

Chuyên đề 7. CHIA ĐA THỨC CHO ĐA THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Chia đơn thức A cho đơn thức B

Chia hệ số của A cho hệ số của B;

Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B;

Nhân các kết quả với nhau.

2. Chia đa thức cho đơn thức

$$(A + B) : C = A : C + B : C$$

3. Chia đa thức A cho đa thức B

Cho A và B là hai đa thức tùy ý của cùng một biến ($B \neq 0$) khi đó tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B.

Q gọi là đa thức thương và R gọi là dư trong phép chia A cho B.

Nếu $R = 0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

4. Định lý Bézout.

Bézout là nhà toán học Pháp. Ông sinh năm 1730, mất năm 1783. Bézout quan tâm đến việc giải các hệ phương trình tuyến tính; nhằm mục đích ấy ông hệ thống hóa các phép tính về định thức. Ông cũng nghiên cứu về phép khử, nghĩa là tìm điều kiện đối với các hệ số của hai đa thức để chúng có một nghiệm chung. Ông cho xuất bản *Giáo trình Toán học* được tái bản nhiều lần ở Pháp cũng như ở nước ngoài. Trong đó có một định lý nổi tiếng mang tên ông:

Định lý. Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $(x - a)$ đúng bằng $f(a)$.

5. Hệ quả của định lý Bézout.

Nếu a là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì $f(x)$ chia hết cho $(x - a)$.

Người ta cũng chứng minh được rằng: Nếu đa thức $f(x)$ nhận n số nguyên khác nhau $a_1; a_2; \dots; a_n$ làm nghiệm thì $f(x)$ chia hết cho $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$.

6. Phương pháp nội suy Newton

Newton là nhà Toán học, Vật lý học người Anh. Ông sinh năm 1642, mất năm 1727. Trong Toán học ông là nhà sáng lập và phát minh ra phép tính vi phân và tích phân. Ngoài ra ông có rất nhiều công trình về Toán học. Song người đời sau khi nhắc đến Newton, thường ca ngợi những phát minh của ông về vật lý học. Sau đây là phương pháp nội suy, một trong những phát hiện về toán của ông:

Để tìm đa thức $P(x)$ bậc không quá n khi biết giá trị tại $(n+1)$ điểm: $C_1; C_2; \dots; C_{n+1}$ ta có thể biểu diễn

$P(x)$ dưới dạng:

$$P(x) = b_0 + b_1(x - C_1) + b_2(x - C_1)(x - C_2) + \dots + b_n(x - C_1)(x - C_2) \dots (x - C_n).$$

Bằng cách thay thế x lần lượt bằng các giá trị $C_1; C_2; \dots; C_{n+1}$ vào biểu thức $P(x)$ ta lần lượt tính được các hệ số $b_0; b_1; \dots; b_n$

7. Lược đồ Horner.

Horner là nhà toán học Anh. Ông sinh năm 1787, mất năm 1837. Ông không có nhiều công trình nhưng nổi tiếng vì một phương pháp tính gần đúng một số phương trình và bây giờ lấy tên ông đặt cho phương pháp ấy. Thực ra thuật toán đã được người Trung Hoa biết đến từ trước, nhưng Horner đã phát minh ra nó một cách độc lập. Sau đây là lược đồ Horner:

Để tìm thương và dư trong phép chia $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ($a_0 \neq 0$) cho $g(x) = x - \alpha$. Ta lập bảng:

f	a_0	a_1	$\dots$	a_k	$\dots$	a_n
$x = \alpha$	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$\dots$	$b_k = ab_{k-1} + a_k$	$\dots$	$b_n = ab_{n-1} + a_n$

Với $f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(x); f(x) = b_n = ab_{n-1} + a_n$

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thực hiện phép chia $A : B$ trong các trường hợp sau:

a) $A = 12x^3y^4; \quad B = -3x^2y.$

b) $A = -\frac{10}{3}x^6y^5z^2; \quad B = \frac{1}{9}x^2yz.$

c) $A = \left(-\frac{1}{2}x^n y^{n+2}\right) : (3x^{n-2}y^n) \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$

