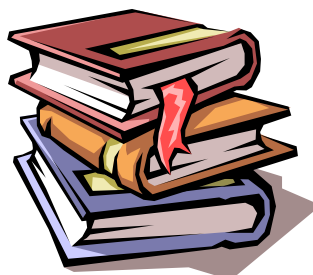


Tailieumontoan.com



Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



TUYỂN CHỌN
CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN 9



Tài liệu sưu tầm, ngày 31 tháng 5 năm 2021

Mục Lục

Trang

Lời nói đầu

Chủ đề 1. Căn bậc hai, căn bậc 3

Chủ đề 2. Hàm số bậc nhất

Chủ đề 3. Hệ phương trình bậc nhất

Chủ đề 4. Phương trình bậc hai

Chủ đề 5. Hệ thức lượng giác

Chủ đề 6. Đường Tròn

Chủ đề 7. Góc đường tròn

Chủ đề 8. Hình học không gian

d) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$

e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$

f) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

$$ĐS: a) x > 2 \quad b) x \geq 2 \quad c) x > 2 \quad d) x < \frac{3}{2} \quad e) x > -\frac{3}{2} \quad f) x < -1$$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{x^2+1}$

b) $\sqrt{4x^2+3}$

c) $\sqrt{9x^2-6x+1}$

d) $\sqrt{-x^2+2x-1}$

e) $\sqrt{-|x+5|}$

f) $\sqrt{-2x^2-1}$

$$ĐS: a) x \in \mathbb{R} \quad b) x \in \mathbb{R} \quad c) x \in \mathbb{R} \quad d) x = 1 \quad e) x = -5 \quad f) \text{ không có}$$

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{4-x^2}$

b) $\sqrt{x^2-16}$

c) $\sqrt{x^2-3}$

d) $\sqrt{x^2-2x-3}$

e) $\sqrt{x(x+2)}$

f) $\sqrt{x^2-5x+6}$

$$ĐS: a) |x| \leq 2 \quad b) |x| \geq 4 \quad c) |x| \geq \sqrt{3} \quad d) x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 3 \quad e) x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 0 \\ f) x \leq 2 \text{ hoặc } x \geq 3$$

Bài 5. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{|x|-1}$

b) $\sqrt{|x-1|-3}$

c) $\sqrt{4-|x|}$

d) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{9-12x+4x^2}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}$

$$ĐS: a) |x| \geq 1 \quad b) x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 4 \quad c) |x| \leq 4 \quad d) x \geq 1 \quad e) x \neq \frac{3}{2} \quad f) x \geq 1$$

Dạng 2: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

$$\text{Áp dụng: } \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$

b) $\sqrt{(-2)^6}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

e) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)^2}$

f) $\sqrt{(0,1-\sqrt{0,1})^2}$

$$ĐS: a) -0,1 \quad b) 8 \quad c) 2-\sqrt{3} \quad d) 3-2\sqrt{2} \quad e) \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2} \quad f) \sqrt{0,1}-0,1$$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$

f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

ĐS: a) 6 b) $-4\sqrt{6}$ c) 1 d) 4 e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{2}-4$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$

ĐS: a) $2\sqrt{2}$ b) $-2\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{5}-4$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$

b) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

d) $\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}} + \sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$

e) $\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}} + \sqrt{1-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}}$

ĐS:

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a)

ĐS:

Dạng 3: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Áp dụng: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

Chú ý: Xét các trường hợp $A \geq 0$, $A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $x+3+\sqrt{x^2-6x+9}$ ($x \leq 3$)

b) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2}$ ($-2 \leq x \leq 0$)

c) $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ ($x > 1$)

d) $|x-2| + \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ ($x < 2$)

ĐS: a) 6 b) 2 c) 1 d) $1-x$

Bài 2. * Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{1-4a+4a^2}-2a$

b) $x-2y-\sqrt{x^2-4xy+4y^2}$

c) $x^2+\sqrt{x^4-8x^2+16}$

d) $2x-1-\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

e) $\frac{\sqrt{x^4-4x^2+4}}{x^2-2}$

f) $\sqrt{(x-4)^2}+\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+16}}$

ĐS:

Bài 3. Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}$.a) Với giá trị nào của x thì A có nghĩa?b) Tính A nếu $x \geq \sqrt{2}$.ĐS: a) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$ b) $A = 2$ **Bài 4.** Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện: $xy + yz + zx = 1$. Tính:

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

ĐS: $A = 2$. Chú ý: $1+y^2 = (xy+yz+zx)+y^2 = (x+y)(y+z)$,

$$1+z^2 = (y+z)(z+x), 1+x^2 = (z+x)(x+y)$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a)

ĐS:

Dạng 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNHÁp dụng: $\sqrt{A^2} = |A|$;

$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$;

$$\bullet \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\bullet |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$$

$$\bullet |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$$

$$\bullet |A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B$$

$$\bullet |A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$

b) $\sqrt{4x^2-20x+25}+2x=5$

c) $\sqrt{1-12x+36x^2}=5$

d) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$

e) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-1$

f) $\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}-x$

ĐS: a) $x \leq 3$ b) $x \leq \frac{5}{2}$ c) $x = 1; x = -\frac{2}{3}$ d) $x = 2$ e) $x \geq 2$ f) $x \leq \frac{1}{4}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$ b) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x}$ c) $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$
 d) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$ e) $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3}$ f) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3x-5}$

ĐS: a) $x = -\frac{4}{3}$ b) $x = \pm\sqrt{3}$ c) $x = 2$ d) vô nghiệm e) $x = 3$ f) vô nghiệm

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+x} = x$ b) $\sqrt{1-x^2} = x-1$ c) $\sqrt{x^2-4x+3} = x-2$
 d) $\sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0$ e) $\sqrt{x^2-4} - x + 2 = 0$ f) $\sqrt{1-2x^2} = x-1$

ĐS: a) $x = 0$ b) $x = 1$ c) vô nghiệm d) $x = \pm 1; x = \pm\sqrt{2}$ e) $x = 2$ f) vô nghiệm

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-1$ b) $\sqrt{4x^2-4x+1} = x-1$ c) $\sqrt{x^4-2x^2+1} = x-1$
 d) $\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = x$ e) $\sqrt{x^4-8x^2+16} = 2-x$ f) $\sqrt{9x^2+6x+1} = \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

ĐS: a) $x = 1; x = -2$ b) vô nghiệm c) $x = 1$ d) vô nghiệm e) $x = 2; x = -3; x = -1$

f) $x = \frac{2-\sqrt{2}}{3}; x = \frac{\sqrt{2}-4}{3}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $|3x+1| = |x+1|$ b) $|x^2-3| = |x-\sqrt{3}|$ c) $\sqrt{9x^2-12x+4} = \sqrt{x^2}$
 d) $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{4x^2-12x+9}$

ĐS: a) $x = 0; x = -\frac{1}{2}$ b) $x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}+1; x = -\sqrt{3}-1$ c) $x = 1; x = \frac{1}{2}$ d) $x = 1; x = \frac{5}{3}$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $|x^2-1| + |x+1| = 0$ b) $\sqrt{x^2-8x+16} + |x+2| = 0$ c) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} = 0$
 d) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$

ĐS: a) $x = -1$ b) vô nghiệm c) $x = -1$ d) $x = -2$

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) b)

ĐS:

II. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP KHAI PHƯƠNG VÀ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA

• Khai phương một tích: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

Nhân các căn bậc hai: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

• Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

Chia hai căn bậc hai: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

Dạng 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$ b) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75})$ c) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

d) $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$ f) $(\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{7}} - \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{7}})^2$

ĐS: a) $-13\sqrt{3}$ b) 36 c) $11 - 4\sqrt{6}$ d) $2 + 2\sqrt{3}$ e) 10 f) $2\sqrt{7} - 4$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ b) $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

c) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$ d) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

e) $\sqrt{13 - \sqrt{160}} - \sqrt{53 + 4\sqrt{90}}$ f) $\sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}$

ĐS: Chú ý: $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} - 3$ c) -2 d) 2 e) $-4\sqrt{5}$ f) $\sqrt{3} - 1$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$ b) $\sqrt{15 - \sqrt{216}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$ c) $\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$

d) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ e) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ f) $(\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} - 1)^3$

ĐS: a) $4\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$ c) 0 d) 2 e) $\sqrt{10}$ f) 14

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{8}{1-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$ c) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

d) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ f) $\frac{(\sqrt{5}+2)^2 - 8\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$

ĐS: a) -2 b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) 4 d) 1

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt{12-3\sqrt{7}} - \sqrt{12+3\sqrt{7}}$

b) $B = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

c) $C = \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$

ĐS: Chứng tỏ $A < 0, B > 0, C > 0$. Tính $A^2, B^2, C^2 \Rightarrow A = -\sqrt{6}; B = \sqrt{5}+1, C = \sqrt{10}$

Dạng 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC**Bài 1.** Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$

b) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$

c) $\frac{2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+\sqrt{6}-3}{2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

e) $\frac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}$

f) $\frac{\sqrt{a}+a\sqrt{b}-\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{ab-1}$

ĐS: a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ d) $1+\sqrt{2}$. Tách $\sqrt{16} = \sqrt{4} + \sqrt{4}$

e) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ f) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-1}$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

b) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} \quad (x \geq 0)$

c) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}} \quad (x \neq 1, y \neq 1, y > 0)$

ĐS: a) $\sqrt{xy}$ b) $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$ c) $\frac{1}{1-x}$ nếu $0 < y < 1$ và $\frac{1}{x-1}$ nếu $y > 1$

Bài 3. Rút gọn và tính:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$ với $a = 7,25; b = 3,25$ b) $\sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16}$ với $a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $\sqrt{10a^2 - 4a\sqrt{10} + 4}$ với $a = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ d) $\sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$ với $a = \sqrt{5}$

ĐS: a) $\sqrt{\frac{a-1}{b-1}}; \frac{5}{3}$ b) 4 c) 5 d) 2

Bài 4.

a)

ĐS:

Dạng 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$ b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ c) $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x+3}$

d) $\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5}$ e) $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

ĐS: a) $x = \frac{1}{2}$ b) vô nghiệm c) $x = -\frac{3}{2}; x = \frac{7}{2}$ d) $x = 6$ e) $x = 9$

Bài 2.

a)

ĐS:

Dạng 4: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**Bài 1.** So sánh các số:

a) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ và 1 b) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ c) $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ và $\sqrt{2006}$

ĐS:

Bài 2. Cho các số không âm a, b, c . Chứng minh:

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ b) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ c) $a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

d) $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ e) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

ĐS:

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ b) $B = \sqrt{6-x} + \sqrt{x+2}$ c) $C = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$

ĐS: a) $A = 2 \Leftrightarrow x = 3$

b) $B = 4 \Leftrightarrow x = 2$

c) $C = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 4.

a)

ĐS:

III. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

- Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$
- Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$
- Với $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ + Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$
- Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$
- Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$

Dạng 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$

b) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$

c) $2\sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{\frac{48}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{75}{16}}$

d) $3\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{25}{18}}$

e) $\left(1 + \frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right)\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + 1\right)$

f) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

ĐS: a) $-5\sqrt{5}$

b) 22

c) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

d) $-\frac{5\sqrt{2}}{12}$

e) -4

f) $2\sqrt{3}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{\sqrt{7} - 5}{2} - \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} + \frac{6}{\sqrt{7} - 2} - \frac{5}{4 + \sqrt{7}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{6} - 2} + \frac{2}{\sqrt{6} + 2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$

d) $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}\right) : \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$

f) $\frac{2\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

ĐS: a) $\frac{32\sqrt{7}-20}{9}$ b) $\frac{17\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ d) -3 e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) 1

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a)

ĐS:

Dạng 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài 1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức:

a) $A = \frac{x-11}{\sqrt{x-2}-3}, x = 23-12\sqrt{3}$

b) $B = \frac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \frac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \frac{a^2+2}{1-a^3}, a = \sqrt{2}$

c) $C = \frac{a^4-4a^2+3}{a^4-12a^2+27}, a = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

d) $D = \frac{1}{\sqrt{h+2\sqrt{h-1}}} + \frac{1}{\sqrt{h-2\sqrt{h-1}}}, h = 3$

e) $E = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}, x = 2(\sqrt{3}+1)$

f) $F = \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right), a = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

ĐS: a) $A = \sqrt{x-2} + 3 = 2\sqrt{3}$

b) $B = \frac{-1}{1+a+a^2} = \frac{\sqrt{2}-3}{7}$

c) $C = \frac{a^2-1}{a^2-9} = 5-2\sqrt{6}$

d) $D = \frac{2\sqrt{h-1}}{h-2} = 2\sqrt{2}$

e) $E = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

f) $F = \sqrt{1-a} = \sqrt{3}-1$

Bài 2.

a)

ĐS:

Dạng 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17$

c) $\sqrt{9x^2+18} + 2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{25x^2+50} + 3 = 0$

d) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

e) $(x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$

f)

ĐS: a) $x = 2$

b) 290

c) vô nghiệm

d) $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$

e) $x = 2; x = -7$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a)

ĐS:

Dạng 4: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho biểu thức: $S_n = (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$ (với n nguyên dương).

a) Tính $S_2; S_3$.

b) Chứng minh rằng: Với mọi m, n nguyên dương và $m > n$, ta có: $S_{m+n} = S_m \cdot S_n - S_{m-n}$

c) Tính S_4 .

ĐS: a) $S_2 = 6; S_3 = 10\sqrt{2}$ b) Chứng minh $S_{m+n} + S_{m-n} = S_m S_n$ c) $S_4 = 34$

Bài 2. Cho biểu thức: $S_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^n + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$ (với n nguyên dương).

a) Chứng minh rằng: $S_{2n} = S_n^2 - 2$ b) Tính S_2, S_4 .

HD: a) Sử dụng hằng đẳng thức $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ b) $S_1 = 2\sqrt{3}; S_2 = 10; S_4 = 98$

Bài 3. Cho biểu thức: $S_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$ (với n nguyên dương).

a) Chứng minh rằng: $S_{3n} + 3S_n = S_n^3$ b) Tính S_3, S_9 .

HD: a) Sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$. Chứng minh $S_{3n} = S_n^3 - 3S_n$.

b) $S_1 = 4; S_3 = 61; S_9 = 226798$.

Bài 4.

a)

HD:

IV. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép biến đổi đơn giản như: đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, khử căn ở mẫu và trục căn thức ở mẫu để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn.

Bài 1. Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$.

a) Tìm x để biểu thức A có nghĩa. b) Rút gọn biểu thức A . c) Tìm x để $A = 2$.

ĐS: a) $x \geq 0, x \neq 4$ b) $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ c) $x = 16$

Bài 2. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$.

a) Rút gọn A nếu $x \geq 0, x \neq 1$. b) Tìm x để A dương c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

ĐS: a) $A = \sqrt{x} - x$ b) $0 < x < 1$ c) $\max A = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

Bài 3. Cho biểu thức:

$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}.$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A < 1$.

ĐS: a) $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

b) $0 < x < 9; x \neq 4$.

Bài 4. Cho biểu thức:

$$A = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left[\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right].$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A = 7$

c) Tìm a để $A > 6$.

ĐS: a) $A = \frac{2a+2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}}$

b) $a = 4; a = \frac{1}{4}$

c) $a > 0, a \neq 1$.

Bài 5. Cho biểu thức:

$$A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}.$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A = \frac{1}{2}$.

ĐS: a) $A = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

b) $x = \frac{1}{121}$.

Bài 6. Cho biểu thức:

$$A = \left[1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right].$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A < 0$.

ĐS: a) $A = \frac{\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}}$

b) $0 \leq x < 4$.

Bài 7. Cho biểu thức:

$$A = \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1.$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A = 2$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

ĐS: a) $A = a - \sqrt{a}$

b) $a = 4$

c) $\min A = -\frac{1}{4}$ khi $a = \frac{1}{4}$.

Bài 8. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right).$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A < 0$.

c) Tìm a để $A = -2$.

ĐS: a) $A = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$

b) $a > 1$

c) $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Bài 9. Cho biểu thức:

$$A = 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}.$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$.c) Chứng minh rằng $A > \frac{2}{3}$.

ĐS:

Bài 10. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x - 5\sqrt{x}}{x - 25} - 1 \right) : \left(\frac{25 - x}{x + 2\sqrt{x} - 15} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3} \right).$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A < 1$.

$$\text{ĐS: a) } A = \frac{5}{3 + \sqrt{x}}$$

b) $x > 4; x \neq 9; x \neq 25$.**Bài 11.** Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 1} \right).$$

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A > \frac{1}{6}$.

$$\text{ĐS: a) } A = \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}}$$

b) $a > 16$.**Bài 12.** Cho biểu thức:

$$A = \left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right] : \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right].$$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$.c) Tìm x để $A = \sqrt{5}$.

$$\text{ĐS: a) } \frac{4x}{1 - x^2}$$

b) $x = -2$ c) $x = \frac{1}{\sqrt{5}}; x = -\sqrt{5}$.**Bài 13.** Cho biểu thức:

$$B = \left[\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] : \left[\frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x + y}{\sqrt{xy}} \right].$$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B khi $x = 3, y = 4 + 2\sqrt{3}$.

$$\text{ĐS: a) } B = \sqrt{y} - \sqrt{x}$$

b) $B = 1$.**Bài 14.** Cho biểu thức:

$$B = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy} - 2y} - \frac{2x}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}.$$

a) Rút gọn B.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để $y = 625$ và $B < 0,2$.

$$\text{ĐS: a) } B = \frac{x}{\sqrt{y}} \quad \text{b) } x \in \{2; 3; 4\}.$$

Bài 15. Cho biểu thức:

$$B = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}.$$

a) Rút gọn B.

b) Cho $x \cdot y = 16$. Xác định x, y để B có giá trị nhỏ nhất.

ĐS:

Bài 16. Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \right) \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \right) : \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$

a) Rút gọn B.

b) Tính B khi $a = 16, b = 4$.

ĐS:

Bài 17. Cho biểu thức: $B = \left(\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y - x} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$

a) Rút gọn B.

b) Chứng minh $B \geq 0$.

ĐS:

Bài 18. Cho biểu thức: $B = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} - \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} + 1 \right).$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B nếu $a = 2 - \sqrt{3}$ và $b = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}.$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của B nếu $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$.

ĐS:

Bài 19. Cho biểu thức:

a)

ĐS:

V. CĂN BẬC BA

• Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

• Mọi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

• $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$ • $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ • Với $B \neq 0$ ta có: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$

Dạng 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Áp dụng: $\sqrt[3]{a^3} = a$; $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

và các hằng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$ b) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$ c) $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

d) $(\sqrt[3]{4}+1)^3 - (\sqrt[3]{4}-1)^3$ e) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$

ĐS: a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{3}-1$ c) -3 d) $12\sqrt[3]{2}+2$ e) 5 .

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ b) $B = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

c) $C = (2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ d) $D = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$

ĐS: a) $A=1$. Chú ý: $2 \pm \sqrt{5} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$ b) $B=3$. Chú ý: $9 \pm 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$

c) $C=1$. Chú ý: $26+15\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^3$

d) $D=1$. Đặt $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$, $b = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \Rightarrow a^3 - b^3 = 6, ab = \frac{5}{3}$. Tính D^3 .

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a)

ĐS:

Dạng 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh rằng, nếu: $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

HD: Đặt $ax^3 = by^3 = cz^3 = t \Rightarrow a = \frac{t}{x^3}, b = \frac{t}{y^3}, c = \frac{t}{z^3}$. Chứng tỏ $VT = VP = \sqrt[3]{t}$.

