**ĐỀ THI HSG TOÁN 9 HẢI DƯƠNG 2023-2024**

*Thời gian làm bài: 150 phút*

**Câu I**. (2 điểm)

1. Cho x $=\frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}$ . Tính giá trị biểu thức *P* = $\frac{x^{4}+5x^{3}-20x^{2}-27x+30}{x^{2}+4x-21}$
2. Cho $a, b, c > 0 $thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$*.* Chứng minh rằng

$$\sqrt{a\left(1-b\right)\left(1-c\right)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c\left(1-a\right)\left(1-b\right)}-\sqrt{abc}=1$$

**Câu II**. (3 điểm)

1. Giải phương trình $x^{3}+x^{2}-x+1= \sqrt{3x+1}$
2. Giải hệ phương trình $\left\{ \begin{array}{c}xy+2x-y=3\\\frac{1}{x^{2}-2x+2}+\frac{2}{y^{2}+4y+7}=1\end{array}\right.$

**Câu III**. (2 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên$ x^{3}-y^{3}-2y^{2}-3y-1=0$
2. Tìm số nguyên tố $p $để 2041 $-$ $p^{2}$ không chia hết cho 24

**Câu IV**. (3 điểm)

1. Cho đường tròn $(O)$ đường kính *AB*, qua *A* và *B* lần lượt vẽ các tiếp tuyến $d\_{1}$ và $d\_{2}$ với $(O)$. Từ điểm *M* bất kỳ trên $(O)$ vẽ các tiếp tuyến với đường tròn, cắt $d\_{1}$ tại *C* và cắt $d\_{2}$ tại *D*. Kẻ *MH* vuông góc với *AB* tại *H*.
2. Chứng minh rằng: *AD, BC, MH* đồng quy tại trung điểm của *MH*.
3. Đường tròn (O’) đường kính *CD* cắt đường tròn $(O)$ tại *E* và *F* (*E* thuộc cung $AM$). Chứng minh *EF* đi qua trung điểm của *MH*.
4. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Điểm M di dộng trên đoạn BC. Vẽ ME vuông góc với AB tại E, MF vuông góc với AC tại F. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn EF theo a.

**Câu V**. (1 điểm)

Cho các số dương $x, y, z$ thõa mãn $xyz$ = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\left(x+1\right)^{2}+y^{2}+1}{xy+x+4}+ \frac{\left(y+1\right)^{2}+z^{2}+1}{yz+y+4}+\frac{\left(z+1\right)^{2}+x^{2}+1}{zx+z+4}$$

**ĐÁP ÁN**

**Câu I**

1. Cho x $=\frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}$ . Tính giá trị biểu thức *P* = $\frac{x^{4}+5x^{3}-20x^{2}-27x+30}{x^{2}+4x-21}$

$$x=\frac{23}{\sqrt{31+12\sqrt{3}}}=\frac{23}{\sqrt{\left(3\sqrt{3}+2\right)^{2}}}=\frac{23(3\sqrt{3}-2)}{23}=3\sqrt{3}-2$$

$$⇒x+2=3\sqrt{3} ⇒x^{2}4x+4-23=0$$

$$P= \frac{x^{4}+5x^{3}-20x^{2}-27x+30}{x^{2}+4x-21}$$

$$P= \frac{x^{2}\left(x^{2}+4x-23\right)+x\left(x^{2}+4x-23\right)-\left(x^{2}+4x-23+7\right)}{\left(x^{2}+4x-23\right)+2} $$

$$P= \frac{\left(x^{2}+4x-23\right)\left(x^{2}+x-1\right)+7}{\left(x^{2}+4x-23\right)+2}$$

$$P=\frac{0.\left(x^{2}+x-1\right)+7}{0+2 }=\frac{7}{2}$$

1. Cho $a, b, c > 0 $thỏa mãn $a + b + c + 2\sqrt{abc} = 1$*.* Chứng minh rằng

$$\sqrt{a\left(1-b\right)\left(1-c\right)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c\left(1-a\right)\left(1-b\right)}-\sqrt{abc}=1$$

Do $a, b, c$ > 0 và $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$

$$a+2\sqrt{abc}+bc=1-b-c+bc=\left(1-b\right)\left(1-c\right)$$

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}=\sqrt{a^{2}+2a\sqrt{abc}+abc=\sqrt{\left(a+\sqrt{abc}\right)^{2}}=a+\sqrt{abc}}$$

Tương tự:

$$⇒\sqrt{b\left(1-c\right)\left(1-a\right)}=b+\sqrt{abc}$$

$$\sqrt{c(1-a)(1-b)}=c+\sqrt{abc}$$

Do đó:

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}-\sqrt{abc}$$

$$=a+b+c+2\sqrt{abc}=1$$

**Câu II**

1. Giải phương trình $x^{3}+x^{2}-x+1= \sqrt{3x+1}$

Điều kiện $x\geq -\frac{1}{3}$

$$x^{3}+x^{2}-x+1=\sqrt{3x-1}$$

$$x^{3}+x^{2}-2x+\left(x+1\right)-\sqrt{3x+1}=0$$

$$⇔x^{3}+x^{2}-2x+\frac{\left(x+1\right)-\left(3x+1\right)}{x+1+\sqrt{3x+1}}=0$$

$$⇔\left(x^{2}-x\right)\left(x+2\right)+\frac{x^{2}-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}=0$$

$⇔\left(x^{2}-x\right)\left(x+2+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} \right)=0$ (\*)

Với x $\geq 0$ thì $x+2+\frac{1}{(x+1)+\sqrt{3x+1}}\geq 0$

Nên (\*)$⇔x^{3}-x=0$ $⟺[\genfrac{}{}{0pt}{}{x= 0}{x=1}$(t/m)

Vậy phương trình có tập nghiệm S =$\left\{0;1\right\}$

2). Giải hệ phương trình $\left\{ \begin{array}{c}xy+2x-y=3\\\frac{1}{x^{2}-2x+2}+\frac{2}{y^{2}+4y+7}=1\end{array}\right.$

Hệ phương trình $⟺\left\{\begin{array}{c}(x-1)(y+2)\\\frac{1}{\left(x-1\right)^{2}+1}+\frac{2}{\left(y+2\right)^{2}+3}=1\end{array}\right.$

Đặt $u=x-1, v=y+2$. Hệ đã cho trở thành $\left\{\begin{array}{c}uv=1\\\frac{1}{\left(x-1\right)^{2}+1}+\frac{2}{\left(y+2\right)^{2}+3}=1\end{array}\right.$

$⟺\left\{\begin{array}{c}uv=1\\u^{2}v^{2}+3u^{2}+v^{2}+3=2u^{2}+v^{2}+5\end{array}\right.$ $⟺\left\{\begin{array}{c}uv=1\\u^{2}v^{2}+u^{2}=2\end{array}\right.$

$⇔\left\{\begin{array}{c}uv=1\\u=\pm 1\end{array}\right.$ $⇔[ \begin{matrix}u=v=1\\u=v=-1\end{matrix}$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là $\left\{\begin{array}{c}x=2\\y= -1\end{array}\right.;\left\{\begin{array}{c}x=0\\y= -3\end{array}\right. $

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left\{\begin{array}{c}x=2\\y= -1\end{array}\right.;\left\{\begin{array}{c}x=0\\y= -3\end{array}\right.$

**Câu III**

1. Giải Phuong trình nghiệm nguyên $x^{3}-y^{3}-2y^{2}-3y-1=0$

Phương trình đã cho $⟺$ $x^{3}=y^{3}+2y^{2}+3y+1$

Nhận xét rằng $y^{2}\geq 0⟺ x^{3}\leq y^{3}+2y^{2}+3y+1+y^{2}=\left(y+1\right)^{3}$ (1)

$5y^{2}+2>0 ⟺ x^{3}>y^{3}+2y^{2}+3y+1-\left(5y^{2}+2\right)=\left(y-1\right)^{3}$(2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(y-1\right)^{3}<x^{3}\leq \left(y+1\right)^{3}$

Vì $x, y \in $ Z $⟹[\begin{matrix}x^{3}=y^{3}\\x^{3}=\left(y+1\right)^{3}\end{matrix} ⟺[\begin{matrix}y^{3}+2y^{2}+3y+1=y^{3}\\y^{3}+2y^{2}+3y+1=\left(y+1\right)^{3}\end{matrix}$

$⟺$ [$\begin{matrix}2y^{2}+3y+1=0\\y^{2}=0\end{matrix}$ $⟺$[ $\begin{matrix}y= -1 (do y \in Z)\\y=0\end{matrix}⟺$ $[\begin{matrix}y= -1\\y=0\end{matrix}$

Với $y = -1$ suy ra $x= -1$

Với$ y = 0$ suy ra $x= 1$

Vậy phương trình có 2 căp nghiệm là $(-1; -1)$ và $(1; 0)$

1. Tìm số nguyên tố $p $để 2041 $-$ $p^{2}$ không chia hết cho 24

Đặt $a=2041-p^{2}=2040-\left(p^{2}-1\right)=2040-(p-1)(p+1)$

Nếu $p=2⟹a=2037$ không chia hết cho 24 $⟹p=2(nhận)$

Nếu $p=3$ $⟹a=2032 $không chia hết cho 24 $⟹p=3 (nhận)$

Nếu $p>3$ mà $p$ là số nguyên tố. Do đó $p^{2}$ chia cho 3 dư 1 $⟹p^{2}-1 \vdots 3$