Giải

a) $A : B = 12x^3y^4 : (-3x^2y) = -4xy^3;$

b) $A : B = \left(-\frac{10}{3}x^6y^5z^2\right) : \left(\frac{1}{9}x^2yz\right) = -30x^4y^4z;$

c) $A : B = \left(-\frac{1}{2}x^n y^{n+2}\right) : (3x^{n-2}y^n) = \frac{1}{6}x^2y^2.$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

a) $x^8 + x^4 + 1 : x^2 + x + 1$

b) $x^5 + x^4 + 1 : x^2 + x + 1$

Giải

Tìm cách giải. Khi chứng minh đa thức $f(x) : g(x)$ ta có thể:

- *Cách 1.* Phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử có chứa nhân tử $g(x)$.

- *Cách 2.* Biến đổi đa thức $f(x)$ thành tổng các đa thức chia hết cho đa thức $g(x)$.

Trình bày lời giải

a) *Cách 1.* Ta có:

$$\begin{aligned}
 x^8 + x^4 + 1 &= x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + x^2)^2 - x^4 \\
 &= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) \\
 &= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) \\
 &= (x^4 - x^2 + 1) \left[(x^2 + 1)^2 - x^2 \right] \\
 &= (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) : (x^2 + x + 1) \\
 &\Rightarrow x^8 + x^4 + 1 : x^2 + x + 1
 \end{aligned}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned}
 x^8 + x^4 + 1 &= x^8 - x^2 + x^4 - x + x^2 + x + 1 \\
 &= x^2(x^6 - 1) + x(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\
 &= x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + x(x^2 - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) : x^2 + x + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1) : (x^2 + x + 1) .
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm các số thực a, b, sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

Giải

Tìm cách giải. Khi tìm hệ số a, b sao cho đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$, chúng ta có hai hướng suy nghĩ:

Đặt phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ đến khi được phần dư có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức $g(x)$. Để phép chia hết ta đồng nhất phần dư đó với đa thức 0.

Còn nếu đa thức $g(x)$ phân tích được thành nhân tử với các nhân tử bậc nhất, ta viết $f(x)$ thành tích các nhân tử đó nhân với đa thức thương. Rồi dùng đồng nhất thức sao cho vế phải bằng 0.

Trình bày lời giải

Cách 1. Thực hiện phép chia ta được:

$$\begin{array}{r|l}
 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 & x^2 - 2x - 3 \\
 4x^4 - 8x^3 - 12x^2 & \hline
 -3x^3 - (2a - 12)x^2 + 5bx - 6 & \\
 -3x^3 + 6x^2 + 9x & \hline
 (6 - 2a)x^2 + (5b - 9)x - 6 & \\
 (6 - 2a)x^2 - (12 - 4a)x - (18 - 6a) & \hline
 \end{array}$$

$$(5b - 4a + 3)x + (12 - 6a)$$

Để phép chia hết thì $\begin{cases} 5b - 4a + 3 = 0 \\ 12 - 6a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Cách 2. Ta có: $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4$

$$= (x - 1 - 1)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1)$$

Đặt thương là $q(x)$ ta có: $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 = (x - 3)(x + 1)q(x)$

Chọn $x = 3$ ta có: $4.3^4 - 11.3^3 - 2a.3^2 + 5b.3 - 6 = 0$

$$\Rightarrow 15b - 18a = -21 \Rightarrow 5b - 6a = -7 \quad (1)$$

Chọn $x = -1$ ta có: $4.(-1)^4 - 11.(-1)^3 - 2a.(-1)^2 + 5b.(-1) - 6 = 0$

$$\Rightarrow 5b + 2a = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $8a = 16 \Rightarrow a = 2$

Thay vào (2) $\Rightarrow 5b + 4 = 9 \Rightarrow b = 1$.

Ví dụ 4: Tìm đa thức $f(x)$ biết:

$f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 1 ;

$f(x)$ chia cho $x - 4$ dư 8;

$f(x)$ chia cho $(x + 3)(x - 4)$ thì được $3x$ và còn dư.