Bài 2. Chứng minh đẳng thức:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \left[(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2 \right]$$

HD: Khai triển vế phải và rút gọn ta được vế trái.

Bài 3.

a)

Dạng 3: SO SÁNH HAI SỐ

Áp dụng: $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$

Bài 1. So sánh:

a) $A = 2\sqrt[3]{3}$ và $B = \sqrt[3]{23}$ b) $A = 33$ và $B = 3\sqrt[3]{133}$ c) $A = 5\sqrt[3]{6}$ và $B = 6\sqrt[3]{5}$

ĐS: a) $A > B$ b) $A > B$ c) $A < B$

Bài 2. So sánh:

a) $A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ và $B = 2\sqrt{5}$

ĐS: a) $A < B$. Chú ý: $20 \pm 14\sqrt{2} = (2 \pm \sqrt{2})^3$.

Bài 3.

a)

Dạng 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Áp dụng: $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 3$ b) $\sqrt[3]{2-3x} = -2$ c) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$

d) $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$ e) $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$

ĐS: a) $x = 13$ b) $x = \frac{10}{3}$ c) $x = 0; x = 1; x = 2$ d) $x = -1$ e) $x = -5; x = -4; x = -6$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ b) $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$ c) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$

ĐS: Sử dụng phương pháp đặt 2 ẩn phụ, đưa về hệ phương trình.

a) $x = 3$ b) $x = -14; x = 5$ c) $x = 7$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a)

ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$ b) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$ c) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

d) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$

ĐS: a) $15\sqrt{2} - \sqrt{5}$ b) 21 c) 11 d) $54\sqrt{2}$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$

ĐS: a) $-\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$ b) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

c) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$ d) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} = 6$

ĐS: Biến đổi VT thành VP.

Bài 4. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi):

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{2003} + \sqrt{2005}$ và $2\sqrt{2004}$ c) $\sqrt{5\sqrt{3}}$ và $\sqrt{3\sqrt{5}}$

ĐS: a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$ b) $\sqrt{2003} + \sqrt{2005} < 2\sqrt{2004}$ c) $\sqrt{5\sqrt{3}} > \sqrt{3\sqrt{5}}$

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \frac{2x}{x+3} - \frac{x+1}{3-x} - \frac{3-11x}{x^2-9}$ với $x \neq \pm 3$.

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm x để $A < 2$. c) Tìm x nguyên để A nguyên.

$$ĐS: a) A = \frac{3x}{x-3}$$

$$b) -6 < x < 3; x \neq -3$$

$$c) x \in \{-6; 0; 2; 4; 6; 12\}.$$

Bài 6. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x}.$$

a) Tìm điều kiện để biểu thức A có nghĩa.

b) Rút gọn A.

c) Tìm x nguyên để A nhận giá trị nguyên.

$$ĐS: a) x \neq 0; x \neq \pm 1$$

$$b) A = \frac{x+2003}{x}$$

$$c) x \in \{-2003; 2003\}.$$

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$ĐS: \max A = \frac{4}{3} \text{ khi } x = \frac{1}{4}.$$

Bài 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{1-6x+9x^2} + \sqrt{9x^2-12x+4}$$

$$ĐS: \text{Sử dụng tính chất } |a|+|b| \geq |a+b|, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow ab \geq 0. \min A = 1 \text{ khi } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

Bài 9. Tìm x nguyên để biểu thức sau nhận giá trị nguyên:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$ĐS: x \in \{49; 25; 1; 16; 4\}. \text{ Chú ý: } A = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}. \text{ Để } A \in \mathbb{Z} \text{ thì } \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \text{ và } \sqrt{x}-3 \text{ là ước của 4.}$$

Bài 10. Cho biểu thức:
$$Q = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

a) Rút gọn Q.

b) Tìm số nguyên x để Q có giá trị nguyên.

$$ĐS: a) Q = \frac{2}{x-1}$$

$$b) x \in \{2; 3\}.$$

Bài 11. Cho biểu thức
$$M = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} \text{ với } a > 0, a \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) So sánh giá trị của M với 1.

$$ĐS: a) M = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}} \quad b) M < 1.$$

Bài 12. Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x} \right).$$

- a) Tìm điều kiện để P có nghĩa. b) Rút gọn biểu thức P.
c) Tính giá trị của P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

$$ĐS: a) x \geq 1; x \neq 2; x \neq 3 \quad b) P = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad c) P = \sqrt{2} + 1.$$

Bài 13. Cho biểu thức: $B = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

- a) Rút gọn B. b) Tìm x để B = 3.

$$ĐS: a) B = \sqrt{x} - 1 \quad b) x = 16.$$

Bài 14. Cho biểu thức: $A = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

với $x > 0, y > 0$.

- a) Rút gọn A.
b) Biết $xy = 16$. Tìm các giá trị của x, y để A có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

$$ĐS: a) \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \quad b) \min A = 1 \Leftrightarrow x = y = 4.$$

Bài 15. Cho biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-x}$.

- a) Rút gọn P. b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$ĐS: a) P = \frac{x+1}{1-x} \quad b) P = -3 - 2\sqrt{2}.$$

Bài 16. Cho biểu thức:

a)

ĐS:

CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

1. Khái niệm hàm số

• Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì y đgl **hàm số** của x , x đgl **biến số**.

Ta viết: $y = f(x)$, $y = g(x)$, ...

- Giá trị của $f(x)$ tại x_0 kí hiệu là $f(x_0)$.
- Tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các giá trị của x sao cho $f(x)$ có nghĩa.
- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y đgl **hàm hằng**.

2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy sao cho x, y thoả mãn hệ thức $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập R .

- a) $y = f(x)$ **đồng biến** trên $R \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in R : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
- b) $y = f(x)$ **nghịch biến** trên $R \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in R : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

Bài 1. Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3 - x$.

- a) Tính $f(-3)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$. b) Xác định a để $2f(a) = g(a)$.

ĐS: b) $a = 1; a = -\frac{3}{2}$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$.

- a) Tìm tập xác định của hàm số. b) Tính $f(4 - 2\sqrt{3})$ và $f(a^2)$ với $a < -1$.
- c) Tìm x nguyên để $f(x)$ là số nguyên. d) Tìm x sao cho $f(x) = f(x^2)$.

ĐS: a) $x \geq 0, x \neq 1$ b) $f(4 - 2\sqrt{3}) = -(3 + 2\sqrt{3})$, $f(a^2) = \frac{a-1}{a+1}$ c) $x \in \{0; 4; 9\}$ d) $x = 0$

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$.

a) Tìm tập xác định D của hàm số.

b) Chứng minh rằng $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

ĐS: b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

b) $y = \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$

c) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$

d) $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{|x|-2}$

e) $y = \sqrt{x-5} - \sqrt{x+3}$

f) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

ĐS: a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \neq -1; x \neq 3$ c) $x \in \mathbb{R}$ d) $x \geq 1; x \neq 2$ e) $x \geq 5$ f) $|x| \leq 2$

Bài 5. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.

HD: Xét $f(x_1) - f(x_2)$.

Bài 6. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^3$ luôn luôn đồng biến.

HD: Xét $f(x_1) - f(x_2)$.

Bài 7. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ nghịch biến trong từng khoảng xác định của nó.

HD: Xét $f(x_1) - f(x_2)$.

Bài 8. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{2-x}$ nghịch biến trong khoảng xác định của nó.

HD: $y = f(x) = \sqrt{2-x} + 1$. Xét $f(x_1) - f(x_2)$.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = -x^3 + x^2 - x + 6$ trên đoạn $[0; 2]$.

HD: Chứng tỏ hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(0)$.

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ trong đoạn $[-3; -2]$.

HD: Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó

$$\Rightarrow f(-3) \leq f(x) \leq f(-2)$$

Bài 11. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = -\frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Có nhận xét gì về hai đồ thị này.

Bài 12. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$.

a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến.

b) Trong các điểm $A(4; 2)$, $B(2; 1)$, $C(9; 3)$, $D(8; 2\sqrt{2})$, điểm nào thuộc và điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số.

ĐS:

Bài 13.

a)

ĐS:

II. HÀM SỐ BẬC NHẤT**1. Khái niệm hàm số bậc nhất**

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ với $a \neq 0$.

2. Tính chất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ và có tính chất sau:

a) Đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 0$ b) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a < 0$.**3. Đồ thị**

• Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng:

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b .

– Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

• Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$):

– Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $A(1; a)$.

– Nếu $b \neq 0$ thì đồ thị $y = ax + b$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(0; b)$, $B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$ ($aa' \neq 0$):

• $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ • $(d) \equiv (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ • $(d) \text{ cắt } (d') \Leftrightarrow a \neq a'$

• $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

• Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a .

• Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) với tia Ox :

+ $a < 90^\circ$ thì $a > 0$

+ $a > 90^\circ$ thì $a < 0$.

• Các đường thẳng có cùng hệ số góc thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

Bài 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Với các hàm số bậc nhất, hãy cho biết hàm số đó đồng biến hay nghịch biến?

a) $y = 5 - 2x$

b) $y = x\sqrt{2} - 1$

c) $y = 2(x + 1) - 2x$

d) $y = 3(x - 1) - x$

e) $y = -\frac{2}{3}x$

f) $y = x + \frac{1}{x}$

ĐS:

Bài 2. Cho hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 2$.

a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

b) Tính các giá trị tương ứng của y khi x nhận các giá trị sau: $0; 1; 3 + \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2}$.

c) Tính các giá trị tương ứng của x khi y nhận các giá trị sau: $0; 1; 5 + \sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}$.

ĐS:

Bài 3. Cho các hàm số $y = x$ (d_1), $y = 2x$ (d_2), $y = -x + 3$ (d_3).

a) Vẽ trên cùng một hệ trục các đồ thị (d_1), (d_2), (d_3).

b) Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1), (d_2) lần lượt tại A và B. Tính tọa độ các điểm A, B và diện tích tam giác OAB.

ĐS: b) $A\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right), B(1; 2), S_{OAB} = 0,75$.

Bài 4. Cho hàm số $y = (a - 1)x + a$.

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(-1; 1)$ với mọi giá trị của a .

b) Xác định a để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Vẽ đồ thị hàm số trong trường hợp này.

c) Xác định a để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đó.

ĐS: b) $a = 3$ c) $a = 2$.

Bài 5. Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = |x|$

b) $y = |2x - 1|$

c) $y = |x - 2| - 1$

Bài 6. Cho hàm số $y = |x - 1| + 2|x|$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $|x - 1| + 2|x| = m$.

ĐS: b) $m < 1$: vô nghiệm; $m = 1$: 1 nghiệm; $m > 1$: 2 nghiệm.

Bài 7. Tìm các cặp đường thẳng song song và các cặp đường thẳng cắt nhau trong số các đường thẳng sau:

a) $y = \sqrt{3}x - 1$

b) $y = 2 - x$

c) $y = -0,3x$

d) $y = -0,3x - 1$

e) $y = 3 + \sqrt{3}x$

f) $y = -x + 3$

ĐS: $a // e; c // d; b // f$.**Bài 8.** Cho hàm số $y = mx - 3$. Xác định m trong mỗi trường hợp sau:a) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -3x$.b) Khi $x = 1 + \sqrt{3}$ thì $y = \sqrt{3}$.

ĐS: a) $m = -3$

b) $m = \sqrt{3}$.

Bài 9. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

ĐS: $y = \frac{5}{3}x + 5$.

Bài 10. Cho đường thẳng $y = (a + 1)x + a$.a) Xác định a để đường thẳng đi qua gốc tọa độ.b) Xác định a để đường thẳng song song với đường thẳng $y = (\sqrt{3} + 1)x + 4$.

ĐS: a) $a = 0$

b) $a = \sqrt{3}$.

Bài 11. Xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và:a) Đi qua điểm $A(2; 4)$.b) Có hệ số góc $a = -\sqrt{2}$.c) Song song với đường thẳng $y = 5x - 1$.

ĐS: a) $y = 2x$

b) $y = -\sqrt{2}x$

c) $y = 5x$.

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ và:a) đi qua điểm $A(-3; 1)$.

b) có hệ số góc bằng -2.

c) song song với đường thẳng $y = 2x - 1$.

ĐS: a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = -2x$

c) $y = 2x$

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $B(-1; -4)$ và:a) có hệ số góc bằng $\frac{1}{2}$.b) song song với đường thẳng $y = -3x + 1$.c) có hệ số góc bằng k cho trước.

ĐS: a) $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ b) $y = -3x - 7$ c) $y = k(x + 1) - 4$.

Bài 14. Cho hàm số $y = mx + 3m - 1$.

a) Định m để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

b) Tìm tọa độ của điểm mà đường thẳng luôn đi qua với mọi m .

ĐS: a) $m = \frac{1}{3}$ b) $A(-3; -1)$.

Bài 15. Cho 2 điểm $A(1; -2)$, $B(-4; 3)$.

a) Tìm hệ số góc của đường thẳng AB. b) Lập phương trình đường thẳng AB.

ĐS: a) $k = -1$ b) $y = -x - 1$.

Bài 16.

a)

ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hai hàm số: $y = x$ và $y = 3x$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
 b) Đường thẳng song song với trục Ox, cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 6, cắt các đồ thị trên lần lượt ở A và B. Tìm tọa độ các điểm A và B. Tính chu vi và diện tích tam giác OAB.

ĐS: b) $A(6;6), B(2;6); AB = 4, OA = 6\sqrt{2}, OB = 2\sqrt{10}$.

Bài 2. Cho hai hàm số $y = -2x$ và $y = \frac{1}{2}x$.

- a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
 b) Qua điểm $(0; 2)$ vẽ đường thẳng song song với trục Ox, cắt các đồ thị trên lần lượt tại A và B. Chứng minh tam giác AOB là tam giác vuông và tính diện tích của tam giác đó.

ĐS:

Bài 3. Cho hàm số: $y = (m + 4)x - m + 6$ (d).

- a) Tìm các giá trị của m để hàm số đồng biến, nghịch biến.
 b) Tìm các giá trị của m , biết rằng đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$. Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị tìm được của m .
 c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì các đường thẳng (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: b) $m = 0$ c) $(1;10)$.

Bài 4. Cho hàm số: $y = (3m - 2)x - 2m$.

- a) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
 b) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.
 c) Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị ứng với giá trị của m tìm được ở câu a, câu b.

ĐS:

Bài 5. Cho ba đường thẳng $(d_1): y = -x + 1$, $(d_2): y = x + 1$ và $(d_3): y = -1$.

- a) Vẽ ba đường thẳng đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
 b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là A, giao điểm của đường thẳng (d_3) với hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ theo thứ tự là B và C. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.
 c) Tam giác ABC là tam giác gì? Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS:

Bài 6. Cho các hàm số sau: $(d_1): y = -x - 5$; $(d_2): y = \frac{1}{4}x$; $(d_3): y = 4x$.

- a) Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.
 b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với đường thẳng (d_2) và (d_3) lần lượt là A và B. Tìm

tọa độ các điểm A, B.

c) Tam giác AOB là tam giác gì? Vì sao? Tính diện tích tam giác AOB.

ĐS:

Bài 7. Cho hàm số: $(d_1): y = 2x + 2$, $(d_2): y = -\frac{1}{2}x - 2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với trục Oy là A, giao điểm của đường thẳng (d_2) với trục Ox là B, còn giao điểm của đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là C. Tam giác ABC là tam giác gì? Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

c) Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS:

Bài 8. Cho hai đường thẳng: $(d_1): y = x + 3$ và $(d_2): y = 3x + 7$.

a) Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) và (d_2) với trục Oy lần lượt là A và B. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.

c) Gọi J là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) . Chứng minh tam giác OIJ là tam giác vuông. Tính diện tích của tam giác đó.

ĐS:

Bài 9. Cho đường thẳng (d): $y = -2x + 3$.

a) Xác định tọa độ giao điểm A và B của đường thẳng (d) với hai trục Ox, Oy. Tính khoảng cách từ điểm O(0; 0) đến đường thẳng (d).

b) Tính khoảng cách từ điểm C(0; -2) đến đường thẳng (d).

ĐS:

Bài 10. Tìm giá trị của k để ba đường thẳng sau đồng quy:

a) $(d_1): y = 2x + 7$, $(d_2): y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $(d_3): y = -\frac{2}{k}x - \frac{1}{k}$

ĐS:

Bài 11. Cho hai đường thẳng: $(d_1): y = (m + 1)x - 3$ và $(d_2): y = (2m - 1)x + 4$.

a) Chứng minh rằng khi $m = -\frac{1}{2}$ thì hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

ĐS: b) $m = 0; m = -\frac{1}{2}$.

Bài 12. Xác định hàm số $y = ax + b$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) Khi $a = \sqrt{3}$, đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\sqrt{3}$.
- b) Khi $a = -5$, đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; 3)$.
- c) Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $M(1; 3)$ và $N(-2; 6)$.
- d) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = \sqrt{7}x$ và đi qua điểm $(1; 7 + \sqrt{7})$.

ĐS: a) $y = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$ b) $y = -5x - 7$ c) $y = -x + 4$ d) $y = \sqrt{7}x + 7$.

Bài 13. Cho đường thẳng: $y = 4x$ (d).

- a) Viết phương trình đường thẳng (d_1) song song với đường thẳng (d) và có tung độ gốc bằng 10.
- b) Viết phương trình đường thẳng (d_2) vuông góc với đường thẳng (d) và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng -8 .
- c) Viết phương trình đường thẳng (d_3) song song với đường thẳng (d) cắt trục Ox tại A, cắt trục Oy tại B và diện tích tam giác AOB bằng 8.

ĐS:

Bài 14. Cho hai đường thẳng: $y = (k - 3)x - 3k + 3$ (d_1) và $y = (2k + 1)x + k + 5$ (d_2). Tìm các giá trị của k để:

- a) (d_1) và (d_2) cắt nhau. b) (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm trên trục tung.
- c) (d_1) và (d_2) song song.

ĐS: a) $k \neq -4$ b) $k = -\frac{1}{2}$ c) $k = -4$

Bài 15. Cho hàm số $(d): y = (m + 3)x + n$ ($m \neq -3$). Tìm các giá trị của m, n để đường thẳng (d):

- a) Đi qua các điểm $A(1; -3)$ và $B(-2; 3)$.
- b) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{3}$, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $3 + \sqrt{3}$.
- c) Cắt đường thẳng $3y - x - 4 = 0$.
- d) Song song với đường thẳng $2x + 5y = -1$.

ĐS:

CHƯƠNG III

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng: $ax + by = c$ (1)

trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

- Nếu x_0, y_0 thỏa (1) thì cặp số $(x_0; y_0)$ đgl một nghiệm của phương trình (1).
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi nghiệm của (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm $(x_0; y_0)$.

2. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$ (d).

- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) là đồ thị của hàm số $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình trở thành $ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$ và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.

Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành $by = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$ và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

Bài 1. Trong các cặp số $(0; 4)$, $(-1; 3)$, $(1; 1)$, $(2; 3)$, $(4; 6)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình:

- a) $5x - 3y = 2$ b) $2x + y = 7$ c) $2x - y = 2$

ĐS:

Bài 2. Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó:

- a) $3x - y = 1$ b) $x - 2y = 5$ c) $2x - 3y = 5$
d) $3y + x = 2$ e) $4x + 0y = 12$ f) $0x - 3y = 6$

ĐS:

Bài 3. Cho đường thẳng (d) có phương trình: $(m - 1)x + (3m - 4)y = -2m - 5$. Tìm m để:

a) (d) song song với trục hoành.

b) (d) song song với trục tung.

c) (d) đi qua gốc toạ độ.

d) (d) đi qua điểm $A(2; -1)$.

