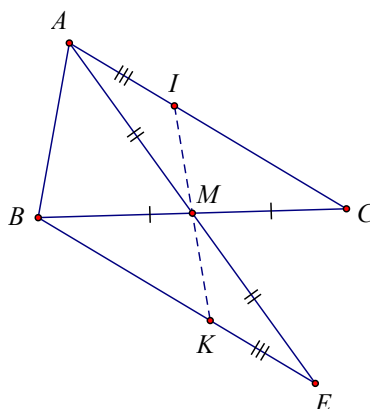
Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA = ME$

a) Chứng minh $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên đoạn thẳng AC , K là một điểm trên đoạn thẳng EB mà $AI = EK$.

Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$MC = MB$ (giả thiết), $\angle AMC = \angle EMB$ (hai góc đối đỉnh), $MA = ME$ (giả thiết)
 $\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle CAM = \angle BEM$ (hai góc tương ứng).
 Mà $\angle CAM$ và $\angle BEM$ là hai góc so le trong nên $AC \parallel BE$. Đpcm.

b) Do $\triangle AMC = \triangle EMB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$ (hai góc tương ứng).
 Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$AI = EK$ (giả thiết), $\angle IAM = \angle KEM$ (theo ý a), $MA = ME$ (giả thiết)
 $\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK$ (c.g.c).

Mà $\angle AMK + \angle EMK = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\angle AMK + \angle IAM = 180^\circ \Rightarrow \angle IMK = 180^\circ$

Hay ba điểm I, M, K thẳng hàng. Đpcm.

Câu 11. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

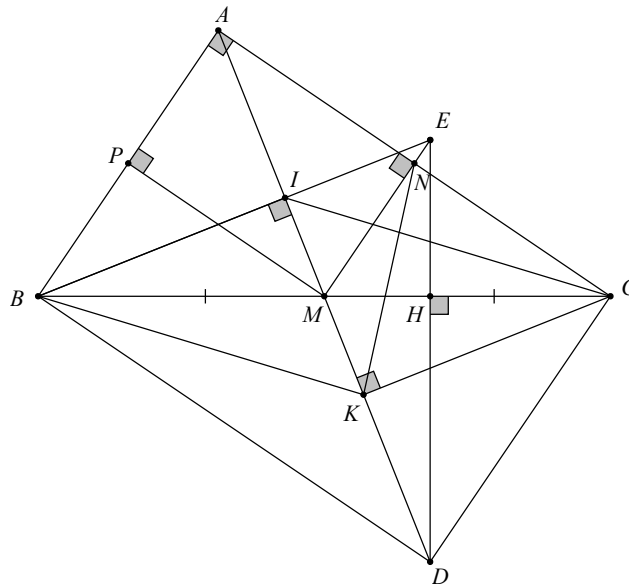
Cho tam giác ABC vuông tại A , M là trung điểm của BC , trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $AM = MD$. Gọi I và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống AD , N là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AC .

a) Chứng minh: $BK \parallel CI$.

b) Kẻ MP vuông góc với AB tại P . Chứng minh $KN = MP$.

c) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống BC . Chứng minh các đường thẳng BI, DH, MN đồng quy (chỉ xét trường hợp I thuộc đoạn AM).

Lời giải



1) Xét hai tam giác BIM và CKM có:

$$\angle BIM = \angle CKM = 90^\circ$$

$$MB = MC \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\angle BMI = \angle CMK \text{ (đối đỉnh)}$$

Suy ra: $\triangle BIM = \triangle CKM$ (g-c-g)

$\Rightarrow \angle MBI = \angle MCK$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BK \parallel CI$.

2) Ta có: $\left. \begin{matrix} MP \perp AB \\ NA \perp AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow MP \parallel NA \Rightarrow \widehat{PMA} = \widehat{NAM}$ (so le trong).

Xét hai tam giác PAM và NMA có:

$$\widehat{APM} = \widehat{MNA} = 90^\circ$$

MA cạnh huyền chung.

$$\widehat{PMA} = \widehat{NAM} \text{ (cmt)}$$

Suy ra: $\triangle PAM = \triangle NMA$ (ch-gn) $\Rightarrow MP = NA$ (1)

Xét tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A có AM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên

$$AM = MB = MC = \frac{1}{2}BC$$

Xét $\triangle AMC$ cân tại M ; MN là đường cao đồng thời là trung tuyến; suy ra $NA = NC$

Xét tam giác $\triangle AKC$ vuông tại K có KN là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên

$$KN = NA = NC = \frac{1}{2}AC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $KN = MP$.