Giải

Tìm cách giải. Ta có $(x + 3)(x - 4)$ là tam thức bậc hai, do đó phần dư khi chia $f(x)$ chia cho

$(x + 3)(x - 4)$ có dạng tổng quát là $ax + b$. Từ đó suy ra được: $f(x) = (x + 3)(x - 4)3x + ax + b$. Mặt khác ta có $f(-3) = 1, f(4) = 8$. Do vậy để tìm $f(x)$ chúng ta cần xác định a, b bằng cách chọn $x = -3; x = 4$ để đồng nhất hai vế.

Trình bày lời giải

Theo định lý Bézout ta có $f(3) = 1, f(4) = 8$

Đặt dư $f(x)$ chia cho $(x + 3)(x - 4)$ là $ax + b$

Suy ra $f(x) = (x + 3)(x - 4) + ax + b$.

Với $x = -3$ ta có: $= (-3 + 3)(-3 - 4)3(-3) + a(-3) + b \Rightarrow b - 3a = 1 \quad (1)$

Với $x = 4$ ta có: $8 = (4 + 3)(4 - 4)(3.4) + a.4 + b \Rightarrow b + 4a = 8 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $7a = 7 \Rightarrow a = 1$ thay vào (2) ta được $b = 4$.

Từ đó ta được: $f(x) = (x + 3)(x - 4)3x + x + 4$

Hay $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$

Ví dụ 5: Tìm một đa thức bậc ba, biết $P(x)$ chia cho $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$ đều được dư 6 và $P(-1) = -18$.

Giải

Tìm cách giải. Từ đề bài theo định lí Bézout ta có $P(1) = 6, P(2) = 6, P(3) = 6, P(-1) = -18$. Như vậy đa thức $P(x)$ bậc ba mà biết giá trị tại bốn điểm 1; 2; 3; -1 nên ta có thể sử dụng phương pháp nội suy Newton.

Trình bày lời giải

Theo định lý Bézout ta có: $P(1) = P(2), P(3) = 6$.

Do đó ta đặt $P(x) = d + c(x - 1) + b(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Cho $x = 1$ ta được $P(1) = d$, suy ra $d = 6$

$P(x) = 6 + c(x - 1) + b(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Cho $x = 2$ ta được $P(2) = 6 + c$, suy ra $c = 0$

$P(x) = 6 + 0(x - 1) + b(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Cho $x = 3$ ta được $P(3) = 6 + 2b$, suy ra $b = 0$

$P(x) = 6 + 0(x - 1) + 0(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Do đó $P(x) = 6 + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Cho $x = -1$ ta được $P(-1) = 6 - 24a$, do đó $-18 = 6 - 24a$ suy ra $a = 1$.

Vậy $P(x) = 6 + 1 \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Rút gọn ta được: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x - 3)^{200} + (x - 2)^{100} - 1$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 5x + 6$

Giải

Tìm cách giải. Đa thức $g(x)$ bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt. Nếu mọi nghiệm của đa thức $g(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$. Nhận thấy trong bài $g(x)$ có hai nghiệm là $x = 2; x = 3$, nên chúng ta chỉ cần kiểm tra xem $x = 2; x = 3$ có là nghiệm của $f(x)$ không?

Trình bày lời giải

Ta có: $f(2) = (2 - 3)^{200} + (2 - 2)^{100} - 1$ nên $f(x) : (x - 2)$

$f(3) = (3 - 3)^{200} + (3 - 2)^{100} - 1$ nên $f(x) : (x - 3)$

Nên $f(x)$ chia hết cho $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$

Ví dụ 7: Cho $f(x) = 2x^5 - 70x^3 + 4x^2 - x + 1$

Tìm thương và dư của phép chia $f(x)$ cho $x - 6$

Giải

Tìm cách giải. Ngoài cách chia thông thường, vì đa thức chia có dạng $x - \alpha$ nên ta có thể dùng lược đồ Homer.

Trình bày lời giải

Ta có sơ đồ Horner

f	2	0	- 70	4	- 1	1
$\alpha = 6$	2	12	2	16	95	571

Suy ra $f(x) = (x - 6)g(x) + f(6) = (x - 6)(2x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 16x + 95) + 571$

Vậy thương là $g(x) = 2x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 16x + 95$ và dư là $r = f(6) = 571$

Ví dụ 8: Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = x^3 + 2x^2 + 15$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = x + 3$.