ĐS:

Bài 4. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

a) $2x + y = 0$

b) $3x - 2y = 5$

c) $2x + 5y = 15$

d) $5x - 11y = 4$

e) $7x + 5y = 143$

f) $23x + 53y = 109$

ĐS: a) $\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$ b) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 5t \\ y = -2t + 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 11t + 3 \\ y = 5t + 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 5t + 4 \\ y = -7t + 23 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 53t - 16 \\ y = -23t + 9 \end{cases}$

Bài 5. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

a) $11x + 8y = 73$

b) $5x + 7y = 112$

c) $5x + 19y = 674$

d) $2x - 3y = 7$

e) $7x + 13y = 71$

ĐS: a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 11 \end{cases}; \begin{cases} x = 14 \\ y = 6 \end{cases}; \begin{cases} x = 21 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 17 \\ y = 31 \end{cases}; \begin{cases} x = 36 \\ y = 26 \end{cases}; \begin{cases} x = 55 \\ y = 21 \end{cases}; \begin{cases} x = 74 \\ y = 16 \end{cases}; \begin{cases} x = 93 \\ y = 11 \end{cases}; \begin{cases} x = 112 \\ y = 6 \end{cases}; \begin{cases} x = 131 \\ y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{Z}, t \geq 1)$ e) không có nghiệm nguyên dương.

Bài 6.

a)

ĐS:

II. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Khái niệm hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (I)$$

- Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ đgl **một nghiệm** của hệ (I).
- Nếu hai phương trình trên không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $(d_1): a_1x + b_1y = c_1$ và $(d_2): a_2x + b_2y = c_2$.

- Nếu (d_1) cắt (d_2) thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.
- Nếu $(d_1) \parallel (d_2)$ thì hệ (I) vô nghiệm.
- Nếu $(d_1) \equiv (d_2)$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.

3. Hệ phương trình tương đương

Hai hệ phương trình đgl tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Bài 1. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau và giải thích vì sao:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 0y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 0x - y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

ĐS: a) 1 nghiệm b) 1 nghiệm c) 1 nghiệm d) 1 nghiệm e) vô nghiệm f) vô số nghiệm.

Bài 2. Bằng đồ thị chứng tỏ các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất với bất kì giá trị nào của a :

a) $\begin{cases} x = a \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ y = a \end{cases}$

Bài 3. Bằng đồ thị chứng tỏ hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ ax + 2y = 3 \end{cases}$

- a) Có nghiệm duy nhất với $a = -2$. b) Vô nghiệm với $a = -6$.

Bài 4. Bằng đồ thị chứng tỏ hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 2y = a \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$$

- a) Có vô số nghiệm với $a = 1$. b) Vô nghiệm với $a \neq 1$.

Bài 5. Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ mx - y = 2m \end{cases}$$

ĐS: a) $m = -1$

Bài 6. Xác định a để hai hệ phương trình sau là tương đương:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 12x + 3y = a \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 2ax - 2y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

ĐS: a) $a = 9$ b) $a = -1$

III. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Phương pháp thế

- **Bước 1:** Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là PT (1)), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai (PT (2)) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- **Bước 2:** Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho PT (2) trong hệ (PT (1) cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia).

2. Phương pháp cộng đại số

- **Bước 1:** Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.
- **Bước 2:** Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ nguyên phương trình kia).

Chú ý:

- Trong phương pháp cộng đại số, trước khi thực hiện bước 1, có thể nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Đôi khi ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ phương trình đã cho về hệ phương trình với hai ẩn mới, rồi sau đó sử dụng một trong hai phương pháp giải ở trên.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a)
$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y = \frac{4x-3}{5} \\ x + 3y = \frac{15-9y}{14} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21 \end{cases}$$

$$DS: a) \left(\frac{1}{4}; 1\right) \quad b) (7; 5) \quad c) \left(\frac{19}{13}; \frac{14}{13}\right) \quad d) (12; -3) \quad e) (8; 2) \quad f) (9; -10)$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} -x + 2y = -4(x-1) \\ 5x + 3y = -(x+y) + 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 9x - 6y = 4 \\ 3(4x - 3y) = -3x + y + 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3(x+1) + 2y = -x \\ 5(x+y) = -3x + y - 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2(2x+3y) = 3(2x-3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y-2x) + 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$$

$$DS: a) \text{ vô số nghiệm} \quad b) \text{ vô nghiệm} \quad c) \text{ vô nghiệm} \quad d) \left(\frac{5}{2}; 1\right) \quad e) \text{ vô nghiệm} \quad f) (7; 5)$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2x + 3|y| = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} (x-1)^2 - 2y = 2 \\ 3(x-1)^2 + 3y = 1 \end{cases}$$

$$DS: a) (2; 3), \left(-\frac{4}{7}; -\frac{33}{7}\right) \quad b) (0; 1) \quad c) (2; 2) \quad d) \left(-\frac{10}{3}; \frac{19}{3}\right) \quad e) \left(\frac{77}{20}; -\frac{63}{20}\right)$$

$$f) \left(1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{5}{9}\right)$$

Bài 4. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

DS:

a)	$m \neq \pm 2$	$m = 2$	$m = -2$	b)	$m \neq \pm 1$	$m = 1$	$m = -1$
	$\left(\frac{2m+3}{m+2}; \frac{-m}{m+2}\right)$	$\begin{cases} x \in R \\ y = 2x - 4 \end{cases}$	vô nghiệm		$\left(\frac{3m+1}{m+1}; \frac{m-1}{m+1}\right)$	$\begin{cases} x \in R \\ y = 2 - x \end{cases}$	vô nghiệm

Bài 5. Tìm m nguyên để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên:

a)
$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (m+1)x - 2y = m - 1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

ĐS: a) $m \in \{-1; -3; 1; -5\}$ b) $m \in \{-1; 0; 2; 3\}$ **Bài 6.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a)
$$\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ 5x - 3y = -31 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 7x + 5y = 19 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 7x - 5y = 3 \\ 3x + 10y = 62 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 5y = -5 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = -12 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

ĐS: a) $(-2; 7)$ b) $(-3; 8)$ c) $(4; 5)$ d) $(5; -2)$ e) $(0; 4)$ f) $(-1; 0)$ **Bài 7.** Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 3(x+1) + 2y = -x \\ 5(x+y) = -3x + y - 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 5 = -(x+y) \\ 6x + 3y = y - 10 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = -2(x-1) \\ 7x + 3y = x + y + 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2}+1)y = 1 \end{cases}$$

ĐS: a) vô nghiệm b) vô số nghiệm c) vô nghiệm d) $\left(1; \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\right)$

e) $\left(\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{5}; \frac{1-2\sqrt{10}}{5}\right)$

f)

Bài 8. Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) A(2; 1), B(1; 2)

b) A(1; 3), B(3; 2)

c) A(1; -3), B(2; 3)

d) A(-1; 1), B(2; 3)

e) A(2; -2), B(-1; -2)

f) A(1; 0), B(1; -6)

ĐS: a) $y = -x + 3$ b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ c) $y = 6x - 9$ d) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ e) $y = -2$ f) $x = 1$ **Bài 9.** Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, các đường thẳng có phương trình sau luôn đi qua một điểm cố định:a) $(-5m+4)x + (3m-2)y + 3m-4 = 0$ b) $(2m^2+m+4)x - (m^2-m-1)y - 5m^2-4m-13 = 0$

ĐS: a) (3; 4)

b) (3; 1)

Bài 10. Giải các hệ phương trình sau:

a)

ĐS:

IV. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- Bước 1: Lập hệ phương trình:
 - + Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
 - + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
 - + Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Bước 2: Giải hệ hai phương trình nói trên.
- Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thỏa mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

Dạng 1: Toán về quan hệ giữa các số

- Bài 1.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số sao cho tổng của hai chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.
ĐS: 47.
- Bài 2.** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số sao cho tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số đó giảm đi 99 đơn vị.
ĐS: 746.
- Bài 3.** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 11, biết rằng khi chia số đó cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.
ĐS: 198.
- Bài 4.** Tìm hai số biết rằng tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.
ĐS: 12 và 5 hoặc 4 và 13.
- Bài 5.**
ĐS:

Dạng 2: Toán làm chung công việc

- Bài 1.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể sau 4 giờ 48 phút thì đầy bể. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng một mình đầy bể.
ĐS: 8 giờ và 12 giờ.
- Bài 2.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ xong công việc đó.
ĐS:
- Bài 3.** Hai lớp 9A và 9B cùng tham gia lao động vệ sinh sân trường thì công việc được hoàn thành sau 1 giờ 20 phút. Nếu mỗi lớp chia nhau làm nửa công việc thì thời gian hoàn tất là 3 giờ.

Hỏi nếu mỗi lớp làm một mình thì phải mất bao nhiêu thời gian.

ĐS:

Bài 4.

ĐS:

Dạng 3: Toán chuyển động

Bài 1. Một ô tô đi từ tỉnh A đến tỉnh B với một vận tốc đã định. Nếu vận tốc tăng thêm 20 km/h thì thời gian đi được sẽ giảm 1 giờ. Nếu vận tốc giảm bớt 10 km/h thì thời gian đi sẽ tăng thêm 1 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ô tô.

ĐS: 40 km/h ; 3 giờ.

Bài 2. Hai địa điểm A và B cách nhau 85 km . Cùng lúc, một canô đi xuôi dòng từ A đến B và một canô đi ngược dòng từ B đến A, sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi canô, biết rằng vận tốc canô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc canô đi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h (vận tốc thật của các canô không đổi).

ĐS: 27 km/h ; 24 km/h .

Bài 3. Quãng đường AB dài 200 km . Cùng lúc một xe máy đi từ A đến B và một ô tô đi từ B đến A. Xe máy và ô tô gặp nhau tại điểm C cách A 120 km . Nếu xe máy khởi hành sau ô tô 1 giờ thì gặp nhau tại điểm D cách C 24 km . Tính vận tốc của ô tô và xe máy.

ĐS: 60 km/h ; 40 km/h .

Bài 4. Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A để đi đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc xe khách là 20 km/h . Do đó xe du lịch đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100 km .

ĐS:

Bài 5. Một người đi xe máy từ A đến B. Vì có việc gấp phải đến B trước thời gian dự định là 45 phút nên người đó tăng vận tốc lên mỗi giờ 10 km . Tính vận tốc mà người đó dự định đi, biết quãng đường AB dài 90 km .

ĐS:

Bài 6. Một người đi xe máy từ A tới B. Cùng một lúc một người khác cũng đi xe máy từ B tới A với vận tốc bằng $\frac{4}{5}$ vận tốc của người thứ nhất. Sau 2 giờ hai người gặp nhau. Hỏi mỗi người đi cả quãng đường AB hết bao lâu?

ĐS:

Bài 7. Một canô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 20 km/h , sau đó lại xuôi từ bến B trở về bến A. Thời gian canô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian canô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết vận tốc dòng nước là 5 km/h , vận tốc riêng của canô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau.

ĐS:

Bài 8.

ĐS:

Dạng 4: Toán có nội dung hình học

- Bài 1.** Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.
ĐS: Cạnh đáy 20 dm, chiều cao 15 dm.
- Bài 2.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tìm diện tích của khu vườn ban đầu.
ĐS:
- Bài 3.** Người ta muốn làm một chiếc thùng tôn hình trụ không nắp có bán kính đáy là 25 cm, chiều cao của thùng là 60 cm. Hãy tính diện tích tôn cần dùng (không kể mép nối). Thùng tôn đó khi chứa đầy nước thì thể tích nước chứa trong thùng là bao nhiêu.
ĐS:
- Bài 4.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2 . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng sẽ tăng thêm 5 m^2 .
ĐS:
- Bài 5.**
ĐS:

Dạng 5: Các dạng khác

- Bài 1.** Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.
ĐS: 300; 150.
- Bài 2.** Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Thực tế, xí nghiệp I vượt mức kế hoạch 10%, xí nghiệp II vượt mức kế hoạch 15%, do đó cả hai xí nghiệp đã làm được 404 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.
ĐS:
- Bài 3.** Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Mặc dù người đó mỗi giờ đã làm thêm một sản phẩm so với dự kiến, nhưng thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm so với dự định là 12 phút. Tính số sản phẩm dự kiến làm trong 1 giờ của người đó. Biết mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.
ĐS:
- Bài 4.** Theo kế hoạch, một công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên mỗi giờ người công nhân đó đã làm thêm được 2 sản phẩm. Vì vậy, chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn vượt mức 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm.
ĐS:
- Bài 5.** Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công thợ (nghĩa là nếu công

việc đó chỉ có một người làm thì phải mất 420 ngày). Hãy tính số công nhân của đội biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày để đội hoàn thành công việc sẽ giảm đi 7 ngày.

ĐS:

Bài 6. Một đội xe vận tải phải vận chuyển 28 tấn hàng đến một địa điểm qui định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 0,7 tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu.

ĐS:

Bài 7. Người ta dự kiến trồng 300 cây trong một thời gian đã định. Do điều kiện thuận lợi nên mỗi ngày trồng được nhiều hơn 5 cây so với dự kiến, vì vậy đã trồng xong 300 cây ấy trước 3 ngày. Hỏi dự kiến ban đầu mỗi ngày trồng bao nhiêu cây? (Giả sử số cây dự kiến trồng mỗi ngày là bằng nhau).

ĐS:

Bài 8.

ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$$

ĐS:

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 18 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 2|x+y| - |x-y| = 9 \\ 3|x+y| + 2|x-y| = 17 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases}$$

ĐS:

Bài 3. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m+1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} mx + (m-2)y = 5 \\ (m+2)x + (m+1)y = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = 3m-1 \\ (m+2)x - y = 1-m \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (m+4)x - (m+2)y = 4 \\ (2m-1)x + (m-4)y = m \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m+5 \end{cases}$$

ĐS:

Bài 4. Trong các hệ phương trình sau hãy:

i) Giải và biện luận. ii) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

$$\text{a) } \begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} mx + y - 3 = 3 \\ x + my - 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

ĐS:

Bài 5. Trong các hệ phương trình sau hãy:

i) Giải và biện luận.

ii) Khi hệ có nghiệm $(x; y)$, tìm hệ thức giữa x, y độc lập đối với m .

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m+5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 6mx + (2-m)y = 3 \\ (m-1)x - my = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} mx + (m-1)y = m+1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

ĐS:

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

ĐS:

Bài 7. Một khu vườn hình chữ nhật, chiều dài lớn hơn chiều rộng 5 m, diện tích bằng 300 m². Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

ĐS:

Bài 8. Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13 cm². Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15 cm². Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho.

ĐS:

Bài 9. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m, chiều rộng thêm 5 m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195 m². Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh đất.

ĐS:

Bài 10. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{2}{5}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao giảm đi 2 dm và cạnh đáy tăng thêm 3 dm thì diện tích của nó giảm đi 14 dm². Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

ĐS:

Bài 11. Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 90 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 1,2 giờ (xe thứ nhất khởi hành từ A, xe thứ hai khởi hành từ B). Tìm vận tốc của mỗi xe. Biết rằng thời gian để xe thứ nhất đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian để xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 1 giờ.

ĐS:

Bài 12. Một xe lửa đi từ ga Hà Nội vào ga Trị Bình (Quảng Ngãi). Sau đó 1 giờ, một xe lửa khác đi từ ga Trị Bình ra ga Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc của mỗi xe lửa, biết quãng đường sắt Hà Nội – Trị Bình dài 900km.

ĐS:

Bài 13. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là $\frac{2}{5}$ giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô?

ĐS:

Bài 14. Một canô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B canô quay lại ngay và gặp bè nửa tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của canô.

ĐS:

Bài 15. Cùng một thời điểm, một chiếc ô tô X_A xuất phát từ thành phố A về hướng thành phố B và một chiếc khác X_B xuất phát từ thành phố B về hướng thành phố A. Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau lần đầu tại một điểm cách A là 20 km. Cả hai chiếc xe sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và chúng gặp nhau lần thứ hai tại một điểm C. Biết thời gian xe X_B đi từ C đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1 giờ. Hãy tính vận tốc của từng chiếc ô tô.

ĐS:

Bài 16. Một xuồng máy xuôi dòng sông 30 km và ngược dòng 28 km hết một thời gian bằng thời gian mà xuồng đi 59,5 km trên mặt hồ yên lặng. Tính vận tốc của xuồng khi đi trên hồ biết rằng vận tốc của nước chảy trên sông là 3 km/h.

ĐS:

Bài 17. Một xe máy đi từ A đến B trong một thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 14 km/ giờ thì đến sớm 2 giờ, nếu giảm vận tốc đi 4 km/ giờ thì đến muộn 1 giờ. Tính vận tốc dự định và thời gian dự định.

ĐS:

Bài 18. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km, cả đi và về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/ h.

ĐS:

Bài 19. Một canô đi xuôi dòng 48 km rồi đi ngược dòng 22 km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lớn hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 5 km/h. Tính vận tốc canô lúc đi ngược dòng.

ĐS:

Bài 20. Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

ĐS:

Bài 21. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì sau 12 giờ bể đầy. Sau khi hai vòi cùng chảy 8 giờ thì người ta khoá vòi I, còn vòi II tiếp tục chảy. Do tăng công suất vòi II lên gấp đôi, nên vòi II đã chảy đầy phần còn lại của bể trong 3 giờ rưỡi. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình với công suất bình thường thì phải bao lâu mới đầy bể?

ĐS:

Bài 22. Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

ĐS:

Bài 23. Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

ĐS:

Bài 24. Có 3 đội xây dựng cùng làm chung một công việc. Làm chung được 4 ngày thì đội III được điều động làm việc khác, 2 đội còn lại cùng làm thêm 12 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Biết rằng năng suất của đội I cao hơn năng suất của đội II; năng suất của đội III là trung bình cộng của năng suất đội I và năng suất đội II; và nếu mỗi đội làm một mình một phần ba công việc thì phải mất tất cả 37 ngày mới xong. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày xong công việc trên.

ĐS:

Bài 25. Nhà trường tổ chức cho 180 học sinh khối 9 đi tham quan di tích lịch sử. Người ta dự tính nếu dùng loại xe lớn chuyên chở một lượt hết số học sinh thì phải điều ít hơn nếu dùng loại xe nhỏ là hai chiếc. Biết rằng mỗi xe lớn có nhiều hơn mỗi xe nhỏ là 15 chỗ ngồi. Tính số xe lớn, nếu loại xe đó được huy động.

ĐS:

Bài 26.

a)

ĐS:

CHƯƠNG IV

HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. Tập xác định của hàm số

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Tính chất biến thiên của hàm số

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

3. Đồ thị của hàm số

• Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó đgl một parabol với đỉnh O.

Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

• Vì đồ thị $y = ax^2$ ($a \neq 0$) luôn đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng nên để vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một điểm ở bên phải trục Oy rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy.

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

- a) Chứng minh rằng $f(a) - f(-a) = 0$ với mọi a .
- b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f(a-1) = 4$.

ĐS: b) $a = -1; a = 3$.

Bài 2. Cho hàm số $y = (m+2)x^2$ ($m \neq -2$). Tìm giá trị của m để:

- a) Hàm số đồng biến với $x < 0$.
- b) Có giá trị $y = 4$ khi $x = -1$.
- c) Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.
- d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

ĐS: a) $m < -2$ b) $m = 2$ c) $m < -2$ d) $m > -2$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{10}x^2$.