$p>3$ mà p là số nguyên tố. Do đó $p $lẻ nên$ p-1 $và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp

$⟹$ $(p-1)(p+1)\vdots 8.$ Mà (3; 8) = 1 $⇒(p-1)(p+1)\vdots 24$

$$⟹a=2040-(p-1)(p+1)\vdots 24$$

Do đó $p>3$ không thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy $p=2;p=3$

**Câu IV**

1. Gọi là giao điểm của AD và BC là I

Ta có $Δ$ICA $∼ Δ$IBD $⟹\frac{IC}{IB}=\frac{CA}{BD}=\frac{CM}{DM}$ $⟹$MI//BD $⟹$MI$⊥$AB

Mà MH $⊥$với AB $⟹$I $\in MH$

Chứng minh được : $\frac{MI}{BD}=\frac{CI}{CB}=\frac{AI}{AD}=\frac{IH}{BD}$

Suy ra MI = IH hay I là trung điểm MH

Vậy AD, BC, MH đồng quy tại trung điểm của MH

\

Ta chứng minh $Δ$COD vuông tại O nên O’O là bán kính của (O’) và O’O $⊥$ EF

Gọi R là bán kính đường tròn (O)

Ta có $Δ$MHO $∼Δ$OMO’ suy ra $\frac{MH}{OM}=\frac{OM}{OO^{'}}$ suy ra $MH=\frac{R^{2}}{OO^{'}}$

Vẽ đường kính OT của đường tròn (O’)

Tam giác OET vuông tại E có EK là đường cao nên $OE^{2}=OK.OT$

Suy ra $OK=\frac{R^{2}}{2.OO^{'}}\left(2\right). $Từ (1)(2) suy ra $MH=2.OK$

Do I là trung điểm của MH nên $IH=OK,$ suy ra $IK //AB$

Ta có O’O là đường trung bình của hình thang vuông ABDC nên O’O vuông góc AB, từ đó suy ra $EF//AB $

Hai đường thẳng IK và EF cùng song song với AB và cùng đi qua K nên bốn điểm E, I, K, F thẳng hàng. Vậy EF đi qua trung điểm của MH

2)

Kẻ đường cao AD của tam giác ABC. Lấy I là trung điểm AM

AD là đường cao đồng thời là phân giác suy ra $\hat{BAD}=30^{0}$

Chứng minh được $\hat{EID}=60^{0}, \hat{EIF}=120^{0}$ suy ra $\hat{DIF}=60^{0}$

Chứng minh được EI = DI = FI = $\frac{1}{2}AM,$ mà $\hat{EID}=\hat{DIF}=60^{0}$

Suy ra $Δ$EID và $Δ$FID là tam giác đều và EIFD là hình thoi

Chứng minh được $EF=ID\sqrt{3}$

Vậy EF ngắn nhất khi và chỉ khi ID ngắn nhất

ID ngắn nhất khi và chỉ khi AM ngắn nhất $⇒$AM là đường cao

Khi đó $AM=\frac{a\sqrt{3}}{3} ⟹ ID=\frac{a\sqrt{3}}{4}⇒ EF=\frac{3a}{4}$

**Câu V**

Ta có $\frac{\left(x+1\right)^{2}+y^{2}+1}{xy+x+4}=\frac{x^{2}+y^{2}+2x+2}{xy+x+4}$

$$\geq \frac{2xy+2x+2}{xy+x+4}=\frac{2\left(xy+x+4\right)}{xy+x+4}=2-\frac{6}{xy+x+4}$$

Tương tự, suy ra $P\geq 6-6\left(\frac{1}{xy+x+4}+\frac{1}{yz+y+4}+\frac{1}{zx+z+4}\right)$

Ta có $\frac{1}{xy+x+4}=\frac{1}{xy+x+1+3}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{3}\right)$

Tương tự, suy ra $P\geq 6-6.\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yx+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\right)$

Mặt khác

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{xyz}{yz+y+xyz}+\frac{xyz}{zx+z+xyz}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{xz}{z+1+xz}+\frac{xy}{x+1+xy}=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{xz}{z+xyz+zx}+\frac{xy}{x+1+xy}$$

$$=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{x}{1+xy+x}+\frac{xy}{x+1+xy}=1$$

Suy ra $P\geq 6-6.\frac{1}{4}\left(1+1\right)=6-3=3$