3) Xét hai tam giác $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có:

$$AM = MD \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{DMB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$MB = MC \text{ (GT)}.$$

Suy ra: $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c) suy ra: $\widehat{MAC} = \widehat{MDB}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BD$

$$\left. \begin{matrix} MN \perp AC \\ AC \parallel BD \end{matrix} \right\} \Rightarrow MN \perp BD$$

Gọi giao điểm của BC và DH là E . Xét tam giác EBD có BH , DI là hai đường cao cắt nhau tại M suy ra M là trực tâm của tam giác. Lại có $MN \perp BC$ nên MN là đường cao thứ ba trong tam giác hay MN đi qua E . Suy ra các đường thẳng BI , DH , MN đồng quy tại E .

Câu 12. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

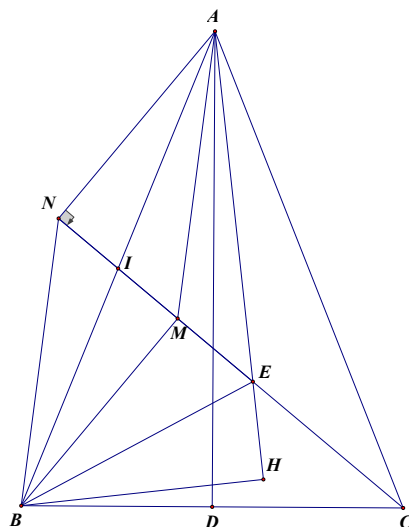
Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Gọi I là trung điểm của AB , các điểm N, M lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến đường thẳng CI . Trên đoạn thẳng CI lấy điểm E sao cho $\widehat{EAB} = \widehat{ECA}$. Kẻ $BH \perp AE$ (H thuộc đường thẳng AE).

a) Chứng minh rằng $\triangle ANI = \triangle MBI$, rồi từ đó suy ra $AM \parallel BN$.

b) Chứng minh rằng BE là phân giác của $\angle MBH$

a) Chứng minh rằng $\angle ECA = \angle EBC$

Lời giải



a) *) Xét $\triangle ANI$ và $\triangle BMI$ có

$$\angle ANI = \angle BMI (=90^\circ)$$

$$AI = BI \text{ (I là trung điểm của AB)}$$

$$\angle AIN = \angle BIM \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle ANI = \triangle BMI \text{ (ch-gn)}$$

Suy ra $IN = IM$ (hai cạnh tương ứng).

*) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle BNI$ có

$$IN = IM \text{ (cm trên)}$$

$$\angle AIM = \angle BIN \text{ (đối đỉnh)}$$

$$AI = BI \text{ (I là trung điểm của AB)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle BNI \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle BNI$$

Mà hai góc ở vị trí so le trong

Vậy $AM \parallel BN$.

b) Xét $\triangle NAC$ và $\triangle HBA$ có

$$\angle ANC = \angle BHA (=90^\circ)$$

$$AC = AB \text{ (}\triangle ABC \text{ cân tại A)}$$

$$\angle ACN = \angle BAH \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle NAC = \triangle HBA$ (ch-gn)

Suy ra $AN = BH$ (Hai cạnh tương ứng)

Mà $AN = BM$ ($\triangle ANI = \triangle BMI$)

Suy ra $BH = BM$.

*) Xét $\triangle MBE$ và $\triangle HBE$ có

$$\angle BME = \angle BHE (=90^\circ)$$

BE là cạnh chung

$$BH = BM \text{ (cm trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MBE = \triangle HBE \text{ (ch-cgv)}$$

$$\Rightarrow \angle MBE = \angle HBE$$

Vậy BE là phân giác của $\angle MBH$.

c) Ta có $\angle ECA = \angle EAB$ (gt);

Nên $\angle ECA = \angle EAC + \angle ECA = \angle EAC + \angle EAB = \angle BAC$

Mặt khác $\angle BEH = \angle BEM$ ($\triangle MBE = \triangle HBE$)

Mà $\angle BEM + \angle BEH + \angle ECA = 180^\circ$; $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$; $\angle ABC = \angle ACB$

Suy ra $\angle BEM = \angle ABC$

Ta lại có $\angle BEM = \angle EBC + \angle ECB$; $\angle ABC = \angle ACE + \angle ECB$

Suy ra $\angle ECA = \angle EBC$.