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không: $A\left(3; \frac{9}{10}\right), B\left(-5; \frac{5}{2}\right), C(-10; 1)$?

ĐS: b) $A, B \in (P)$.

Bài 4. Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$. Xác định m để các điểm sau nằm trên parabol:

a) $A(\sqrt{2}; m)$ b) $B(-\sqrt{2}; m)$ c) $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$

ĐS: a) $m = \frac{1}{2}$ b) $m = \frac{1}{2}$ c) $m = \pm\sqrt{3}$.

Bài 5. Xác định m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 2)x^2$ đi qua điểm $A(1; 2)$. Với m tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm $B(2; 9)$ hay không?

ĐS: $m = \pm 2$.

Bài 6.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và điểm $M(2; 4)$.

b) Viết phương trình parabol dạng $y = ax^2$ và đi qua điểm $M(2; 4)$.

c) Vẽ parabol và đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

ĐS: a) $y = 2x$ b) $y = x^2$ c) $(0; 0), (2; 4)$.

Bài 7. Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = \frac{1}{2}x$. Dựa vào đồ thị hãy giải các bất phương trình:

a) $f(x) < g(x)$ b) $f(x) \geq g(x)$.

ĐS:

Bài 8. Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

a) Xác định a để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 2)$.

b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c) Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4.

d) Tìm các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

ĐS: a) $a = 2$ b) $y = 2x^2$ c) $(-\sqrt{2}; 4), (\sqrt{2}; 4)$ d) $O(0; 0), A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Chú ý: Tập hợp các điểm cách đều hai trục tọa độ là hai đường thẳng $y = x$; $y = -x$.

Bài 9. Cho hàm số $y = 2x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Dựa vào đồ thị (P) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $2x^2 + 1 = m$.

ĐS:

Bài 10.

a)

ĐS:

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$:

• Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

• Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Nếu phương trình có a và c trái dấu thì $\Delta > 0$. Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

3. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) và $b = 2b', \Delta' = b'^2 - ac$:

• Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

• Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.

• Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Hệ thức Viet

• **Định lý Viet:** Nếu x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

• Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \quad (\text{Điều kiện để có hai số đó là: } S^2 - 4P \geq 0).$$

5. Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

(1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$

(1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

(1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$$(1) \text{ có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

Chú ý: Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm:

• Nếu nhẩm được: $x_1 + x_2 = m + n$; $x_1 x_2 = mn$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = m$, $x_2 = n$.

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

• Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)^2 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$ b) $9(x-2)^2 - 4(x-1)^2 = 0$ c) $2x^2 - 3(2x-3)^2 = 0$

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$ e) $x^2 + 6x - 16 = 0$ f) $7x^2 + 12x + 5 = 0$

ĐS:

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x + 8 = 0$ b) $5x^2 - 3x + 15 = 0$ c) $x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $3x^2 + 7x + 2 = 0$ e) $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$ f) $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$

ĐS:

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $10x^2 + 17x + 3 = 2(2x-1) - 15$ b) $x^2 + 7x - 3 = x(x-1) - 1$

c) $2x^2 - 5x - 3 = (x+1)(x-1) + 3$ d) $5x^2 - x - 3 = 2x(x-1) - 1 + x^2$

e) $-6x^2 + x - 3 = -3x(x-1) - 11$ f) $-4x^2 + x(x-1) - 3 = x(x+3) + 5$

g) $x^2 - x - 3(2x+3) = -x(x-2) - 1$ h) $-x^2 - 4x - 3(2x-7) = -2x(x+2) - 7$

i) $8x^2 - x - 3x(2x-3) = -x(x-2)$ k) $3(2x+3) = -x(x-2) - 1$

ĐS:

Bài 4. Tìm m để các phương trình sau:

i) có nghiệm ii) có 2 nghiệm phân biệt iii) có nghiệm kép iv) vô nghiệm

a) $9x^2 - 6mx + m(m-2) = 0$ b) $2x^2 - 10x + m - 1 = 0$ c) $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$

d) $3x^2 - 4x + 2m = 0$ e) $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$

ĐS:

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ y + x^2 = 4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x+y) - 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases}$

ĐS: a) $(1;3), (5;-5)$ b) $\left(3;\frac{5}{2}\right), \left(\frac{11}{3};3\right)$ c) $(4;-3), \left(-\frac{5}{2};\frac{7}{3}\right)$

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 2(3m+2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -2$.
- Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -1 .
- Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép.

ĐS:

Bài 7. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$.

- Giải phương trình với $m = 3$.
- Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .
- Tìm các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm kép..

ĐS:

Bài 8. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -1$ và $m = 3$.
- Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng 4 .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

ĐS:

Bài 9. Xác định m để mỗi cặp phương trình sau có nghiệm chung:

- $x^2 + mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x + m = 0$
- $x^2 - (m+4)x + m + 5 = 0$ và $x^2 - (m+2)x + m + 1 = 0$

ĐS:

Bài 10. Không giải phương trình, hãy nhẩm nghiệm các phương trình sau:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| a) $x^2 - 10x + 16 = 0$ | b) $x^2 - 15x + 50 = 0$ | c) $x^2 - 6x + 5 = 0$ |
| d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ | e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ | f) $x^2 - x - 20 = 0$ |
| g) $x^2 + 5x - 6 = 0$ | h) $x^2 + 5x + 6 = 0$ | i) $x^2 - 5x + 6 = 0$ |

ĐS:

Bài 11. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| a) 10 và 8 | b) 10 và -8 | c) 3 và $\frac{1}{4}$ |
| d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$ | e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ | f) $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$ |

ĐS:

Bài 12. Với các phương trình sau, tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng x_0 . Tìm nghiệm còn lại:

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $3x^2 + 7x + m = 0; x_0 = 1$ | b) $15x^2 + mx - 1 = 0; x_0 = \frac{1}{3}$ |
|---------------------------------|--|

c) $x^2 - 2(3m+1)x + 2m^2 - 2m - 5 = 0$; $x_0 = -1$ d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5m - 2 = 0$; $x_0 = 1$

ĐS:

Bài 13. Cho phương trình: $(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -2$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $x_1 = 2x_2$.

ĐS:

Bài 14. Cho phương trình: $2x^2 - 6x + m + 7 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -3$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình có một trong các nghiệm bằng -4 .
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = -2x_2$.

ĐS:

Bài 15. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -4$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 3x_2$.

ĐS:

Bài 16. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của mỗi phương trình sau. tính giá trị của các biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2; \quad B = x_1^3 + x_2^3; \quad C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad D = \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

- $x^2 + mx + 1 = 0$
- $x^2 + 6x + m = 0$
- $x^2 - (m-3)x + 2m + 1 = 0$

ĐS:

Bài 17. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$.

- Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm m để biểu thức $B = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.
- Tìm m để biểu thức $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

ĐS:

Bài 18. Tìm m để mỗi phương trình sau có các nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức đã cho:

- $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
- $x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 2m - 3 = 0$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$.
- $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$; $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

ĐS:

Bài 19. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$.

- Tìm m để phương trình có một trong các nghiệm bằng -2 . Tìm nghiệm còn lại.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

ĐS:

Bài 20. Cho phương trình: $x^2 - (2a-1)x - 4a - 3 = 0$.

- Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của a .
- Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào a .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

ĐS:

Bài 21. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$.

- Xác định m để phương trình có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 3$.
- Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m .

ĐS:

Bài 22. Cho phương trình: $mx^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hiệu hai nghiệm x_1, x_2 bằng 2.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m .

ĐS:

Bài 23. Với mỗi phương trình sau, tìm m để phương trình:

- Có hai nghiệm trái dấu
- Có hai nghiệm dương phân biệt
- Có đúng một nghiệm dương.

- $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$
- $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$
- $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$
- $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$

ĐS:

Bài 24. Cho phương trình: $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$.

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

ĐS:

Bài 25.

-

ĐS:

III. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$).

Cách giải: Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), đưa về phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$.

2. Phương trình bậc bốn dạng: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ với $a+b=c+d$

Cách giải: Đặt $t = x^2 + (a+b)x$, đưa về phương trình bậc hai $(t+ab)(t+cd) = m$.

3. Phương trình bậc bốn dạng: $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

Cách giải: Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, đưa về phương trình trùng phương theo t .

Chú ý: $(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$.

4. Phương trình bậc bốn dạng: $ax^4 + bx^3 + c^2 \pm bx + a = 0$

Cách giải:

– Nhận xét $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

– Với $x \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho x^2 ta được: $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0$.

Đặt $t = x \pm \frac{1}{x}$, đưa về phương trình bậc hai theo t .

5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Cách giải: Thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện xác định, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

6. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng $A.B = 0$.

Cách giải: $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

7. Phương trình chứa căn thức

$$\bullet \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases} \quad \bullet af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

8. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Cách giải: Có thể dùng các phương pháp sau để bỏ giá trị tuyệt đối:

- Dùng định nghĩa hoặc tính chất giá trị tuyệt đối.
- Đặt ẩn phụ.

9. Phương trình dạng $A^2 + B^2 = 0$

Cách giải: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$

b) $12x^4 - 5x^2 + 30 = 0$

c) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

d) $5x^4 - 3x^2 + \frac{7}{16} = 0$

e) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

g) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$

ĐS:

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

b) $(x+1)(x+4)(x^2+5x+6) = 24$

c) $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$

d) $(x+2)^2(x^2+4x) = 5$

e) $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$

f) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

ĐS:

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$

b) $(x^2 + 4x + 2)^2 + 4x^2 + 16x + 11 = 0$

c) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

d) $(2x+1)^4 - 8(2x+1)^2 - 9 = 0$

e) $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0$

f) $\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 - 4\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 3 = 0$

ĐS:

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2}$

b) $\frac{4x}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$

c) $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x^2-5x+6}$

d) $\frac{1}{3x^2-27} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{x-3}$

e) $\frac{x}{x-2} + \frac{x+3}{x-1} = 6$

f) $\frac{2x-1}{x} + 3 = \frac{x+3}{2x-1}$

ĐS:

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $(4x^2 - 25)(2x^2 - 7x - 9) = 0$

b) $(2x^2 - 3)^2 - 4(x-1)^2 = 0$

c) $2x(3x-1)^2 - 9x^2 + 1 = 0$

d) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

e) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

ĐS:

Bài 6. Tìm m để các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3 - (2m+1)x^2 + 3(m+4)x - m - 12 = 0$ b) $x^3 + (2m-3)x^2 + (m^2 - 2m + 2)x - m^2 = 0$

ĐS:

Bài 7. Tìm m để các phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

a) $x^4 - (2m+1)x^2 + m^2 = 0$

b) $(x^2 - 1)(x+3)(x+5) = m$

ĐS:

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 14|x| - 5 = 0$

b) $|x-1| + x^2 = x+3$

c) $|x+2| - 2x+1 = x^2 + 2x+3$

d) $|x^2+1| - \sqrt{x^2-4x+4} = 3x$

ĐS:

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-5} = x-7$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$

c) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$

d) $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$

e) $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{x+14}$

f) $\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = x + 2$

ĐS: a) $x = 9$ b) c) $x = -1; x = 3$

Bài 10. Giải các hệ phương trình sau: (Đưa về dạng $A^2 + B^2 = 0$)

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 27 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}$

ĐS:

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a)

ĐS:

IV. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bước 1: Lập phương trình

a) Chọn ẩn số và nêu điều kiện thích hợp của ẩn số.

b) Biểu thị các dữ kiện chưa biết qua ẩn số.

c) Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Đối chiếu nghiệm của phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số để trả lời.

Dạng 1: Toán về quan hệ giữa các số

Bài 1. Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng bằng 119.

ĐS: $(12; 5), (-19, 2; -15, 8)$

Bài 2. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

ĐS:

Bài 3. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.

ĐS:

Bài 4. Nếu tử số của một phân số được tăng gấp đôi và mẫu số thêm 8 thì giá trị của phân số bằng $\frac{1}{4}$.

Nếu tử số thêm 7 và mẫu số tăng gấp 3 thì giá trị phân số bằng $\frac{5}{24}$. Tìm phân số đó.

ĐS:

Bài 5. Nếu thêm 4 vào tử và mẫu của một phân số thì giá trị của phân số giảm 1. Nếu bớt 1 vào cả tử và mẫu thì phân số tăng $\frac{3}{2}$. Tìm phân số đó.

ĐS:

Bài 6.

a)

ĐS:

Dạng 2: Toán chuyển động

Bài 1. Một canô đi xuôi dòng 45 km, rồi ngược dòng 18 km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lâu hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 6 km/h. Tính vận tốc canô lúc đi ngược dòng.

ĐS: $x = 12$; $x = 9$

Bài 2. Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

ĐS:

Bài 3. Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định trước. Sau khi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB, người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

ĐS:

Bài 4. Một canô xuôi từ bến sông A đến bến sông B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của canô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.

ĐS:

Bài 5. Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược về 36 km. Biết thời gian xuôi dòng sông nhiều hơn thời gian ngược dòng là 2 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc khi ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc canô lúc xuôi và lúc ngược dòng.

ĐS:

Bài 6.

a)

ĐS:

Dạng 3: Toán làm chung công việc

Bài 1. Hai đội cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 giờ. Nếu hai đội cùng làm chung thì công việc hoàn thành trong 6 giờ. Tính xem mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?

ĐS: 10 giờ và 15 giờ.

Bài 2. Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi một người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?

ĐS:

Bài 3. Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút sẽ đầy bể. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

ĐS: 5 giờ và 7 giờ.

Bài 4. Nếu vòi A chảy 2 giờ và vòi B chảy trong 3 giờ thì được $\frac{4}{5}$ hồ. Nếu vòi A chảy trong 3 giờ và vòi B chảy trong 1 giờ 30 phút thì được $\frac{1}{2}$ hồ. Hỏi nếu chảy một mình mỗi vòi chảy trong bao lâu mới đầy hồ (giả thiết hồ ban đầu không có nước).

ĐS:

Bài 5. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi II cần nhiều thời gian hơn vòi I là 5 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

ĐS:

Bài 6.

a)

ĐS:

Dạng 4: Toán có nội dung hình học

Bài 1. Một đa giác lồi có tất cả 170 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

ĐS: 20 cạnh. Số đường chéo của n -giác là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Bài 2. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 280 m. Người ta làm lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 2 m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là 4256 m^2 .

ĐS:

Bài 3. Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích

tăng 500 m^2 . Nếu giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm 600 m^2 . Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu.

ĐS:

Bài 4. Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 2 cm và 3 cm thì diện tích tam giác tăng 50 cm^2 . Nếu giảm cả hai cạnh đi 2 cm thì diện tích sẽ giảm đi 32 cm^2 . Tính hai cạnh góc vuông.

ĐS:

Bài 5.

a)

ĐS:

Dạng 5: Các dạng khác

Bài 1. Trong một phòng có 80 người họp, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu bớt đi hai dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm hai người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người ngồi?

ĐS: 10 dãy ghế và mỗi dãy ghế xếp 8 người.

Bài 2. Một phòng học có một số dãy ghế tổng cộng 40 chỗ ngồi. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy ghế thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu trong phòng có mấy dãy ghế?

ĐS: 4;10.

Bài 3. Trong tháng giêng hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy. Trong tháng hai, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên sản xuất được 819 chi tiết máy. Tính xem trong tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

ĐS:

Bài 4. Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 4.045.000 người. Tính số dân của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay?

ĐS:

Bài 5.

a)

ĐS:

V. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (*)

Dạng 1: Hệ bậc hai giải bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tùy theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x^2 - xy = 24 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases} \\ \text{g) } \begin{cases} y + x^2 = 4x \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases} & \text{i) } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases} \end{array}$$

ĐS:

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 2(x + y)^2 - 3(x + y) - 5 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 5(x - y)^2 + 3(x - y) = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + xy + 3 = 0 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases} \\ \text{g) } \begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ (x - 2)(y - 3) = 18 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} x(x - 8) + 3y(y + 1) = -6 \\ 2x(x - 8) + 5y(y + 1) = -14 \end{cases} \end{array}$$

ĐS:

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 2xy - x^2 + 4x = -4 \\ x^2 - 2xy + y - 5x = 4 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + 2y + 2xy - 11 = 0 \\ xy + y - x = 4 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} xy + x - y = 1 \\ xy - 3x + y = 5 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} xy + 2x - y - 2 = 0 \\ xy - 3x + 2y = 0 \end{cases} \end{array}$$

ĐS:

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a)

ĐS:

Dạng 2: Hệ đối xứng loại 1

Hệ có dạng: $(I) \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ (với $f(x, y) = f(y, x)$ và $g(x, y) = g(y, x)$).

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa x và y thì $f(x, y)$ và $g(x, y)$ không thay đổi).

- Đặt $S = x + y, P = xy$.
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (II) với các ẩn là S và P .
- Giải hệ (II) ta tìm được S và P .
- Tìm nghiệm (x, y) bằng cách giải phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x + y) = -3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases} \end{array}$$

ĐS:

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} xy + x + y = 19 \\ x^2y + xy^2 = 84 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} (x+1)(y+1) = 8 \\ x(x+1) + y(y+1) + xy = 17 \end{cases} \end{array}$$

ĐS:

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} (x - y)^2 - (x - y) = 6 \\ 5(x^2 + y^2) = 5xy \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases} \end{array}$$

ĐS:

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a)

ĐS:

Dạng 3: Hệ đối xứng loại 2

Hệ có dạng:

$$(I) \begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ f(y, x) = 0 & (2) \end{cases}$$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa x và y thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

• Trừ (1) và (2) về theo vế ta được:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 & (3) \\ f(x, y) = 0 & (1) \end{cases}$$

(I)

• Biến đổi (3) về phương trình tích:

$$(3) \Leftrightarrow (x - y) \cdot g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

• Như vậy,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x = y \\ f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

• Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy^2 + 2 = x^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ y^2 + 1 = 3x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$

ĐS:

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases}$

ĐS:

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$

$$d) \begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

ĐS:

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

a)

ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$.

a) Tìm m để phương trình 2 có nghiệm trái dấu.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

c) Chứng minh biểu thức $M = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$ không phụ thuộc vào m .

ĐS:

Bài 2. Tìm m để phương trình:

a) $x^2 - x + 2(m-1) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) $4x^2 + 2x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

c) $(m^2 + 1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

ĐS:

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - (a-1)x - a^2 + a - 2 = 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi a , phương trình trên có 2 nghiệm trái dấu.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Tìm giá trị của a để $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

ĐS:

Bài 4. Cho phương trình: $x^2 + 4x + m + 1 = 0$.

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

ĐS:

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

b) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 mà không phụ thuộc vào m .

c) Tìm giá trị của m để biểu thức $A = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐS:

Bài 6. Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0 \\ 4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + mx + 1 = 0 \\ x^2 + x + m = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x^2 + (3m+1)x - 9 = 0 \\ 6x^2 + (7m-1)x - 19 = 0 \end{cases} \end{array}$$

ĐS:

Bài 7. Cho parabol (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng (d): $y = x + m$.

- Vẽ parabol (P).
- Xác định m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.
- Xác định phương trình đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) và cắt (P) tại điểm có tung độ bằng -4 .

ĐS:

Bài 8. Cho parabol (P): $y = -\frac{x^2}{4}$ và điểm M (1; -2).

- Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và có hệ số góc là m .
- Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi m thay đổi.
- Gọi $x_A; x_B$ lần lượt là hoành độ của A và B. Xác định m để $x_A^2 x_B + x_A x_B^2$ đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó.