Giải

Đặt phép chia ta có:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 2x^2 + 15 & x + 3 \\
 \hline
 x^3 + 3x^2 & x^2 - x - 3 \\
 \hline
 -x^2 + 15 & \\
 -x^2 - 3x & \\
 \hline
 3x + 15 & \\
 3x + 9 & \\
 \hline
 6 &
 \end{array}$$

Muốn cho giá trị của A chia hết cho giá trị của B thì ta phải có $x + 3 \mid 6 \Rightarrow x + 3 \in \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 \}$.

$x + 3$	1	- 1	2	- 2	3	- 3	6	- 6
x	- 2	- 4	- 1	- 5	0	- 6	3	- 9

Vậy với $x \in \{ - 2; - 4; - 1; - 5; 0; - 6; 3; - 9 \}$ thì giá trị của biểu thức A chia hết cho giá trị của biểu thức B.

Ví dụ 9: Tính giá trị biểu thức $P = 28x^5 - 2x^4 - 2013x^3 + 14606x - 3447$ khi $x^2 - 3x + 1 = 0$

Giải

Tìm cách giải. Với $x^2 - 3x + 1 = 0$ thì tìm x, ta được x không phải là số nguyên, nên thay vào biểu thức P để tính sẽ gặp nhiều khó khăn và có thể dẫn đến sai lầm. Do vậy chúng ta sử dụng P chia cho $x^2 - 3x + 1$ được Q(x) và phần dư R(x) khi đó, ta viết: $P(x) = (x^2 - 3x + 1).Q(x) + R(x)$. Sau đó thay $x^2 - 3x + 1 = 0$ vào biểu thức, ta tính được P(x) đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

Ta có:

$$\begin{array}{r|l}
28x^5 - 2x^4 - 1013x^3 & x^2 - 3x + 1 \\
+ 14606x & \\
- 3447 & \\
\hline
28x^5 - 84x^4 + 28x^3 & 28x^3 + 82x^2 - 1795x - 5467 \\
\hline
82x^4 - 2041x^3 & \\
82x^4 - 246x^3 + 82x^2 & \\
\hline
- 1795x^3 - 82x^2 + 14606x & \\
- 1795x^3 + 5385x^2 - 1795x & \\
\hline
- 5467x^2 + 16401x - 3347 & \\
- 5467x^2 + 16401x - 5467 & \\
\hline
2020 &
\end{array}$$

Từ đó ta có $P = (x^2 - 3x + 1)(28x^3 + 82x^2 - 1795x - 5467) + 2020$ mà $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow P = 2020$

C. Bài tập vận dụng

7.1. Xác định a, b sao cho $2x^3 + ax - b$ chia cho $x + 1$ thì dư - 6, chia cho $x - 2$ dư 21.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Bézout ta có: $f(-1) = -6$; $f(2) = 21$

$$\Rightarrow 2(-1)^3 + a(-1) - b = -6 \Rightarrow a + b = 4 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2 - b = 21 \Rightarrow 2a - b = 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3a = 9 \Rightarrow a = 3; b = 1$

7.2. Tìm một đa thức bậc ba, biết $P(x)$ chia cho $x, (x - 1), (x - 2), (x - 3)$ được dư lần lượt là 10; 12; 4; 1.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Bézout ta có:

$$P(0) = 10; P(1) = 12; P(2) = 4; P(3) = 1$$

Dùng phương pháp nội suy Newton.

Ta đặt: $P(x) = d + cx + bx(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$

Cho $x = 0$ ta được $P(0) = d$, suy ra $d = 10$.

$$P(x) = 10 + cx + bx(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$$

Cho $x = 1$ ta được $P(1) = 10 + c$, suy ra $c = 2$.

$$P(x) = 10 + 2x + bx(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$$

Cho $x = 2$ ta được $P(2) = 10 + 4 + 2b$, suy ra $b = -5$.

$$P(x) = 10 + 2x - 5x(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$$

Cho $x = 3$ ta được $P(3) = 10 + 6 - 30 + 6a$, suy ra $-14 + 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$.