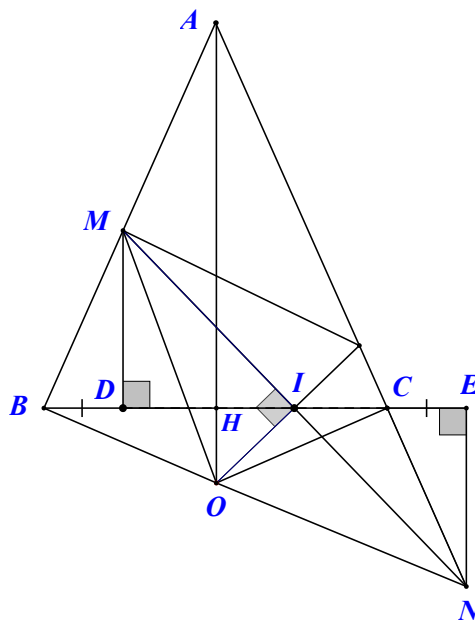
Câu 13. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt M và N . Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I . Chứng minh rằng:

a) I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

b) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Ta có $\angle MBD = \angle ACB$ (2 góc đáy của tam giác cân) và $\angle NCE = \angle ACB$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \angle MBD = \angle NCE$

Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có: $\angle MBD = \angle NCE$ (cmt), $BD = CE$ (gt), $\angle MDB = \angle NEC (=90^\circ)$

Suy ra $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g)

Suy ra $MB = CN$ (hai cạnh tương ứng), $MD = NE$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có $\angle MIB = \angle NIC$ (đối đỉnh) mà $\angle DMI + \angle MIB = \angle ENE + \angle NIC = 90^\circ \Rightarrow \angle DMI = \angle ENE$

Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có: $\angle DMI = \angle ENE$ (cmt), $MD = NE$ (cmt), $\angle MDI = \angle NEI (=90^\circ)$

Suy ra $\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g)

Suy ra $MI = NI$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

b) Kẻ AH vuông góc với BC .

$\triangle ABC$ cân ở A nên AH cũng là đường trung trực của BC .

Gọi đường thẳng vuông góc với MN tại I cắt AH ở O .

Vì I là trung điểm của MN nên OI là đường trung trực của MN .

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ có:

$AB = AC$ (gt), OA là cạnh chung, $OB = OC$ (tính chất điểm thuộc đường trung trực)

Suy ra $\triangle ABO = \triangle ACO$ (c.c.c)

Suy ra $\angle ABO = \angle ACO$ (hai góc tương ứng) (1)

Xét $\triangle NCO$ và $\triangle MBO$ có:

$CN = BM$, $ON = OM$ (OI là đường trung trực của MN), $OB = OC$ (cmt)

Suy ra $\triangle NCO = \triangle MBO$ (c.c.c)

Suy ra $\angle NCO = \angle MBO$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow \angle NCO = \angle ABO$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle NCO = \angle ACO$

Mà $\angle NCO + \angle ACO = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle NCO = \angle ACO = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow OC \perp AC$

Mà A, B, C cố định nên O cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua điểm cố định O khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 14. (HSG 7 huyện Tây Hồ, 2022 - 2023)

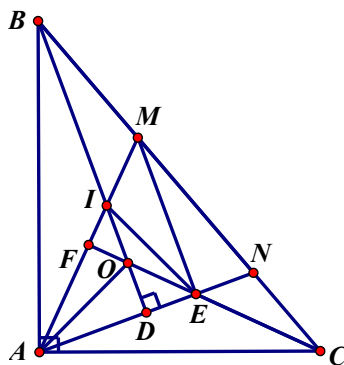
Cho tam giác ABC vuông tại A , lấy điểm N thuộc cạnh BC sao cho $BN = BA$. Vẽ BD vuông góc với AN (D thuộc AN)

a. Chứng minh BD là phân giác của $\angle ABC$

b. Lấy điểm M thuộc cạnh CB sao cho $CM = CA$. Kẻ CE là tia phân giác của $\angle ACN$ ($E \in AN$). Chứng minh $ME \perp AN$

c. Cho CE cắt BD tại O , cắt AM tại F , BD cắt AM tại I . Chứng minh rằng $IE = AO$.

Lời giải



a.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BND$ có: $\angle BDA = \angle BDN = 90^\circ$ (do $BD \perp AN$)

$AB = NB$ (gt); BD là cạnh chung

Nên $\triangle ABD = \triangle BND$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle ABD = \angle NBD$ (góc tương ứng)

hay BD là phân giác $\angle ABC$

b. Để chứng minh: $\triangle CAF = \triangle CMF$ (c.g.c)

$$\left\{ \begin{array}{l} FA = FM \\ CF \perp AM \\ \angle CAF = \angle CMF (*) \end{array} \right.$$

Suy ra

Chứng minh được : $\triangle AFE = \triangle MFE$ (c-g-c)

Suy ra $\angle EAF = \angle EMF$ (góc tương ứng)(2*)