ĐS:

Bài 9. Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 & \text{b)} x(x^2 - 1)(x + 2) + 1 = 0 & \text{c)} \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} = \frac{10}{3} \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right) \\ \text{d)} \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12} & \text{e)} 2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0 & \text{f)} x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = 0 \\ \text{g)} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0 & \text{h)} \end{array}$$

ĐS:

Bài 10. Giải các phương trình sau:

$$\text{a)} \frac{2}{x+3} - \frac{x+2}{3x-x^2} = \frac{10}{x(x^2-9)} \quad \text{b)} \frac{5}{x-1} - \frac{4}{3-6x+3x^2} = 3$$

ĐS:

Bài 11. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 160 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô biết rằng nếu ô tô đi từ A tăng vận tốc thêm 10 km/h sẽ bằng hai lần vận tốc ô tô đi từ B.

ĐS:

Bài 12. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 9km/h. Khi đi từ B về A người ấy đi đường khác dài hơn 6 km, với vận tốc 12km/h, nên thời gian ít hơn thời gian khi đi là 20 phút. Tính quãng đường AB?

ĐS:

Bài 13. Hai ca nô cùng khởi hành từ hai bến A, B cách nhau 85 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 1 giờ 40 phút. Tính vận tốc riêng của mỗi ca nô biết rằng vận tốc của ca nô xuôi dòng lớn hơn vận tốc của ca nô ngược dòng là 9 km/h (có cả vận tốc dòng nước) và vận tốc

dòng nước là 3 km/h.

ĐS:

Bài 14. Có hai thùng đựng dầu. Thùng thứ nhất có 120 lít, thùng thứ hai có 90 lít. Sau khi lấy ra ở thùng thứ nhất một lượng dầu gấp ba lượng dầu lấy ra ở thùng thứ hai, thì lượng dầu còn lại trong thùng thứ hai gấp đôi lượng dầu còn lại trong thùng thứ nhất. Hỏi đã lấy ra bao nhiêu lít dầu ở mỗi thùng?

ĐS:

Bài 15. Hai trường A, B có 250 HS lớp 9 dự thi vào lớp 10, kết quả có 210 HS đã trúng tuyển. Tính riêng tỉ lệ đỗ thì trường A đạt 80%, trường B đạt 90%. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu HS lớp 9 dự thi vào lớp 10.

ĐS:

Bài 16. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước sau 2 giờ 55 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất cần ít thời gian hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể.

ĐS:

Bài 17. Hai tổ cùng làm chung một công việc hoàn thành sau 15 giờ. Nếu tổ một làm trong 5 giờ, tổ hai làm trong 3 giờ thì được 30% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ hoàn thành trong bao lâu.

ĐS:

Bài 18.

a)

ĐS:

CHƯƠNG I: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- Định lí Pi-ta-go: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $AB^2 = BC.BH$; $AC^2 = BC.CH$
- $AB.AC = BC.AH$
- $AH^2 = BH.CH$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm. AH là đường cao. Tính BH, CH, AC và AH.

ĐS: $BH = 1,8\text{ cm}$, $CH = 3,2\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$, $AH = 2,4\text{ cm}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 10cm, AB = 8cm. AH là đường cao. Tính BC, BH, CH, AH.

ĐS:

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 12cm. Tính chiều dài hai cạnh góc vuông biết $AB = \frac{2}{3}AC$.

ĐS: $AB = \frac{24\sqrt{13}}{13}(\text{cm})$, $AC = \frac{36\sqrt{13}}{13}(\text{cm})$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Biết BH = 10cm, CH = 42 cm. Tính BC, AH, AB và AC.

ĐS: $BC = 52\text{ cm}$, $AH = 2\sqrt{105}\text{ cm}$, $AB = 2\sqrt{130}\text{ cm}$, $AC = 2\sqrt{546}\text{ cm}$.

Bài 5. Hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = 30cm, đáy nhỏ CD = 10cm và góc A là 60° .

- a) Tính cạnh BC. b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

ĐS:

Bài 6. Cho tứ giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10cm, góc B bằng 60° và góc A là 90° .

- a) Tính đường chéo BD. b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC.
c) Tính HK. d) Vẽ $BE \perp DC$ kéo dài. Tính BE, CE và DC.

ĐS:

Bài 7. Cho đoạn thẳng AB = 2a. Từ trung điểm O của AB vẽ tia $Ox \perp AB$. Trên Ox, lấy điểm D sao cho

$OD = \frac{a}{2}$. Từ B kẻ BC vuông góc với đường thẳng AD.

- a) Tính AD, AC và BC theo a.

- b) Kéo dài DO một đoạn OE = a. Chứng minh bốn điểm A, B, C và E cùng nằm trên một đường tròn.

ĐS:

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh: AM = AN.

HD: $\triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow AM^2 = AC.AD = AB.AE = AN^2$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$ và AH = 420. Tính chu vi tam giác ABC.

ĐS: $P_{ABC} = 2030$. Đặt $AB = 20k, AC = 21k \Rightarrow BC = 29k$. Từ $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow k = 29$.

Bài 10. Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết $AB = 2\sqrt{13}, OA = 6$, tính diện tích hình thang ABCD.

ĐS: $S = 126,75$. Tính được: $OB = 4, OD = 9, OC = 13,5$.

II. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. Định nghĩa: Cho tam giác vuông có góc nhọn α .

$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$

Chú ý:

- Cho góc nhọn α . Ta có: $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1$.
- Cho 2 góc nhọn α, β . Nếu $\sin \alpha = \sin \beta$ (hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$, hoặc $\tan \alpha = \tan \beta$, hoặc $\cot \alpha = \cot \beta$) thì $\alpha = \beta$.

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau:

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

3. Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

Tỉ số LG α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Một số hệ thức lượng giác

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết BH = 64cm và CH = 81cm. Tính các cạnh và góc tam giác ABC.

ĐS:

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các tỉ số lượng giác của góc B khi:

- a) BC = 5cm, AB = 3cm. b) BC = 13 cm, AC = 12 cm. c) AC = 4cm, AB = 3cm.

ĐS: a) $\sin B = 0,8$; $\cos B = 0,6$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 10cm và AC = 15cm.

- a) Tính góc B. b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI.
c) Vẽ $AH \perp BI$ tại H. Tính AH.

ĐS:

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$.

b) $\sin^2 10^\circ - \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ - \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$.

c) $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + \sin 30^\circ$ d) $\sin 35^\circ + \sin 67^\circ - \cos 23^\circ - \cos 55^\circ$

e) $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$ f) $\sin 20^\circ - \tan 40^\circ + \cot 50^\circ - \cos 70^\circ$

ĐS: a) 3,5 b) $-\frac{3}{4}$ c) 0,5 d) 0 e) 2 f) 0.

Bài 5. Cho biết một tỉ số lượng giác của góc nhọn α , tính các tỉ số lượng giác còn lại của α :

- a) $\sin \alpha = 0,8$ b) $\cos \alpha = 0,6$ c) $\tan \alpha = 3$ d) $\cot \alpha = 2$

ĐS: a) $\cos \alpha = 0,6$ b) $\sin \alpha = 0,8$

Bài 6. Cho góc nhọn α . Biết $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $\cot \alpha$.

ĐS: $\cot \alpha = \frac{4}{3}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết $\cos A = \frac{5}{13}$. Tính $\tan B$.

ĐS: $\tan B = \frac{5}{12}$.

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$ b) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ c) $\sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$

d) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ e) $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha$ f) $\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha$

ĐS: a) $\sin^2 \alpha$ b) 2 c) $\sin^3 \alpha$ d) 1 e) $\sin^2 \alpha$ f) 1.

Bài 9. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ b) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 4$

ĐS:

Bài 10. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C.

a) Chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

b) Có thể xảy ra đẳng thức $\sin A = \sin B + \sin C$ không?

ĐS: a) Vẽ đường cao AH. Chú ý: $\sin A = \frac{BH}{AB}$, $\sin C = \frac{BH}{BC}$. b) không.

Bài 11.

a)

ĐS:

III. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C; \quad c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C; \quad c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$

Bài 1. Giải tam giác vuông ABC, biết $\hat{A} = 90^\circ$ và:

a) $a = 15\text{cm}; b = 10\text{cm}$

b) $b = 12\text{cm}; c = 7\text{cm}$

ĐS: a) $\hat{B} \approx 42^\circ, \hat{C} \approx 48^\circ, c \approx 11,147\text{cm}$ b) $\hat{B} \approx 60^\circ, \hat{C} \approx 30^\circ, a \approx 14\text{cm}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS: $S \approx 509\text{cm}^2$. Vẽ đường cao AH. Tính AH, HB, HC.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{C} = 40^\circ, AB = 4\text{cm}, AD = 3\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác.

ĐS: $S = 17\text{cm}^2$. Vẽ $BH \perp CD$. Tính DH, BH, CH.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC = 4\text{cm}, BD = 5\text{cm}, \widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

ĐS: $S \approx 8\text{cm}^2$. Vẽ $AH \perp BD, CK \perp BD$. Chú ý: $AH = OA \cdot \sin 50^\circ, CK = OC \cdot \sin 50^\circ$.

Bài 5. Chứng minh rằng:

a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

ĐS: a) Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC. Vẽ đường cao CH. $CH = AC \cdot \sin \alpha$

Bài 6.

a)

ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 21m$, $AC = 28m$, $BC = 35m$.

- a) Chứng minh tam giác ABC vuông. b) Tính $\sin B, \sin C$.

ĐS:

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Cho biết $HB = 112$, $HC = 63$.

- a) Tính độ dài AH. b) Tính độ dài AD.

ĐS: a) $AH = 84$ b) $AD = 60\sqrt{2}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 5$, $CH = 6$.

- a) Tính AB, AC, BC, BH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS: a) $AB = \frac{5\sqrt{61}}{6}$, $AC = \sqrt{61}$, $BH = \frac{25}{6}$ b) $S = \frac{305}{12}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 16$, $BH = 25$.

- a) Tính AB, AC, BC, CH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS:

Bài 5. Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc với nhau tại O.

- a) Chứng minh hình thang này có chiều cao bằng trung bình nhân của hai đáy.
b) Cho $AB = 9$, $CD = 16$. Tính diện tích hình thang ABCD.
c) Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

ĐS: a) $Vẽ AE \parallel BD \Rightarrow AB = ED$ và $AE \perp AC$. b) $S = 150$

c) $OA = 7,2$; $OB = 5,4$; $OC = 12,8$; $OD = 9,6$.

Bài 6. Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 10$, $CD = 27$, $AC = 12$, $BD = 35$.

ĐS: $S = 210$. $Vẽ BE \parallel AC (E \in CD) \Rightarrow DE^2 = BD^2 + BE^2$.

Bài 7. Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

- a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.
b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

ĐS: a) $Tính được AB = 24cm, AC = 45cm, BC = 51cm \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

b) $r = 9cm$. Gọi O là giao điểm ba đường phân giác. $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $\widehat{A} = 48^\circ$; $AH = 13cm$. Tính chu vi ΔABC

ĐS: $BC \approx 11,6cm$; $AB = AC \approx 14,2cm$.

Bài 9. Cho ΔABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = 3a$. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EC$.

- a) Chứng minh $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$. b) Chứng minh ΔBDE đồng dạng ΔCDB .

c) Tính tổng $\widehat{AFB} + \widehat{BCD}$.

ĐS: a) $DB^2 = 2a^2 = DE \cdot DC$ c) $\widehat{AEB} + \widehat{BCD} = \widehat{ADB} = 45^\circ$.

Bài 10. Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết $AD = 5a$, $AC = 12a$.

- a) Tính $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$. b) Tính diện tích hình thang ABCD.

$$DS: a) \frac{17}{7} b)$$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua điểm B. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HE = 2HA. Gọi I là hình chiếu của D trên HE.

a) Tính AB, AC, HC, biết AH = 4cm, HB = 3cm. b) Tính $\widehat{IED}$, $\widehat{HCE}$.

c) Chứng minh $\widehat{IED} = \widehat{HCE}$.

d) Chứng minh: $DE \perp EC$.

$$DS: a) AB = 5 \text{ cm}, AC = \frac{20}{3} \text{ cm}, HC = \frac{16}{3} \text{ cm} \quad b) \tan \widehat{IED} = \tan \widehat{HCE} = \frac{3}{2}$$

$$d) \widehat{DEC} = \widehat{IED} + \widehat{HEC} = 90^\circ.$$

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AH = h$. Chứng minh rằng tam giác có các cạnh $a - h$; $b - c$; h là một tam giác vuông.

$$DS: \text{Chứng minh } (b - c)^2 + h^2 = (a - h)^2.$$

Bài 13. Cho tam giác nhọn ABC, diện tích bằng 1. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

$$a) S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C. \quad b) S_{DEF} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C.$$

$$DS: a) \text{Chứng minh } \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A \quad b) S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE})$$

Bài 14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $\sin C = \frac{1}{4 \cos B}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B và C.

$$DS: \cos B = \frac{1}{2}; \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin C = \frac{1}{2}; \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 15. Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CL. Chứng minh:

$$a) \triangle ANL \sim \triangle ABC$$

$$b) AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

DS:

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 15^\circ$, $BC = 4 \text{ cm}$.

a) Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Tính $\widehat{AMH}$, AH, AM, HM, HC.

$$b) \text{Chứng minh rằng: } \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$DS: a) \widehat{AMH} = 30^\circ; AH = 1 \text{ cm}; AM = 2 \text{ cm}; HM = \sqrt{3} \text{ cm}; HC = 2 + \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$b) \cos 15^\circ = \cos C = \frac{CH}{AC}.$$

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{A} = 36^\circ$, $BC = 1 \text{ cm}$. Kẻ phân giác CD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC.

a) Tính AD, DC.

b) Kẻ $CK \perp BD$. Giải tam giác BKC.

$$c) \text{Chứng minh rằng } \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

DS:

Bài 18. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^0$, $\widehat{B} = 60^0$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AD$ (D thuộc AC). Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt BC tại F. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC.

a) Chứng minh rằng tam giác ABE đều. Tính AH.

b) Chứng minh $\widehat{EAD} = \widehat{EAF} = 45^0$.

c) Tính các tỉ số lượng giác của góc AED và góc AEF.

d) Chứng minh $\triangle AED = \triangle AEF$. Từ đó suy ra $AD = AF$.

e) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{4}{3}$.

ĐS:

Bài 19. Giải tam giác ABC, biết:

a) $\widehat{A} = 90^0$, $BC = 10\text{cm}$, $\widehat{B} = 75^0$

b) $\widehat{BAC} = 120^0$, $AB = AC = 6\text{cm}$.

c) Trung tuyến ứng với cạnh huyền $m_a = 5$, đường cao $AH = 4$.

d) Trung tuyến ứng với cạnh huyền $m_a = 5$, một góc nhọn bằng 47^0 .

ĐS:

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

a) Giải tam giác vuông ABC.

b) Tính độ dài AH và chứng minh: $EF = AH$.

c) Tính: $EA \cdot EB + AF \cdot FC$.

ĐS: a) $AC = 3\sqrt{3}(\text{cm})$, $\widehat{B} = 60^0$, $\widehat{C} = 30^0$ b) $AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$ c) $\frac{27}{4}$.

Bài 21.

a)

ĐS:

CHƯƠNG II: ĐƯỜNG TRÒN

I. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường tròn

Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M .

- M nằm trên đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM = R$.
- M nằm trong đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM < R$.
- M nằm ngoài đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM > R$.

3. Cách xác định đường tròn

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có **tâm đối xứng**. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có **trục đối xứng**. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài 2. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh $EFGH$ là hình chữ nhật, $\triangle OBE$ là tam giác đều.

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$. Đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và cắt AC tại F . Chứng minh E, F lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD .

HD: Chứng minh E, F là giao điểm của các đường trung trực tương ứng.

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ đường tròn (I) đường kính OA . Bán kính OC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại D . Vẽ $CH \perp AB$. Chứng minh tứ giác $ACDH$ là hình thang cân.

HD: Chứng minh $\triangle ADO = \triangle CHO \Rightarrow OD = OH, AD = CH$. Chứng minh $HD \parallel AC$.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$) có $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^\circ, CD = 2AD$. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

HD: Chứng minh $IA = IB = IC = ID$, với I là trung điểm của CD .

Bài 6. Cho hình thoi $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA . Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

HD:

Bài 7. Cho hai đường thẳng xy và $x'y'$ vuông góc nhau tại O . Một đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$ chuyển động sao cho A luôn nằm trên xy và B trên $x'y'$. Hỏi trung điểm M của AB chuyển động trên đường nào?

HD:

Bài 8. Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK .

a) Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.

b) So sánh KH và BC .

HD:

Bài 9.

a)

HD:

II. DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:
 - Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
 - Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn:
 - Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
 - Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và ba dây AB, AC, AD . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD . Chứng minh rằng $MN \leq 2R$.

HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính $AB \Rightarrow MN \leq AB$.

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \leq 2R^2$.

HD: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$.

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB không đi qua tâm. Gọi M là trung điểm của AB . Qua M vẽ dây CD không trùng với AB . Chứng minh rằng điểm M không là trung điểm của CD .

HD: Dùng phương pháp phản chứng. Giả sử M là trung điểm của $CD \Rightarrow$ vô lý.

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB . Lấy điểm E đối xứng với A qua M .

a) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?

b) Giả sử $R = 6,5\text{cm}$, $MA = 4\text{cm}$. Tính CD.

c)* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh: $MH \cdot MK = \frac{MC^3}{2R}$.

HD: a) ACED là hình thoi b) $CD = 12\text{cm}$

$$c) MH = \frac{MA \cdot MC}{AC}, MK = \frac{MB \cdot MC}{BC}$$

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2\text{cm}$, $IB = 4\text{cm}$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

HD: $OH = OK = 1\text{cm}$.

Bài 6. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh $CM = DN$.

b) Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

HD: a) Vẽ $OH \perp CD \Rightarrow H$ là trung điểm của CD và MN.

b) Đặt $OH = x$. C. minh $\triangle HOM$ vuông cân $\Rightarrow HM = x$. Do $CM = MN = ND \Rightarrow HC = 3x$

$$\Rightarrow OM = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a) Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn 30° . Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

HD: a) Vẽ $OH \perp CD$. Đường thẳng OH cắt EF tại K $\Rightarrow OH = OK \Rightarrow CD = EF$.

$$b) OH = \frac{R}{4} \Rightarrow HK = \frac{R}{2}. \text{ Vì } \widehat{E} = 90^\circ \text{ nên CF là đường kính. } EF^2 = \frac{15R^2}{4}. S = \frac{\sqrt{15}R^2}{4}.$$

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16\text{cm}$ và $MH = 4\text{cm}$.

HD:

Bài 9. Cho đường tròn (O; 12cm) có đường kính CD. Vẽ dây MN qua trung điểm I của OC sao cho góc NID bằng 30° . Tính MN.

HD:

Bài 10.

a)

HD:

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng Δ . Đặt $d = d(O, \Delta)$.

VTTĐ của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng đgl tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn đgl tiếp điểm.

2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

- Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác đgl **đường tròn nội tiếp** tam giác, còn tam giác đgl **ngoại tiếp** đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia đgl **đường tròn bàng tiếp** tam giác.
- Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C , hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

Bài 1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).
 - Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- HD:* a) D, E nằm trên đường tròn đường kính AH .

b) Chứng minh $\widehat{OEA} = \widehat{OAE} = \widehat{ECM} = \widehat{CEM} \Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{CEM} + \widehat{CEO} = \widehat{OEA} + \widehat{CEO} = 90^\circ$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia BA, lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng:

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O). b) $MC^2 = 3R^2$.