$$\text{Vậy } P(x) = 10 + 2x - 5x(x-1) + \frac{5}{2}x(x-1)(x-2)$$

$$\text{Rút gọn ta được: } P(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 12x + 10$$

$$\text{7.3. Đặt } x^2 - z = a; y^2 - zx = b, z^2 - xy = c.$$

Chứng minh rằng: $ax + by + cz : a + b + c$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Xét } ax + by + cz = (x^2 - yz)x + (y^2 - zx)y + (z^2 - xy)z$$

$$= x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^3y - 3xy^3 - 3xyz$$

$$= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z)$$

$$= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xyz$$

$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

$$= (x+y+z)(a+b+c)$$

Suy ra $ax + by + cz$ chia hết cho $a + b + c$

$$\text{7.4. Tìm số dư của phép chia biểu thức } (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 2020 \text{ cho đa thức } x^2 + 8x + 12$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Cách 1. Ta có: } f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 2020$$

$$= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 2020$$

$$\text{Đặt } x^2 + 8x + 12 = y \Rightarrow f(y) = (y-5)(y+3) + 2020$$

$$f(y) = y^2 - 2y + 2005 \Rightarrow f(y): y \text{ dư } 2005$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ chia cho } x^2 + 8x + 12 \text{ dư } 2005$$

$$\text{Cách 2. } g(x) = x^2 + 8x + 12$$

$$\text{Ta có: } g(x) = x^2 + 8x + 12 = (x+2)(x+6)$$

Gọi đa thức thương là $q(x)$ đa thức dư là $ax + b$, thì:

$$f(x) = g(x).q(x) + ax + b$$

$$\text{Xét } x = -2, \text{ ta có: } f(-2) = 0 - 2a + b \Rightarrow -2a + b = 2005 \quad (1)$$

$$\text{Xét } x = -6, \text{ ta có: } f(-6) = 0 - 6a + b \Rightarrow -6a + b = 2005 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a = 0 \\ b = 2005 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư là 2005.

7.5. Cho x, y, z đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$A = 3x^n(z - y) + 3y^n(x - z) + 3z^n(y - x)$ chia hết cho $B = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ với n là số nguyên lớn hơn 1.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $B = 3(x - y)(y - z)(z - x)$

Xét $x = y \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A : (x - y)$

Xét $y = z \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A : (y - z)$

Xét $x = z \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A : (z - x) \Rightarrow A : (x - y)(y - z)(z - x)$ mà $A : 3$

$\Rightarrow A : 3(x - y)(y - z)(z - x)$ hay $A : B$.

7.6. Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $B(x) = x^2 - 3x + 4$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia, ta có:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 + ax + b & x^2 - 3x + 4 \\ \hline x^4 - 3x^3 + 4x^2 & x^2 - 4 \\ \hline -4x^2 + ax + b & \\ -4x^2 + 12x - 16 & \\ \hline (a - 12)x + (b + 16) & \end{array}$$

$$\text{Để } A(x) : B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 12 = 0 \\ b + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -16 \end{cases}$$

7.7. Tìm a và b để $f(x) = x^4 - ax^2 + b$ chia hết cho $x^2 + 3x + 2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

Đặt thương là $q(x)$, ta có: $x^4 - ax^2 + b = (x + 1)(x + 2)q(x)$

- Chọn $x = -1$ ta có:

$$(-1)^4 - a(-1)^2 + b = (-1 + 1)(-1 + 2)q(-1) \Rightarrow a + b = -1 \quad (1)$$

- Chọn $x = -2$ ta có:

$$(-2)^4 - a(-2)^2 + b = (-2 + 1)(-2 + 2)q(-2) \Rightarrow b - 4a = -16 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $3a = 15 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 4$

7.8. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 5. Tìm các hệ số a, b, c .