Từ (*) và (2*) suy ra: $\angle EAC = \angle EMC$

Lại có $\angle BAM + \angle MAN + \angle NAC = 90^\circ$ (do $\triangle ABC$ vuông tại A)

Nên suy ra: $\angle BNA + \angle NAC = 90^\circ$ (do $\angle BAN = \angle BNA$)

Suy ra $\angle BNA + \angle CME = 90^\circ$ (do $\angle CME = \angle NAC$)

$\Rightarrow \angle MEN = 90^\circ \Rightarrow ME \perp AN$

c. Ta có $ME \perp AN$; $BD \perp AN \Rightarrow ME \parallel BD$

Xét $\triangle AIE$ có: $EF \perp AM$; $ID \perp AN$ cắt nhau tại O nên O là trực tâm

Suy ra $AO \perp IE$

Suy ra $\angle IDO = \angle AEO$ (cùng phụ với $\angle IEA$)

Lại có $\angle AOE = \angle AOM$ (chứng minh ở câu b)

Mà $ME \parallel BD$

Suy ra $\angle EMA = \angle DIA$ (đồng vị)

$\triangle ADI$ cân tại D

$\Rightarrow DI = DA$

Xét $\triangle IDE$ và $\triangle AOD$ có:

$$AD = DI; \angle ADO = \angle IDE = 90^\circ; \angle OAD = \angle DIE$$

Nên $\triangle IDE = \triangle ADO$ (g-c-g)

Suy ra $IE = AO$ (cạnh tương ứng)

Câu 14. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, 2022 - 2023)

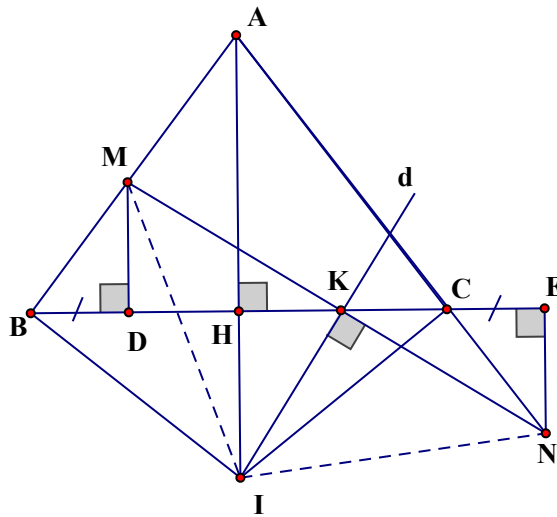
Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD < CD$, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt ở M và N .

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$.

b) Gọi K là giao điểm của BC và MN . Chứng minh K là trung điểm của MN .

c) Từ K kẻ đường thẳng d vuông góc với MN . Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $BM = CN$.

Ta có: $\angle ABC = \angle ACB$ (vì $\triangle ABC$ cân tại A)

$\angle ACB = \angle ECN$ (Hai góc đối đỉnh) (2)

suy ra $\angle ABC = \angle ECN$ hay $\angle MBD = \angle ECN$

Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có:

$\angle BDM = \angle EN = 90^\circ$; $\angle MBD = \angle ECN$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g)

$\Rightarrow BM = CN$. (hai cạnh tương ứng)

b) Gọi K là giao điểm của BC và MN . Chứng minh K là trung điểm của MN .

Xét $\triangle MDK$ và $\triangle NEK$ có

$\angle MDK = \angle NEK = 90^\circ$;

$DM = EN$ (theo câu a)

$\angle MKD = \angle NKE$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle MDK = \triangle NEK$ (một cạnh góc vuông và một góc nhọn bằng nhau)

$\Rightarrow MK = KN$ (hai cạnh tương ứng)

Vậy K là trung điểm của MN .

c) Từ K kẻ đường thẳng d vuông góc với MN . Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Kẻ $AH \perp BC$ tại H , ta có $\angle AHB = \angle AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle HAB = \angle HAC$

Gọi I là giao điểm của AH và đường thẳng d , ta có $\angle IAB = \angle IAC$ (c.g.c)

$\angle IBA = \angle ICA$ (1)

Chỉ ra: $\angle IKM = \angle IKN$ (hai cạnh góc vuông bằng nhau) $\Rightarrow IM = IN$, từ đó suy ra $\angle IBM = \angle ICN$

(c.c.c) $\Rightarrow \angle IBA = \angle ICN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \angle ICA = \angle ICN = 90^\circ \Rightarrow IB \perp AB \Rightarrow$ điểm I cố định.

Vậy đường thẳng d luôn đi qua điểm I cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vn teach.com>