HD: a) Chứng minh $\triangle COM$ vuông tại C. b) $MC^2 = OM^2 - OC^2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 8$, $AC = 15$. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD, cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài HE.

HD: a) Gọi O và F là lần lượt là trung điểm của CD và AE. Chứng minh $DE \parallel AB$, $HF \perp AE$

$\Rightarrow \widehat{HEO} = 90^\circ$. b) $HE = AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{120}{17}$.

Bài 4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên tia

OB lấy điểm C sao cho $BC = BO$. Chứng minh rằng $\widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{BMA}$.

HD: Chú ý $\triangle OMC$ cân tại M.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC.

Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$ khi và chỉ khi $OA = 2R$.

HD: Chú ý $\triangle ABO$ vuông tại B.

Bài 6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác AMON là hình thoi.

b) Điểm A phải cách điểm O một khoảng bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O).

HD: a) Chứng minh $ON \parallel AB$, $OM \parallel AC$. b) $OA = 2R$.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn vẽ từ A và C cắt nhau tại M. Trên tia AM lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD là hình bình hành.

b) Ba đường thẳng AC, BD, OM đồng quy.

HD: a) Chứng minh $AD \parallel BC$ (cùng vuông góc với OA).

b) Gọi E là giao điểm của OM và AC $\Rightarrow E$ là trung điểm của AC.

Bài 8. Cho đường tròn (O; r) nội tiếp tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $r = p - a$, trong đó p là nửa chu vi tam giác, a là độ dài cạnh huyền.

HD: Gọi D, E, F là các tiếp điểm của (O) với các cạnh tam giác $\Rightarrow AEOF$ là hình vuông.

Bài 9. Chứng minh rằng diện tích tam giác ngoại tiếp một đường tròn được tính theo công thức: $S = pr$, trong đó p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp.

HD: Diện tích tam giác bằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ.

Bài 10. Cho đường tròn (O), dây cung CD. Qua O vẽ $OH \perp CD$ tại H, cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại M. Chứng minh MD là tiếp tuyến của (O).

HD:

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tia $Ax \perp AB$ và $By \perp AB$ ở cùng phía nửa đường tròn. Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại I cắt Ax tại C và By tại D. Chứng minh rằng $AC + BD = CD$.

HD:

Bài 12. Cho đường tròn (O; 5cm). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho $MA \perp MB$ tại M.

a) Tính MA và MB.

b) Qua trung điểm I của cung nhỏ AB, vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB tại C và D. Tính CD.

HD:

Bài 13. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18cm, tính độ dài dây AB.

HD: $AB = 6(cm)$.

Bài 14.

a)

HD:

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Tính chất đường nối tâm

- Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r). Đặt $OO' = d$.

VTTĐ của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	$d = R + r$ $d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau: – Ở ngoài nhau – (O) đựng (O')	0	$d > R + r$ $d < R - r$

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.

Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

Bài 1. Cho hai đường tròn $(A; R_1)$, $(B; R_2)$ và $(C; R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Tính R_1 , R_2 và R_3 biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$ và $BC = 7\text{cm}$.

HD: $R_1 = 2(\text{cm})$, $R_2 = 3(\text{cm})$, $R_3 = 4(\text{cm})$.

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và $(O'; 5\text{cm})$ cắt nhau tại A và B. Tính độ dài dây cung chung AB biết $OO' = 8\text{cm}$.

HD: $AB = 6(\text{cm})$.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B với $R > R'$. Vẽ các đường kính AOC và AO'D. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

HD: Chứng minh BC, BD cùng song song với OO' hoặc chứng minh $\widehat{CBD} = 180^\circ$.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến chung MAN sao cho $MA = AN$. Đường vuông góc với MN tại A cắt OO' tại I. Chứng minh I là trung điểm của OO' .

HD:

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại A. Gọi M là giao điểm một trong hai tiếp tuyến chung ngoài BC và tiếp tuyến chung trong. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO' tại M.

HD: Chứng minh $IM = \frac{OO'}{2}$ và $IM \perp BC$.

Bài 6. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ tiếp xúc ngoài nhau tại M. Hai đường tròn (O) và (O') cùng tiếp xúc trong với đường tròn lớn $(O''; R'')$ lần lượt tại E và F. Tính bán kính R'' biết chu vi tam giác $OO'O''$ là 20cm .

HD:

Bài 7. Cho đường tròn $(O; 9\text{cm})$. Vẽ 6 đường tròn bằng nhau bán kính R đều tiếp xúc trong với (O) và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường khác bên cạnh nó. Tính bán kính R.

HD:

Bài 8. Cho hai đường tròn đồng tâm. Trong đường tròn lớn vẽ hai dây bằng nhau $AB = CD$ và cùng tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại M và N sao cho $AB \perp CD$ tại I. Tính bán kính đường tròn nhỏ biết $IA = 3\text{cm}$ và $IB = 9\text{cm}$.

HD:

Bài 9. Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

HD: Tam giác đều cạnh $R \Rightarrow S = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$.

Bài 10. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A. Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) tại B và cắt đường tròn (O') tại C. Từ B vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O) . Từ C vẽ đường thẳng uv song song với xy. Chứng minh rằng uv là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

HD: Xét hai trường hợp tiếp xúc ngoài và trong. Chứng minh $OB \parallel O'C \Rightarrow O'C \perp uv$.

Bài 11. Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn $(D; DC)$ và đường tròn (O) đường kính BC, chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng:

a) N là trung điểm của AD.

b) M là trung điểm của AB.

HD: a) $\triangle ABN = \triangle CDO \Rightarrow AN = CO$ b) $\triangle BCM = \triangle CDO \Rightarrow BM = CO$.

Bài 12. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox và Oy. Vẽ đường tròn (I; OK) cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn (K; OI) cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác OMCN là hình vuông.

c) Gọi giao điểm của hai đường tròn (I), (K) là A và B. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ (không đổi). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

HD: a) Xét $\triangle OIK \Rightarrow R - r < d < R + r$ b) $\widehat{O} = \widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ, OM = ON$.

c) Gọi $L = KB \cap MC, P = AB \cap MC$. OKBI là hình chữ nhật, BLMI là hình vuông. $\triangle BLP = \triangle AKOI \Rightarrow LP = OI \Rightarrow MP = OM = MC \Rightarrow P \equiv C$.

d) $OM = a$. Hình vuông OMCN cạnh a, cố định $\Rightarrow AB$ đi qua điểm C cố định.

Bài 13.

a)

HD:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ đường phân giác BI.

a) Chứng minh rằng đường tròn (I; IA) tiếp xúc với BC.

b) Cho biết $AB = a$. Chứng minh rằng $AI = (\sqrt{2} - 1)a$. Từ đó suy ra $\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$.

HD: a) Vẽ $ID \perp BC \Rightarrow IA = ID$

b) Xét $\triangle ABI \Rightarrow AI = a \cdot \tan 22^\circ 30'$. $\triangle DIC$ vuông cân $\Rightarrow AI = DC = (\sqrt{2} - 1)a$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A vẽ tiếp tuyến xy. Từ một điểm M trên xy vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Hai đường cao AD và BE của tam giác MAB cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tứ giác AOBH là hình thoi.

c) Khi điểm M di động trên xy thì điểm H di động trên đường nào?

HD: a) Chứng minh $\triangle MAB$ cân, MH, MO là các tia phân giác của $\widehat{AMB}$.

b) Chứng minh AOBH là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

c) H di động trên đường tròn (A; R).

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Vẽ AD và BC vuông góc với xy.

- a) Chứng minh rằng $MC = MD$.
 b) Chứng minh rằng $AD + BC$ có giá trị không đổi khi điểm M di động trên nửa đường tròn.
 c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.
 d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

HD: a) OM là đường trung bình của hình thang ABCD.

b) $AD + BC = 2R$ c) Vẽ $ME \perp AB$. $\triangle BME = \triangle BMC \Rightarrow ME = MC = MD$

d) $S = 2R.ME \leq 2R.MO \Rightarrow S$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là đầu mút của bán kính $OM \perp AB$.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động D, E sao cho $\widehat{DOE} = 60^\circ$.

- a) Chứng minh rằng tích $BD.CE$ không đổi.
 b) Chứng minh $\triangle BOD \neq \triangle OED$. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE.
 c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

HD: a) $\triangle BOD \neq \triangle CEO \Rightarrow BD.CE = \frac{BC^2}{4}$ b) $\frac{BD}{OD} = \frac{OB}{OE} \Rightarrow \triangle BOD \neq \triangle OED$

c) Vẽ $OK \perp DE$. Gọi H là tiếp điểm của (O) với cạnh AB. Chứng minh $OK = OH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB và một điểm E di động trên nửa đường tròn đó (E không trùng với A và B). Vẽ các tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Tia AE cắt By tại C, tia BE cắt Ax tại D.

- a) Chứng minh rằng tích $AD.BC$ không đổi.
 b) Tiếp tuyến tại E của nửa đường tròn cắt Ax, By theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AB, CD đồng quy hoặc song song với nhau.
 c) Xác định vị trí của điểm E trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác ABCD nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

HD: a) $\triangle ABD \neq \triangle BCA \Rightarrow AD.BC = AB^2$

b) $\triangle MAE$ cân $\Rightarrow \triangle MDE$ cân $\Rightarrow MD = ME = MA$. Tương tự $NC = NB = NE$. Sử dụng bổ đề hình thang $\Rightarrow đpcm$.

c) $S = 2R.MN \Rightarrow S$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN \perp AD \Leftrightarrow OE \perp AB$. $S_{\min} = 4R^2$.

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, đường tròn (O') tiếp xúc với AB tại B. Hai đường tròn này luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Hỏi tiếp điểm M của hai đường tròn di động trên đường nào?

HD: Từ M vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, cắt AB tại I. Chứng minh $IA = IB = IM$. Từ đó suy ra M di động trên đường tròn tâm I đường kính AB.

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) nội tiếp $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của AB, AC, BC với (O). Chứng minh rằng: $P_{\triangle ABC} = 2(AM + BP + NC)$.

HD:

Bài 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh $CH = DK$.

HD: Vẽ $EH \perp CD$. Chứng minh $EH = EK \Rightarrow CH = DK$.

Bài 9. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc $\widehat{AMB} = 40^\circ$.

a) Tính góc $\widehat{AOB}$.

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

HD: a) $\widehat{AOB} = 140^\circ$ b) Chứng minh $\widehat{NOM} = \widehat{NMO}$.

Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh: $MC \cdot MD = OM^2$.

c) Cho biết $OC = BA = 2R$, tính AC và BD theo R.

HD: a) $OC \perp OD$ c) $AC = R\sqrt{3}$, $BD = MD = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Bài 11. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O'). Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N.

a) Đường thẳng CM cắt (O') tại P. Chứng minh: $OM \parallel BP$.

b) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh tam giác OCD là tam giác cân.

HD: a) $OM \perp MC$, $BP \perp MC$ b) $CD \parallel OM$; $\triangle OCD$ cân tại D.

Bài 12. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'; R'). Biết $R = 12\text{cm}$, $R' = 5\text{cm}$.

a) Chứng minh: $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Tính độ dài các đoạn thẳng OO' , AB.

HD: a) $O'A \perp OA$ b) $OO' = 13(\text{cm})$; $AB = \frac{120}{13}(\text{cm})$.

Bài 13. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 6\text{cm}$ và một điểm A cách O một khoảng 10cm . Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

a) Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.

b) Vẽ cát tuyến ACD, gọi I là trung điểm của đoạn CD. Hỏi khi C chạy trên đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào?

HD:

Bài 14. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r). Dây AB của (O; R) tiếp xúc với (O; r). Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O; r) cắt (O; R) tại C và D (D ở giữa E và C).

a) Chứng minh: $EA = EC$.

b) Chứng minh: EO vuông góc với BD.

c) Điểm E chạy trên đường nào khi dây AB của (O; R) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (O; r)?

HD:

Bài 15. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

a) Khi $AH = 2\text{cm}$, $MH = 4\text{cm}$, hãy tính độ dài các đoạn thẳng AB, MA, MB.

b) Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O). Hãy xác định vị trí của M để biểu thức:

$$\frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2} \text{ có giá trị nhỏ nhất.}$$

c) Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến của (O) tại A ở D, OD cắt AM tại I. Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

HD:

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Tính số đo góc $\widehat{ABD}$?

b) Tứ giác BHCD là hình gì? Vì sao?

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $2OM = AH$.

HD: a) $\widehat{ABD} = 90^\circ$ b) BHCD là hình bình hành.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) ở D.

a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không? Vì sao?

b) Chứng minh: $BC^2 = 4AH.DH$.

c) Cho $BC = 24\text{cm}$, $AB = 20\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn (O).

HD:

Bài 18. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H.

a) Tứ giác ACOD là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D, O, M thẳng hàng.

d) Chứng minh: $CD^2 = 4 AH. HB$.

HD: a) ACOD là hình thoi.

Bài 19. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).

b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB.

c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo góc CAB (làm tròn đến độ).

d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

HD:

Bài 20. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

b) Chứng minh AH vuông góc BC.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

HD: a) $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^\circ$ b) H là trực tâm $\triangle ABC$ c) $NK \perp NO$ (K là trung điểm của AH).

Bài 21. Cho đường tròn tâm $(O; R)$ đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho góc $\widehat{MAB} = 60^\circ$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H .

- Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn $(B; BM)$.
- Chứng minh $MN^2 = 4AH \cdot HB$.
- Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.
- Tia MO cắt đường tròn (O) tại E , tia MB cắt (B) tại F . Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

HD:

Bài 22. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cách O một khoảng bằng $2R$, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

- Tính số đo các góc của tam giác OAB .
- Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA . Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- AO cắt đường tròn (O) tại G . Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC .

HD: a) $\widehat{OBA} = 90^\circ$, $\widehat{OAB} = 30^\circ$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Bài 23. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

- Chứng minh $OA \perp BC$ và tính tích $OH \cdot OA$ theo R
- Kẻ đường kính BD của đường tròn (O) . Chứng minh $CD \parallel OA$.
- Gọi E là hình chiếu của C trên BD , K là giao điểm của AD và CE . Chứng minh K là trung điểm CE .

HD:

Bài 24. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
- Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.
- Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O) .

HD: a) $BOCH$ là hình bình hành và $OB = OC$ b) H là trực tâm $\triangle ABC$ c) $OA = 2R$

Bài 25. Cho đường tròn $(O; 3\text{cm})$ và điểm A có $OA = 6\text{cm}$. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

- Tính độ dài OH .
- Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E . Tính chu vi tam giác ADE .
- Tính số đo góc $\widehat{DOE}$.

HD: a) $OH = 1,5(\text{cm})$ b) $AB = 3\sqrt{3}(\text{cm})$, $P_{ADE} = 2AB = 6\sqrt{3}(\text{cm})$ c) $\widehat{DOE} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 60^\circ$.

Bài 26. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

- a) Tính số đo góc MON.
- b) Chứng minh $MN = AM + BN$.
- c) Tính tích AM. BN theo R.

HD:

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

- a) Chứng minh $AD.AB = AE.AC$.
- b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).
- c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH. Giả sử $AB = 6\text{ cm}, AC = 8\text{ cm}$. Tính độ dài PQ.

HD:

Bài 28. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O'). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO', Q là điểm đối xứng với N qua OO'. Chứng minh rằng:

- a) MNQP là hình thang cân.
- b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O').
- c) $MN + PQ = MP + NQ$.

HD:

Bài 29.

- a)

HD:

CHƯƠNG III GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

I. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

1. Góc ở tâm

- Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn đgl **góc ở tâm**.
- Nếu $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì cung nằm bên trong góc đgl **cung nhỏ**, cung nằm bên ngoài góc đgl **cung lớn**.
- Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn.
- Cung nằm bên trong góc đgl **cung bị chắn**. Góc bẹt **chắn nửa đường tròn**.
- Kí hiệu cung AB là $\widehat{AB}$.

2. Số đo cung

- Số đo của cung AB được kí hiệu là $s\widehat{AB}$.
 - Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
 - Số đo của cung lớn bằng **hiệu** giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).
 - Số đo của nửa đường tròn bằng 180° . Cung cả đường tròn có số đo 360° .
- Cung không có số đo 0° (cung có 2 mút trùng nhau).

3. So sánh hai cung

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung đgl bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn đgl cung lớn hơn.

4. Định lí

Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì $s\widehat{AB} = s\widehat{AC} + s\widehat{CB}$.

Bài 1. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

ĐS: $90^\circ; 270^\circ$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây AB sao cho số đo của cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{2}$ số đo của cung lớn AB. Tính diện tích của tam giác AOB.

ĐS: $S = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M.

Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C.

- a) Chứng minh rằng $\widehat{CA} = \widehat{CB}$. b) Tính số đo của hai cung AB.

HD: b) $60^\circ; 300^\circ$.

Bài 4. Cho $(O; 5\text{cm})$ và điểm M sao cho $OM = 10\text{cm}$. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB. Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

HD: 120° .

Bài 5. Cho tam giác đều ABC, vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại D và AC tại E. So sánh các cung BD, DE và EC.

HD: $\widehat{BD} = \widehat{DE} = \widehat{EC}$.

Bài 6. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; R')$ với $R > R'$. Qua điểm M ở ngoài $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến với $(O; R')$. Một tiếp tuyến cắt $(O; R)$ tại A và B (A nằm giữa M và B); một tiếp tuyến cắt $(O; R)$ tại C và D (C nằm giữa D và M). Chứng minh hai cung AB và CD bằng nhau.

HD:

Bài 7.

a)

HD:

II. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

1. Định lí 1

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

3. Bổ sung

- a) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
b) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.

c) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Biết $\widehat{A} = 50^\circ$, hãy so sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

$$HD: \hat{B} = \hat{C} > \hat{A} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB} > \widehat{BC}.$$

Bài 2. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Vẽ các đường kính AOE, AO'F và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại một điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

HD: Chứng minh E, B, F thẳng hàng; $BC \parallel AD$.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho số đo $\widehat{BM} < 90^0$. Vẽ dây MD song song với AB. Dây DN cắt AB tại E. Từ E vẽ một đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng DM tại C. Chứng minh rằng:

- a) $AB \perp DN$ b) BC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

HD:

Bài 4. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD song song với nhau. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc AC tại M và BD tại N. So sánh hai cung AC và BD.

 $HD:$

Bài 5. Cho đường tròn (O) và dây AB chia đường tròn thành hai cung thỏa: $\widehat{AmB} = \frac{1}{3} \widehat{AnB}$.

- a) Tính số đo của hai cung $\widehat{AmB}$, $\widehat{AnB}$.

- b) Chứng minh khoảng cách từ tâm O đến dây AB là $\frac{AB}{2}$.

HD:

Bài 6. Trên đường tròn (O) vẽ hai cung AB và CD thỏa: $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$. Chứng minh: $AB < 2.CD$.

HD:

Bài 7.

HD:

III. GÓC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

Cung nằm bên trong góc đgl cung bị chắn.

2. Định lí

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả

Trong một đường tròn:

- a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng 60° .

- a) So sánh các góc của tam giác ABC.
- b) Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC. Hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tia CI là tia phân giác của góc ACB.

HD: a) $\widehat{B} = 30^\circ < \widehat{A} = 60^\circ < \widehat{C} = 90^\circ$

b) Chứng minh các tia AN, BM là các tia phân giác của các góc A và B.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

- a) Tam giác DBE cân.
- b) $\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$.