Hướng dẫn giải – đáp số

Cách 1. $P(x)$ chia cho x thì dư 1 $\Rightarrow c=1 \Rightarrow P(x)=ax^2+bx+1$

Theo định lý Bézout: $P(-1)=3; P(1)=5$

$$\Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+1=3 \Rightarrow a-b=2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow a.1^2+b.1+1=5 \Rightarrow a+b=4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $a=3; b=1$

Kết luận vậy $a=3; b=1; c=1$

Cách 2. Viết đa thức $P(x)$ dưới dạng: $P(x)=a(x+1)x+mx+n$

Chọn $x=0$, ta được $P(0)=n \Rightarrow n=1$

Do đó $P(x)=a(x+1)x+mx+1$

Chọn $x=-1$, ta được $P(-1)=-m+1 \Rightarrow -m+1=3 \Rightarrow m=-2$

Do đó $P(x)=a(x+1)x-2x+1$

Chọn $x=1$, ta được $P(1)=2a-1 \Rightarrow 2a-1=5 \Rightarrow a=3$

Kết luận vậy $a=3; b=1; c=1$

7.9. Cho $x^2-4x+1=0$.

Tính giá trị biểu thức $B=x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2025$

Hướng dẫn giải – đáp số

$x^5-3x^4-3x^3+6x^2-20x+2025$	x^2-4x+1
$x^5-4x^4+x^3$	x^3+x^2+5
$x^4-4x^3+6x^2$	
$x^4-4x^3+x^2$	
$x^2-20x+2025$	
$x^2-20x+5$	
2020	

Từ đó ta có $B=(x^2-4x+1)(x^3+x^2+5)+2020$

Với giả thiết $x^2-4x+1=0$ suy ra $B=2020$

7.10. Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$.

Tìm a, b, c biết rằng $P(0)=26; P(1)=3; P(2)=2020$

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $P(0)=26 \Rightarrow c=26$ suy ra $P=ax^2+bx+26$

Ta có: $P(1)=3 \Rightarrow a+b+26=3 \Rightarrow a+b=-23$ (1)

Ta có: $P(2)=2020 \Rightarrow 4a+2b+26=2020 \Rightarrow 4a+2b=1994$

$$\Rightarrow 2a+b=997 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1020; b=-1043$

Vậy $a=1020; b=-1043; c=26$.

7.11. Tìm phần dư trong phép chia sau:

a) $f(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\dots+x+1$ chia cho $g(x)=x-1$;

b) $f(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\dots+x+1$ chia cho $g(x)=x^2-1$;

c) $f(x)=100x^{100}-99x^{99}+98x^{98}+\dots+2x^2-x+1$ chia cho $g(x)=x+1$;

d) $f(x)=x^2+x^9+x^{1945}-3$ chia cho x^2+x+1

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Theo định lý Bézout, $f(x):g(x)$ có phần dư là $f(1)$

$$\Rightarrow r=f(1)=1^{100}+1^{99}+1^{98}+\dots+1+1=101$$

b) Đặt $f(x)$ chia cho $g(x)$ được thương là $q(x)$ và phần dư là $ax+b$. Ta có:

$$f(x)=g(x).q(x)+ax+b=(x-1)(x+1)q(x)+ax+b$$

$$\text{Chọn } x=1 \text{ ta được } f(1)=(1-1)(1+1)q(1)+a.1+b \Rightarrow 101=a+b \text{ (1)}$$

$$\text{Chọn } x=-1 \text{ ta được } f(-1)=(-1-1)(-1+1)q(-1)+a.(-1)+b \Rightarrow 1=-a+b \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta được $b=51$ và $a=50$

Vậy phần dư khi chia $f(x)$ chia cho $g(x)$ là $50x+51$

c) Theo định lý Bézout $f(x)$ chia cho $g(x)$ có phần dư là $f(-1)$ suy ra:

$$\begin{aligned} r=f(-1) &= 100(-1)^{100}-99(-1)^{99}+98(-1)^{98}+\dots+2(-1)^2-(-1)+1 \\ &= 100+99+98+\dots+2+1+1=5051 \end{aligned}$$

$$\text{d) ta có } f(x)=x^2+x+1+x^9-1+x^{1945}-x-3$$

mà x^2+x+1 chia hết cho x^2+x+1 .

x^9-1 chia hết cho x^3-1 và x^3-1 chia hết cho x^2+x+1 .

$\Rightarrow x^9-1$ chia hết cho x^2+x+1 .

$$x^{1945}-x=x(x^{1944}-1)=x\left[(x^3)^{648}-1\right]:x^3-1 \Rightarrow x^{1945}-x:(x^2+x+1)$$

Do đó $f(x)$ chia cho x^2+x+1 có phần dư là -3 .

7.12.

a) Xác định hệ số a, b để $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ chia hết cho $g(x) = x^2 + x + 1$.

b) Tìm đa thức dư trong phép chia $P(x) = x^{161} + x^{37} + x^{13} + x^5 + x + 2020$ cho đa thức $Q(x) = x^2 + 1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Thực hiện phép chia ta có:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + ax + b & x^2 + x + 1 \\ x^3 + x^2 + x & \\ \hline x^2 + (a-1)x + b & \\ x^2 + x + 1 & \\ \hline (a-2)x + (b-1) & \end{array}$$

Để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì $\begin{cases} a-2=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

b) Ta có $P(x) = x^{161} - x + x^{37} - x + x^{13} - x + x^5 - x + 5x + 2020$

Ta có $x^{161} - x = x(x^{160} - 1) : (x^4 - 1)$ mà $x^4 - 1 : (x^2 + 1)$ nên $x^{161} - x : (x^2 + 1)$

$x^{37} - x = x(x^{36} - 1) : (x^4 - 1)$ mà $x^4 - 1 : (x^2 + 1)$ nên $x^{37} - x : (x^2 + 1)$

$x^5 - x = x(x^4 - 1) : (x^4 - 1)$ mà $x^4 - 1 : (x^2 + 1)$ nên $x^5 - x : (x^2 + 1)$

Suy ra $x^{161} - x + x^{37} - x + x^{13} - x + x^5 - x : (x^2 + 1)$

Suy ra $P(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư $5x + 2020$.

7.13. Tìm phần dư của đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $g(x) = x^2 - 2x - 3$ biết rằng $f(x)$ chia cho $(x+1)$ và $(x-3)$ có số dư lần lượt là -45 và -165 .

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt đa thức thương là $q(x)$ và phần dư là $ax + b$. Suy ra

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + ax + b \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3)q(x) + ax + b$$

Theo định lý Bézout ta có: $f(-1) = 45$; $f(3) = -165$

Ta có: $f(-1) = (-1-1)(-1-3)q(-1) + a(-1) + b = -a + b \Rightarrow -a + b = 45$ (1)

Ta có: $f(3) = (3-1)(3-3)q(3) + a \cdot 3 + b = 3a + b \Rightarrow 3a + b = -165$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $4a = -120 \Rightarrow a = -30$

Thay vào (2) ta có: $3(-30) + b = -165 \Rightarrow b = -75$

Vậy phần dư $f(x) : g(x)$ là $-30x - 75$.

7.14. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $C = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ chia hết cho giá trị của đa thức $D = x^2 + x + 1$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia ta có:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 3x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \hline x^3 + x^2 + x & x - 4 \\ \hline -4x^2 - 4x - 1 & \\ -4x^2 - 4x - 4 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Muốn cho giá trị của C chia hết cho giá trị của D thì ta phải có $x^2 + x + 1 \in \mathcal{O}(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

$x^2 + x + 1$	1	- 1	3	- 3
x	0; - 1	$\emptyset$	1; - 2	$\emptyset$

Vậy với $x \in \{0; -1; -2\}$ thì giá trị của biểu thức C chia hết cho giá trị biểu thức D.

7.15. Xác định a, b sao cho $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x + b$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia ta có:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 & x^2 - x + b \\ \hline 6x^4 - 6x^3 + 6bx^2 & x^2 - x + (a - 6b - 1) \\ \hline -x^3 + (a - 6b)x^2 + 3x + 2 & \\ -x^3 + x^2 - bx & \\ \hline (a - 6b - 1)x^2 + (3 + b)x + 2 & \\ (a - 6b - 1)x^2 - (a - 6b - 1)x + b(a - 6b - 1) & \\ \hline (a - 5b + 2)x + (2 - ab + 6b^2 + b) & \end{array}$$

Để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì

$$\begin{cases} a - 5b + 2 = 0 \\ 2 - ab + 6b^2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b - 2 \quad (1) \\ 2 - (5b - 2)b + 6b^2 + b = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải (2) ta có: $2 - (5b - 2)b + 6b^2 + b = 0$

$$\Leftrightarrow b^2 + 3b + 2 = 0 \Leftrightarrow b^2 + b + 2b + 2 = 0 \Leftrightarrow (b + 1)(b + 2) = 0$$