HD: a) $\widehat{DB} = \widehat{DE} \Rightarrow DB = DE$ b) $\widehat{CBE} = \widehat{DAE}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ đường kính MN $\perp$ BC (điểm M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng các tia AM, AN lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

HD: $MN \perp BC \Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{MC}$.

Bài 4. Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI.

- a) Chứng minh rằng ba điểm A, O, B thẳng hàng.
- b) Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB.
- c*) Giả sử MA = 12 cm, MB = 16 cm, tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

HD: a) $\widehat{AOB} = 180^\circ$ b) AK, BI là các đường phân giác của $\triangle MAB$

c) $AB = 20$ cm. Chứng minh $r = p - a \Rightarrow r = 4$ cm.

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên một nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm M, I, N thẳng hàng.
- b) $ID \perp MN$.
- c) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên.

HD: a) $\widehat{MCN} = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính.

b) Chứng minh O, I, C thẳng hàng; $\widehat{INC} = \widehat{OBC} \Rightarrow MN \parallel AB; ID \perp AB$.

c) Gọi E là giao điểm của đường thẳng CD với $(O) \Rightarrow \widehat{EA} = \widehat{EB} \Rightarrow E$ cố định.

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính AF .

a) Tứ giác $BFCH$ là hình gì?

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng $OM = \frac{1}{2}AH$.

HD: a) Chứng minh $\widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^\circ \Rightarrow CE \parallel BF, BD \parallel CF \Rightarrow BFCH$ là hình bình hành.

b) Dùng tính chất hai đường chéo của hình bình hành.

c) Dùng tính chất đường trung bình của tam giác AHF .

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB , M là điểm chính giữa của một nửa đường tròn, C là điểm bất kì trên nửa đường tròn kia, CM cắt AB tại D . Vẽ dây AE vuông góc với CM tại F .

a) Chứng minh rằng tứ giác $ACEM$ là hình thang cân.

b) Vẽ $CH \perp AB$. Chứng minh rằng tia CM là tia phân giác của góc $\widehat{HCO}$.

c) Chứng minh rằng $CD \leq \frac{1}{2}AE$.

HD: a) Chứng minh $\triangle FAC$ và $\triangle FEM$ vuông cân tại $F \Rightarrow AE = CM$;

$\widehat{CAE} = \widehat{AEM} = 45^\circ \Rightarrow AC \parallel ME \Rightarrow ACEM$ là hình thang cân.

b) $\widehat{HCM} = \widehat{OMC} = \widehat{OCM}$

c) $\triangle HDC \sim \triangle ODM \Rightarrow \frac{CD}{MD} = \frac{CH}{MO} = \frac{DH}{DO} \leq 1 \Rightarrow CD \leq MD \Rightarrow CD \leq \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}AE$.

Bài 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Biết $\widehat{A} = a < 90^\circ$. Tính độ dài BC .

HD: Vẽ đường kính BD . $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = a$. $BC = BD \cdot \sin D = 2R \sin a$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) có hai bán kính OA và OB vuông góc. Lấy điểm C trên đường tròn (O)

sao cho $\frac{sd\widehat{AC}}{sd\widehat{BC}} = \frac{4}{5}$. Tính các góc của tam giác ABC .

HD:

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A và có góc A bằng 50° . Nửa đường tròn đường kính AC cắt AB tại D và BC tại H . Tính số đo các cung AD, DH và HC .

HD:

Bài 11. Cho đường tròn (O) có đường kính AB vuông góc dây cung CD tại E . Chứng minh rằng:

$$CD^2 = 4AE \cdot BE.$$

HD:

Bài 12.

a)

HD:

IV. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

1. Định lý

Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

2. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

3. Định lý (bổ sung)

Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của C trên AB.

a) Chứng minh rằng tia CA là tia phân giác của góc MCH.

b) Giả sử $MA = a$, $MC = 2a$. Tính AB và CH theo a .

HD: a) $\widehat{ACH} = \widehat{ACM} = \widehat{B}$

b) Chứng minh $MA.MB = MC^2 \Rightarrow MB = 4a$, $AB = 3a$. $MC.OC = CH.OM \Rightarrow CH = \frac{6}{5}a$.

Bài 2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn trên các cạnh AB, BC, CA. Gọi M, N, P lần lượt là các giao điểm của đường tròn (O) với các tia OA, OB, OC. Chứng minh rằng các điểm M, N, P lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác ADF, BDE và CEF.

HD: Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường tròn (O') tại D. Vẽ đường tròn (I) qua ba điểm A, C, D, cắt đường thẳng AB tại một điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180^\circ$. b) Tứ giác BCED là hình bình hành.

HD: a) Chứng minh $\widehat{BAC} = \widehat{BCD}$, $\widehat{BAD} = \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \widehat{BCD} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} = 180^\circ$

b) Chứng minh $\widehat{BCD} = \widehat{EDC} (= \widehat{BAC})$, $\widehat{ECD} = \widehat{BDC} (= \widehat{BAD}) \Rightarrow BC \parallel DE$, $BD \parallel CE$.

Bài 4. Trên một cạnh của góc xMy lấy điểm T, trên cạnh kia lấy hai điểm A, B sao cho $MT^2 = MA.MB$. Chứng minh rằng MT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác TAB.

HD: Chứng minh $\triangle MAT \sim \triangle MTB \Rightarrow \widehat{ATM} = \widehat{B} = \frac{1}{2} \widehat{AT}$ $\Rightarrow MT$ là tiếp tuyến.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ dây BC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O'). Vẽ dây BD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = AC \cdot AD$ b) $\frac{BC}{BD} = \sqrt{\frac{AC}{AD}}$.

HD: a) $\triangle ABC \sim \triangle ADB \Rightarrow đpcm$. b) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD}$.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và một điểm M ở bên ngoài đường tròn. Tia Mx quay quanh M, cắt đường tròn tại A và B. Gọi I là một điểm thuộc tia mx sao cho $MI^2 = MA \cdot MB$. Hỏi điểm I di động trên đường nào?

HD: $MI^2 = MA \cdot MB = MI^2 \Rightarrow MI = MT \Rightarrow$ Điểm I di động trên đường tròn (M, MT).

Bài 7. Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C trên (O). Dây cung CB kéo dài gặp tiếp tuyến tại A ở M. So sánh các góc: $\widehat{AMC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$.

HD:

Bài 8. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') ($R > R'$) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Qua A kẻ hai cát tuyến BD và CE ($B, C \in (O')$; $D, E \in (O)$). Chứng minh: $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$.

HD:

Bài 9. Cho đường tròn (O, R) có hai đường kính AB và CD vuông góc. Gọi I là điểm trên cung AC sao cho khi vẽ tiếp tuyến qua I và cắt DC kéo dài tại M thì $IC = CM$.

- a) Tính góc AOI. b) Tính độ dài OM.

HD:

Bài 10.

- a)

HD:

V. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN.

Định lý 1

Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

Định lý 2

Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên các cung nhỏ AB và AC lần lượt lấy các điểm I và K sao cho $\widehat{AI} = \widehat{AK}$. Dây IK cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E.

- a) Chứng minh rằng $\widehat{ADK} = \widehat{ACB}$.
b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì tứ giác DECB là hình thang cân.

HD: a) $\widehat{ADK} = \frac{sđ\widehat{AK} + sđ\widehat{BI}}{2} = sđ\frac{\widehat{AB}}{2} = \widehat{C}$ b) $\widehat{C} = \widehat{B}$.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt đường thẳng AB tại I. Chứng minh rằng:

- a) Các tam giác INE và INF là các tam giác cân. b) $AI = \frac{AE + AF}{2}$.

HD: a) $\widehat{INE} = \frac{1}{2}sd\widehat{CN} = \widehat{E}$ b) $AI = AE - IE, AI = AF + IF \Rightarrow đpcm.$

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E. Dây DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

- a) Tam giác AMN là tam giác cân.
b) Các tam giác EAI và DAI là những tam giác cân.
c) Tứ giác AMIN là hình thoi.

HD: a) $\widehat{DA} = \widehat{DC}, \widehat{EA} = \widehat{EB}, \widehat{FB} = \widehat{FC} \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

b) $\widehat{DAI} = \widehat{DIA} \Rightarrow DA = DI$ c) Chứng minh $NI \parallel AM, MI \parallel AN, AM = AN \Rightarrow đpcm.$

Bài 4. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai tiếp tuyến MB, MC. Vẽ đường kính BD. Hai đường thẳng CD và MB cắt nhau tại A. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

HD: $\widehat{A} = sd\frac{\widehat{CD}}{2} = \widehat{MAC} \Rightarrow MA = MC = MB.$

Bài 5. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai cát tuyến ABC và ADE (B nằm giữa A và C; D nằm giữa A và E). Cho biết $\widehat{A} = 50^\circ, sd\widehat{BD} = 40^\circ$. Chứng minh $CD \perp BE$.

HD: $\widehat{A} = \frac{sd\widehat{CE} - sd\widehat{BD}}{2} \Rightarrow sd\widehat{CE} = 140^\circ$. Gọi $H = CD \cap BE \Rightarrow \widehat{CHE} = \frac{sd\widehat{CE} + sd\widehat{BD}}{2} = 90^\circ$.

Bài 6. Cho 4 điểm A, B, C và D theo thứ tự trên đường tròn (O) sao cho số đo các cung như sau: $sd\widehat{AB} = 40^\circ, sd\widehat{CD} = 120^\circ$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. M là giao điểm của DA và CB kéo dài. Tính các góc CID và AMB.

HD:

Bài 7. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), ta vẽ các cát tuyến MAC và MBD sao cho $\widehat{CMD} = 40^\circ$. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Biết góc $\widehat{AEB} = 70^\circ$, tính số đo các cung AB và CD.

HD:

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một điểm M ở ngoài (O). Vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đi qua O (B nằm giữa M và C). Đường tròn đường kính MB cắt MA tại E. Chứng minh: $sd\widehat{AnC} = sd\widehat{BmA} + sd\widehat{BkE}$ với $\widehat{AnC}, \widehat{BmA}$ và $\widehat{BkE}$ là các cung trong góc AMC.

HD:

Bài 9.

a)

HD:

VI. CUNG CHỨA GÓC

1. Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì quỹ tích các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

Chú ý:

- Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB .
- Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.
- **Đặc biệt:** Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

2. Cách vẽ cung chứa góc α

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB .
- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α .
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- Vẽ cung AmB , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax .

$\widehat{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc α .

3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

- **Phần thuận:** Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H .
- **Phần đảo:** Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T .
- **Kết luận:** Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H .

Bài 1. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây $MN = R$ (điểm M ở trên cung $\widehat{AN}$). Hai dây AN và BM cắt nhau tại I . Hỏi khi dây MN di động thì điểm I di động trên đường nào?

HD: Chứng minh $\triangle AMN$ đều $\widehat{MON} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 120^\circ \Rightarrow I$ nằm trên cung chứa góc 120° dựng trên đoạn AB .

Bài 2. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một dây AC quay quanh A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B ta vẽ hình vuông $ACDE$. Hỏi:

- a) Điểm D di động trên đường nào? b) Điểm E di động trên đường nào?

HD: a) $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 45^\circ \Rightarrow D$ di động trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB (nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C).

b) Vẽ $Ax \perp AB$. DE cắt Ax tại $F \Rightarrow \triangle EAF = \triangle CAB \Rightarrow AF = AB \Rightarrow AF$ cố định. $\widehat{AEF} = 90^\circ \Rightarrow E$ nằm trên đường tròn đường kính AF .

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E , trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF . Tìm quỹ tích của điểm M

khi E di động trên cạnh BC.

HD: Phần thuận: $\triangle CBF = \triangle CDE \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{BME} = 90^\circ \Rightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính BD. Mặt khác $E \rightarrow C$ thì $M \rightarrow C$, $E \rightarrow B$ thì $M \rightarrow B \Rightarrow M$ thuộc cung nhỏ BC.

Phần đảo: DM cắt BC tại E, BM cắt DC tại F. $\triangle CBF = \triangle CDE \Rightarrow CE = CF$.

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là cung nhỏ BC của đường tròn đường kính BD.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB, N thuộc nửa đường tròn đường kính AC).

a) Tứ giác BMNC là hình gì?

b) Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A.

HD: a) BMNC là hình thang vuông

b) Gọi K là trung điểm của BC. Quỹ tích điểm I là cung DAE của đường tròn đường kính AK.

Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AM lấy điểm N. Trên các tia AM, AN và BN lần lượt lấy các điểm C, D, E sao cho $MC = MA$, $ND = NB$, $NE = NA$. Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

HD: $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 45^\circ \Rightarrow C, D, E$ nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BF. Từ một điểm I nằm giữa B và F, vẽ một đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN cắt đường thẳng AI tại một điểm thứ hai là D. Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra $BE \perp CE$.

HD: a) $\widehat{ABE} = \widehat{ADE} \Rightarrow B, D$ thuộc cung chứa góc dựng trên đoạn AE $\Rightarrow A, B, D, E \in (P)$.

b) $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} \Rightarrow A, B, C, D \in (P')$. (P) và (P') có 3 điểm chung A, B, D $\Rightarrow (P) \equiv (P')$
 $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C di động trên (O). Gọi M là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Điểm M di động trên đường nào?

HD:

Bài 8. Dựng tam giác ABC biết $BC = 3\text{cm}$, $\hat{A} = 50^\circ$, $AB = 3,5\text{cm}$.

HD: Bài toán có hai nghiệm hình.

Bài 9. Dựng tam giác ABC biết $BC = 4\text{cm}$, đường cao $BD = 3\text{cm}$ và đường cao $CE = 3,5\text{cm}$.

HD:

Bài 10.

HD:

VII. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn đgl **tứ giác nội tiếp** đường tròn.

2. Định lí

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 .
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.
- Tứ giác ABCD có hai đỉnh C và D sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ thì tứ giác ABCD nội tiếp được.

Chú ý: Trong các tứ giác đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) và $\widehat{A} = a$ ($0^0 < a < 90^0$). Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AC. Vẽ tia $Bx \perp AM$, cắt tia CM tại D.

- a) Tính số đo góc $\widehat{AMD}$. b) Chứng minh rằng $MD = MB$.

HD: a) $\widehat{AMD} = 90^0 - \frac{a}{2}$ b) $\triangle MBD$ cân $\Rightarrow MD = MB$.

Bài 2. Cho tam giác ABC không có góc tù. Các đường cao AH và đường trung tuyến AM không trùng nhau. Gọi N là trung điểm của AB. Cho biết $\widehat{BAH} = \widehat{CAM}$.

- a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp.

- b) Tính số đo của góc $\widehat{BAC}$.

HD: a) $\widehat{AHN} = \widehat{AMN} \Rightarrow AMHN$ nội tiếp b) $\widehat{BAC} = \widehat{ANM} = 90^0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm E di động trên cạnh AB. Qua B vẽ một đường thẳng vuông góc với tia CE tại D và cắt tia CA tại H. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác ADBC nội tiếp.

- b) Góc $\widehat{ADH}$ có số đo không đổi khi E di động trên cạnh AB.

- c) Khi E di động trên cạnh AB thì $BA \cdot BE + CD \cdot CE$ không đổi.

HD: a) $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^0$ b) $\widehat{ADH} = \widehat{ACB}$

- c) Vẽ $EK \perp BC$. $\triangle KBE \sim \triangle ABC \Rightarrow BE \cdot BA = BK \cdot BC$; $\triangle KCE \sim \triangle DCB \Rightarrow CE \cdot CD = CK \cdot CB$.

Bài 4. Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây AC. Từ một điểm D trên AC, vẽ $DE \perp AB$. Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác BCDE nội tiếp. b) $\widehat{AFE} = \widehat{ACE}$.

HD: a) $\widehat{DCB} + \widehat{DEB} = 180^0$ b) $AECF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACE}$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Lấy hai điểm C và D trên nửa đường tròn sao cho $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$. Các tiếp tuyến vẽ từ B và C của nửa đường tròn cắt nhau tại I. Hai tia AC và BD cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

- a) Các tam giác KAB và IBC là những tam giác đều.
b) Tứ giác KIBC nội tiếp.

HD: a) Chứng minh mỗi tam giác có hai góc 60° b) $\widehat{BKC} = \widehat{BIC} = 60^\circ$.

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn. Trên tia Bx lấy hai điểm C và D (C nằm giữa B và D). Các tia AC và BD lần lượt cắt đường tròn tại E và F. Hai dây AE và BF cắt nhau tại M. Hai tia AF và BE cắt nhau tại N. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác FNEM nội tiếp. b) Tứ giác CDFE nội tiếp.

HD: a) $\widehat{MEN} = \widehat{MFN} = 90^\circ$ b) $\widehat{D} + \widehat{CEF} = 180^\circ$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm M của BC.

- a) Chứng minh rằng tứ giác ABDC nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.
b) Đường thẳng DH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Chứng minh rằng năm điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

HD: a) $BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 90^\circ$. O là trung điểm của AD.

b) $\widehat{AIH} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác đều BCD, ACE và ABF. Chứng minh rằng:

- a) Ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác đều nói trên cùng đi qua một điểm.
b) Ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.
c) Ba đoạn thẳng AD, BE, CF bằng nhau.

HD: a) Gọi O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ABF) và (ACE)

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow BODC$ nội tiếp $\Rightarrow$ đường tròn (BCD) cũng đi qua O.

b) $\widehat{AOB} + \widehat{BOD} = 180^\circ \Rightarrow A, O, D$ thẳng hàng. Tương tự B, O, E thẳng hàng; C, O, F thẳng hàng $\Rightarrow$ Ba đường thẳng AD, BE, CF đồng qui.

c) $\triangle ABD = \triangle FBC \Rightarrow AD = CF$; $\triangle ACF = \triangle AEB \Rightarrow CF = BE$.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI. Tiếp tuyến của đường tròn này tại I cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

- a) $MN \parallel CD$. b) Tứ giác ABNM nội tiếp.

HD: a) $\widehat{BIN} = \widehat{BDC} \Rightarrow MN \parallel CD$ b) $\widehat{BAM} + \widehat{BNM} = 180^\circ$.

Bài 10. Cho góc nhọn xOy. Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = 2\text{cm}$, $OB = 6\text{cm}$. Trên tia Oy lấy hai điểm C và D sao cho $OC = 3\text{cm}$, $OD = 4\text{cm}$. Nối BD và AC. Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.

HD:

Bài 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn (O). Từ một điểm M trên tiếp tuyến tại A, vẽ cát tuyến MBC. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh tứ giác AMIO nội tiếp.

HD:

Bài 12.

a)

HD:

VIII. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

1. Định nghĩa

a) Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác đgl **đường tròn ngoại tiếp** đa giác và đa giác đgl **đa giác nội tiếp** đường tròn.

b) Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác đgl **đường tròn nội tiếp** đa giác và đa giác đgl **đa giác ngoại tiếp** đường tròn.

2. Định lí

Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và đgl **tâm** của đa giác đều.

Tâm này là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh hoặc là hai đường phân giác của hai góc.

Chú ý:

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm đến đỉnh.
- Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm O đến 1 cạnh.
- Cho n -giác đều cạnh a . Khi đó:

– Chu vi của đa giác: $2p = na$ (p là nửa chu vi).

– Mỗi góc ở đỉnh của đa giác có số đo bằng $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

– Mỗi góc ở tâm của đa giác có số đo bằng $\frac{360^\circ}{n}$.

– Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$.

– Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow a = 2r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$.