- Trường hợp 1. Với $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 5(-1) - 2 = -7$

- Trường hợp 2. Với $b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = 5(-2) - 2 = -12$

Vậy với $(a;b) \in \{(-7;-1), (-12;-2)\}$ thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$

7.16. Cho đa thức $f(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 - x + 2$ và đa thức $g(x) = x^2 + 1$. Tìm $\blacksquare$ để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - x^3 - x^2 - x + 2 = 2x^4 + 2x^2 - x^3 - x - 2x^2 + 2 \\ &= 2x^2(x^2 + 1) - x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) + 5 = (x^2 + 1)(2x^2 - x - 3) + 5 \end{aligned}$$

$$f(x):g(x) \Leftrightarrow 5:x^2+1 \Leftrightarrow x^2+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Leftrightarrow x^2 \in \{0; 4\} \Leftrightarrow x \in \{0; -2; 2\}$$

7.17. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x - 2$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7 và $f(x)$ chia cho $x^2 - 5x - 6$ thì được thương là $1 - x^2$ và còn dư.

Hướng dẫn giải – đáp số

$f(x)$ chia cho $x^2 - 5x - 6$ được thương là $1 - x^2$ và còn dư $\Rightarrow f(x)$ có bậc 4.

Đặt $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Theo định lý Bézout: $f(x)$ chia cho $x - 2$ thì dư 2 $\Rightarrow f(2) = 2$

$$\Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + e = 2$$

$$f(x) \text{ chia cho } x - 3 \text{ thì dư } 7 \Rightarrow f(3) = 7 \Rightarrow 81a + 27b + 9c + 3d + e = 7$$

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 5x - 6$ được thương là $1 - x^2$ và còn dư $q(x)$

$$\Rightarrow q(x) = mx + n \Rightarrow f(x) = (1 - x^2)(x^2 - 5x + 6) + q(x)$$

$$f(x) = -x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 6 + q(x) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d + e = -2 \\ 3d + e = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 2$$

Ngoài ra chúng ta có thể giải bằng phương pháp nội suy Newton.

7.18. Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - a - 1$. Xác định a, b để $f(x):x - 2$ và $f(x):x - 1$

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo định lý Bézout: $f(x):x - 2 \Rightarrow f(2) = 0, f(x):x - 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b - a - 1 = 0 \\ 1 + a + b - a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{7}{3} \\ b = 0 \end{cases}$$

7.19. Tìm thương và dư của phép chia $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5$ cho $x + 2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có sơ đồ Horner

f	2	0	- 3	4	- 5
$\alpha = - 2$	2	- 4	5	- 6	7

Vậy thương là $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ và số dư là 7.

Nhận xét. Ngoài ra chúng ta còn có thể giải bằng cách chia thông thường (đặt phép chia).

7.20. Tìm các số a, b, c biết rằng đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ chia hết cho $(x - 1)^3$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt phép chia, ta có:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \\
 x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x \\
 \hline
 (a+3)x^3 + (b-3)x^2 + (c+1)x + 1 \\
 (a+3)x^3 - 3(a+3)x^2 + 3(a+3)x - (a+3) \\
 \hline
 (b+3a+6)x^2 + (c-3a-8)x + (a+4)
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
 \hline
 x + (a+3)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{Để phép chia hết thì: } \begin{cases} b+3a+6=0 \\ c-3a-8=0 \\ a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ c=-4 \end{cases}$$

Nhận xét. Ngoài ra, quan sát hệ số cao nhất và hệ số tự do của đa thức bị chia và đa thức chia. Để phép chia hết thì đa thức thương phải là $x - 1$. Do vậy ta có:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x - 1)$$

$$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

Đồng nhất thức hai vế ta được: $a = -4; b = 6; c = -4$.

7.21. Xác định các hệ số a và b để đa thức $A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có A là bình phương của một đa thức thì:

$$A = (x^2 + cx + d)^2 = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2$$

$$\text{Mà } A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 2c = -2 \\ c^2 + 2d = 3 \\ 2cd = a \\ d^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2; b = 1$$

$$\text{Vậy } A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$