– Liên hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp: $R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$.

$$\text{– Diện tích đa giác đều: } S = \frac{1}{2}nar.$$

Bài 1. Một đường tròn có bán kính $R = 3cm$. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

$$HD: a = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(cm) \Rightarrow S = 18cm^2.$$

Bài 2. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn $(O; 2cm)$. Biết độ dài mỗi cạnh của nó là $2\sqrt{3}cm$. Tính diện tích của đa giác đều đó.

$$HD: R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow S = 3\sqrt{3}(cm^2).$$

Bài 3. Cho lục giác đều ABCDEF, độ dài mỗi cạnh là a . Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, cắt đường thẳng EF theo thứ tự tại N và P.

a) Chứng minh $\triangle MNP$ là tam giác đều.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$.

$$HD: a) \triangle MNP \text{ có 3 góc bằng } 60^\circ \Rightarrow \triangle MNP \text{ là tam giác đều cạnh } 3a \quad b) R = a\sqrt{3}.$$

Bài 4. Cho ngũ giác đều ABCDE cạnh a . Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N.

a) Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đó.

b) Chứng minh rằng các tam giác AMN và CMB là các tam giác cân.

c) Chứng minh rằng $AC \cdot BM = a^2$.

$$HD: a) \frac{r}{R} = \left(\frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{5}} \right) : \left(\frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{5}} \right) \approx 0,8.$$

b) Vẽ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA}$. Dùng các định lý về góc trong đường tròn, chứng minh mỗi tam giác có hai góc bằng nhau.

$$c) \triangle ABM \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{BC}.$$

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm A trên đường tròn (O) vẽ các cung AB, AC sao cho $\widehat{AB} = 30^\circ$, $\widehat{AC} = 90^\circ$ (điểm A nằm trên cung BC nhỏ). Tính các cạnh và diện tích của tam giác ABC.

$$HD: BC = R\sqrt{3}, AC = R\sqrt{2}, AB = 2R \sin 15^\circ, S = R^2 \frac{\sqrt{6}}{2} \sin 15^\circ.$$

Bài 6.

a)

HD:

IX. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

1. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn)

Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \quad \text{hoặc} \quad C = \pi d \quad (d = 2R)$$

2. Công thức tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính R , độ dài l của một cung n° được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Bài 1. Cho $\pi = 3,14$. Hãy điền vào các bảng sau:

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
5			
	6		
		94,2	
			28,26

HD:

Bài 2. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây $BC \perp OA$. Biết độ dài đường tròn (O) là $4\pi(\text{cm})$. Tính:

a) Bán kính đường tròn (O).

b) Độ dài hai cung BC của đường tròn.

HD:

Bài 3. Tam giác ABC có $AB = AC = 3\text{cm}$, $\hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

HD:

Bài 4. Một tam giác đều và một hình vuông có cùng chu vi là 72cm . Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

HD:

Bài 5. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B, cắt đường tròn (O') tại C. Chứng minh rằng nếu $R' = \frac{1}{2}R$ thì độ dài của cung AC bằng nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung nhỏ AC, AB).

HD:

Bài 6. Cho đường tròn đường kính $BC = 2R$. Trên đường tròn lấy một điểm A sao cho $AB = R\sqrt{3}$. Gọi P_1, P_2, P_3 là chu vi các đường tròn có đường kính lần lượt là CA, AB, BC. Chứng minh rằng:

$$\frac{P_1^2}{1} = \frac{P_2^2}{3} = \frac{P_3^2}{4}.$$

HD:

Bài 7. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Vẽ ra phía ngoài tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

HD:

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O; 10cm) có đường kính AB. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính OA và OB ở trong nửa đường tròn (O; 10cm). Tính diện tích của phần nằm giữa ba đường tròn.

HD:

Bài 9. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Lấy một điểm A trên (O) sao cho $AB < AC$. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ở phía ngoài tam giác ABC. Chứng minh diện tích tam giác ABC bằng tổng hai diện tích của hai hình trăng khuyết ở phía ngoài (O).

HD:

Bài 10.

a)

HD:

X. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: $S = \pi R^2$

2. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° được tính theo công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \quad \text{hay} \quad S = \frac{lR}{2} \quad (l \text{ là độ dài cung } n^\circ \text{ của hình quạt tròn}).$$

Bài 1. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn.

HD: Gọi chu vi mỗi hình là $4a \Rightarrow S_{hv} = a^2, S_{ht} = \frac{4}{\pi} a^2 \Rightarrow S_{ht} > S_{hv}$.

Bài 2. Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

HD: Gọi độ dài cạnh hình vuông là $a \Rightarrow S_{ngoaitiep} = \frac{\pi a^2}{2}; S_{nointiep} = \frac{\pi a^2}{4}$.

Bài 3. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh $6cm$.

HD: $R_{ngoaitiep} = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{3}} = 2\sqrt{3}, R_{nointiep} = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow S = 9\pi (cm^2)$.

Bài 4. Một tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn (O). Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác và một cung nhỏ căng cạnh đó.

$$HD: S = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}.$$

Bài 5. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = 2cm. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A ta vẽ ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là BH, CH và BC. Tính diện tích miền giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó.

$$HD: \text{Đặt } HB = 2R, HC = 2r \Rightarrow AH^2 = HB.HC = 4Rr \Rightarrow Rr = 1 \Rightarrow S = \pi Rr = \pi (cm^2).$$

Bài 6.

a)

HD:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Một góc vuông quay quanh O , hai cạnh của góc cắt Ax và By lần lượt tại C và D . Hai đường thẳng OD và Ax cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

- $AC \cdot BD = R^2$.
- Tam giác CDE là tam giác cân.
- CD là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

HD: a) $\Delta AOC \neq \Delta BDO \Rightarrow AC \cdot BD = OA \cdot OB = R^2$.

b) ΔCDE có CO vừa là đường cao, vừa là trung tuyến.

c) Vẽ $OF \perp CD \Rightarrow \Delta FOD = \Delta AOE \Rightarrow OF = OA = R \Rightarrow CD$ là tiếp tuyến của (O) .

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB , tia tiếp tuyến Ax . Trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM = R\sqrt{3}$. Vẽ tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm). Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BC tại D .

- Chứng minh rằng $BD \parallel OM$.
- Xác định dạng của các tứ giác $OBDM$ và $AODM$.
- Gọi E là giao điểm của AD với OM , F là giao điểm của MC với OD . Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

HD: a) $\widehat{AOM} = \widehat{B} \Rightarrow BD \parallel OM$. b) $OBDM$ là hình bình hành, $AODM$ là hình chữ nhật.

c) $OE = R, FE \perp OE \Rightarrow EF$ là tiếp tuyến của (O) .

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Vẽ các đường kính AOC và $AO'D$. Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F . Chứng minh rằng:

- Ba điểm C, B, D thẳng hàng.
- Tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
- A là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác BEF .

HD: a) $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$. b) $\widehat{CED} = \widehat{CFD} = 90^\circ$.

c) Chứng minh FA là tia phân giác trong (hoặc ngoài) của góc F , EA là tia phân giác trong (hoặc ngoài) của góc E của $\Delta BEF \Rightarrow A$ là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác BEF .

Bài 4. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AT và cát tuyến ABC với đường tròn (B nằm giữa A và C). Gọi H là hình chiếu của T trên OA . Chứng minh rằng:

- $AT^2 = AB \cdot AC$
- $AB \cdot AC = AH \cdot AO$
- Tứ giác $OHBC$ nội tiếp.

HD: a) $\Delta ATB \neq \Delta ACT \Rightarrow AT^2 = AB \cdot AC$. b) $AB \cdot AC = AH \cdot AO = AT^2$.

c) $\Delta AOC \neq \Delta ABH \Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{AHB} \Rightarrow \widehat{ACO} + \widehat{BHO} = 180^\circ \Rightarrow OHBC$ nội tiếp.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Vẽ dây $AD \parallel BC$. Tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tại E . Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng:

- $\widehat{AIB} = \widehat{AOB}$.

b) Năm điểm E, A, I, O, B cùng nằm trên một đường tròn.

c) $IO \perp IE$.

HD: a) $\widehat{AIB} = sđ\widehat{AB} = \widehat{AOB}$. b) $ABOI, AOB$ nội tiếp. c) $\widehat{EIO} = \widehat{EAO} = 90^\circ \Rightarrow IO \perp IE$

Bài 6. Cho hình vuông ABCD. Trên hai cạnh CB và CD lần lượt lấy hai điểm di động M và N sao cho $CM = CN$. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với BN, cắt BN tại E và AD tại F.

a) Chứng minh tứ giác FMCD là hình chữ nhật.

b) Chứng minh năm điểm A, B, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

c) Đường tròn (O) cắt AC tại một điểm thứ hai là I. Chứng minh tam giác IBF vuông cân.

d) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng FI tại K. Chứng minh ba điểm K, C, D thẳng hàng.

HD: a) $\triangle FDC = \triangle NCB \Rightarrow FD = CN = CM$

b) A, B, M, E, F nằm trên đường tròn đường kính BF. O là trung điểm của BF.

c) $\widehat{IF} = \widehat{IB} \Rightarrow IF = IB$ d) $IBKC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{BIK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCK} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

Bài 7. Cho đường tròn (O). Vẽ hai dây AC và BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I (điểm B nằm trên cung nhỏ AC). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Tổng diện tích hai hình quạt tròn AOB và COD bằng tổng diện tích hai hình quạt tròn AOD và BOC (các hình quạt tròn ứng với các cung nhỏ).

HD: a) $\widehat{BDC} = \widehat{ABD} \Rightarrow AB \parallel CD$

b) $S_{\text{quạt } AOB} + S_{\text{quạt } COD} = \frac{\pi R^2}{360} (sđ\widehat{AB} + sđ\widehat{CD})$, $S_{\text{quạt } AOD} + S_{\text{quạt } BOC} = \frac{\pi R^2}{360} (sđ\widehat{AD} + sđ\widehat{BC})$.

Bài 8. Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 10\text{cm}$ và dây $BA = 8\text{cm}$. Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các nửa đường tròn đường kính AB và AC.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính tổng diện tích hai hình viên phân.

c) Tính tổng diện tích hai hình trăng khuyết.

HD: a) $S_{ABC} = 24(\text{cm}^2)$ b) $S_{vp} = \frac{25}{2}\pi - 24(\text{cm}^2)$ c) $S_{tk} = 24(\text{cm}^2)$.

Bài 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết $BC = 2\text{cm}$, $\hat{A} = 45^\circ$.

a) Tính diện tích hình tròn (O).

b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC.

c) Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác ABC là lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

HD: a) $R = OB = \sqrt{2} \Rightarrow S = 2\pi(\text{cm}^2)$ b) $S_{vp} = \frac{\pi - 2}{2}(\text{cm}^2)$

c) S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung lớn BC. Khi đó $S_{ABC} = \sqrt{2} + 1(\text{cm}^2)$.

Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

- b) Chứng minh AH vuông góc BC.
 c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

HD:

Bài 11. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$ và điểm M trên đường tròn sao cho góc $\widehat{MAB} = 90^\circ$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

- a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM).
 b) Chứng minh $MN^2 = 4AH \cdot HB$.
 c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.
 d) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

HD:

Bài 12. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

- a) Tính số đo các góc của tam giác OAB.
 b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
 c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

HD:

Bài 13. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

- a) Chứng minh $OA \perp BC$ và tính tích $OH \cdot OA$ theo R.
 b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh $CD \parallel OA$.
 c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

HD:

Bài 14. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.
 b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.
 c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

HD:

Bài 15. Cho đường tròn (O; 3cm) và một điểm A có $OA = 6$ cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

- a) Tính độ dài OH.
 b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F. Tính chu vi tam giác ADE.
 c) Tính số đo góc DOE.

HD:

Bài 16. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax , kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

- a) Tính số đo góc MON.
- b) Chứng minh $MN = AM + BN$.
- c) Tính tích $AM \cdot BN$ theo R.

HD:

Bài 17.

- a)

HD:

CHƯƠNG IV

HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

I. HÌNH TRỤ

1. Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật $ABO'O$ một vòng quanh cạnh OO' cố định, ta được một **hình trụ**.

- Hai hình tròn (O) và (O') bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song đgl **hai đáy** của hình trụ.
- Đường thẳng OO' đgl **trục** của hình trụ.
- Mỗi vị trí của AB đgl một **đường sinh**. Các đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài của đường sinh là **chiều cao** của hình trụ.

2. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng

- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng **song song với đáy**, thì phần mặt phẳng nằm trong hình trụ (mặt cắt – thiết diện) là **một hình tròn bằng hình tròn đáy**.
- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng **song song với trục OO'** thì mặt cắt là **một hình chữ nhật**.

3. Diện tích – Thể tích

Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h .

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$
- Thể tích: $V = \pi R^2 h$

Bài 1. Một hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}$ đường cao. Khi cắt hình trụ này bằng một mặt phẳng

đi qua trục thì mặt cắt là một hình chữ nhật có diện tích là $50cm^2$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ.

$$ĐS: S_{xq} = 62,5\pi(cm^2), V = 62,5\pi(cm^3).$$

Bài 2. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết thể tích của hình trụ là $128\pi cm^3$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

$$ĐS: S_{xq} = 64\pi(cm^2).$$

Bài 3. Một hình trụ có bán kính đáy là $3cm$. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.

$$ĐS: h = R = 3(cm).$$

Bài 4. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi cm^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi cm^2$. Tính thể tích của hình trụ đó.

ĐS: $V = 20\pi (cm^3)$.

Bài 5.

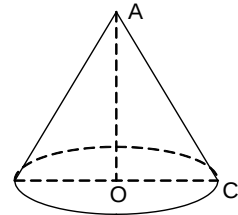
ĐS:

II. HÌNH NÓN – HÌNH NÓN CỤT

1. Hình nón

Khi quay tam giác vuông một vòng quanh cạnh OA cố định thì được một **hình nón**.

- Điểm A đgl **đỉnh** của hình nón.
- Hình tròn (O) đgl **đáy** của hình nón.
- Mỗi vị trí của AC đgl một **đường sinh** của hình nón.
- Đoạn AO đgl **đường cao** của hình nón.



2. Diện tích – Thể tích hình nón

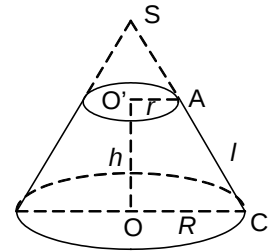
Cho hình nón có bán kính đáy R và đường sinh l , chiều cao h .

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi Rl$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

3. Hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một **mặt phẳng song song với đáy** thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt phẳng đáy đgl một **hình nón cụt**.

- Hai hình tròn (O) và (O') đgl **hai đáy**.
- Đoạn OO' đgl **trục**. Độ dài OO' là **chiều cao**.
- Đoạn AC đgl **đường sinh**.



4. Diện tích – Thể tích hình nón cụt

Cho hình nón cụt có các bán kính đáy R và r , chiều cao h , đường sinh l .

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R+r)l$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + Rr + r^2)$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C . Biết $BC = a$, $AC = b$. Quay tam giác vuông này một vòng lần lượt quanh cạnh AC và BC , được một hình nón đỉnh A và một hình nón đỉnh B . Hãy so sánh tỷ số thể tích của hai hình nón và tỷ số diện tích xung quanh của hai hình nón ấy.

ĐS: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$.

Bài 2. Một hình quạt tròn có bán kính $20cm$ và góc ở tâm là 144° . Người ta uốn hình quạt này thành một hình nón. Tính số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón đó.

ĐS: $\sin \alpha = 0,4$.

Bài 3. Một hình nón có bán kính đáy bằng 5cm và diện tích xung quanh là $65\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

ĐS: $V = 100\pi(\text{cm}^3)$.

Bài 4. Một hình nón có đường sinh dài 15cm và diện tích xung quanh là $135\pi\text{cm}^2$.

a) Tính chiều cao của hình nón đó.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

ĐS: a) $h = 12(\text{cm})$ b) $S_{tp} = 216\pi(\text{cm}^2)$, $V = 324\pi(\text{cm}^3)$.

Bài 5. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 14cm và 9cm , chiều cao là 23cm .

a) Tính dung tích của xô.

b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).

ĐS: a) $V = \frac{9269}{3}\pi(\text{cm}^3) \approx 9,7 \text{ lít}$ b) $S = 621,5\pi(\text{cm}^2)$

Bài 6. Từ một khúc gỗ hình trụ cao 15cm , người ta tiện thành một hình nón có thể tích lớn nhất. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là $640\pi\text{cm}^3$.

a) Tính thể tích khúc gỗ hình trụ.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

ĐS: a) $V = 960\pi(\text{cm}^3)$ b) $S_{xq} = 136\pi(\text{cm}^2)$

Bài 7.

ĐS:

III. HÌNH CẦU

1. Hình cầu

Khi quay nửa hình tròn tâm O , bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một **hình cầu**.

- Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo thành một **mặt cầu**.
- Điểm O gọi là **tâm**, R là **bán kính** của hình cầu hay mặt cầu đó.

2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

- Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn.

- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn:
 - Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi là **đường tròn lớn**).
 - Đường tròn đó có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.

3. Diện tích – Thể tích

Cho hình cầu bán kính R .

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$
- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Bài 1. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

ĐS: $R = 3(cm)$.

Bài 2. Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi m^2$. Tính thể tích hình cầu đó.

ĐS: $V = \frac{500\pi}{3}(m^3)$.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp, nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này và tam giác vuông ABH một vòng quanh AH, được hai mặt cầu và một hình nón. Tính:

a) Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón.

b) Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên.

c) Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.

ĐS: $R = 2r; AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. a) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$ c) $V = \frac{23\sqrt{3}\pi a^3}{216}$.

Bài 4.

ĐS:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Một hình cầu nội tiếp trong một hình trụ. Cho biết diện tích mặt cầu là $60cm^2$. Hãy tính:

a) Diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Thể tích hình trụ.

ĐS: a) $S_{tp} = 90(cm^2)$ b) $V = 30\sqrt{\frac{15}{\pi}}(cm^3)$.

Bài 2. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$ và $\hat{B} = 30^\circ$. Quay tam giác vuông này một vòng quanh cạnh AB ta được một hình nón đỉnh B. Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón ấy bằng diện tích mặt cầu có đường kính AB.

ĐS: $S_{tp} = 3\pi a^2 = S_c$.

Bài 3. Người ta chia hình tròn $(O; 12cm)$ thành hai hình quạt có các số đo cung là 120° và 240° .

Từ hai hình quạt này người ta uốn lại thành hai hình nón.

a) Tính nửa góc ở đỉnh của mỗi hình nón.

b) Tính thể tích của mỗi hình nón.

c) Tính tỉ số diện tích toàn phần của hai hình nón.

ĐS: a) Độ dài cung nhỏ $8\pi(cm)$, độ dài cung lớn $16\pi(cm)$.

Hình nón tạo bởi hình quạt nhỏ có đường sinh $12cm$ và chu vi đáy $8\pi cm$

$\Rightarrow R_1 = 4(cm) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Hình nón tạo bởi hình quạt lớn có đường sinh 12 cm , chu vi đáy $16\pi\text{ cm}$

$$\Rightarrow R_2 = 8(\text{cm}) \Rightarrow \sin b = \frac{2}{3}.$$

$$b) V_1 = \frac{128\sqrt{2}\pi}{3}(\text{cm}^3), V_2 = \frac{256\sqrt{5}\pi}{3}(\text{cm}^3) \quad c) \frac{S_1}{S_2} = \frac{64\pi}{160\pi} = \frac{2}{5}.$$

Bài 4.

a)

ĐS: