

CHUYÊN ĐỀ 1 - TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 4 - LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Lũy thừa bậc n của số a là tích của n thừa số bằng nhau, mỗi thừa số bằng a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số } a} \quad (n \neq 0); \quad a \text{ gọi là cơ số, } n \text{ gọi là số mũ.}$$

2. Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3. Chia hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m \geq n)$

Quy ước $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

4. Lũy thừa của lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5. Lũy thừa một tích: $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

6. Một số lũy thừa của 10:

- Một nghìn: $1000 = 10^3$

- Một vạn: $10\,000 = 10^4$

- Một triệu: $1\,000\,000 = 10^6$

- Một tỉ: $1\,000\,000\,000 = 10^9$

Tổng quát: nếu n là số tự nhiên khác 0 thì: $10^n = 1000 \dots 00$

7. Thứ tự thực hiện phép tính:

Trong một biểu thức có chứa nhiều dấu phép toán ta làm như sau:

- Nếu biểu thức không có dấu ngoặc chỉ có các phép cộng, trừ hoặc chỉ có các phép nhân chia ta thực hiện phép tính theo thứ tự từ trái sang phải.

- Nếu biểu thức không có dấu ngoặc, có các phép cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa, ta thực hiện nâng lên lũy thừa trước rồi thực hiện nhân chia, cuối cùng đến cộng trừ.

- Nếu biểu thức có dấu ngoặc $()$, $[]$, $\{ \}$ ta thực hiện các phép tính trong ngoặc tròn trước, rồi đến các phép tính trong ngoặc vuông, cuối cùng đến các phép tính trong ngoặc nhọn.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1: Thực hiện tính, viết dưới dạng lũy thừa

I. Phương pháp giải.

Sử dụng công thức:

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ ($n \neq 0$); a gọi là cơ số, n gọi là số mũ.

2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

3) $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0, m \geq n$)

Quy ước $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

II. Bài toán.

Bài 1:

Viết các tích sau dưới dạng 1 lũy thừa

a) $5.5.5.5.5.5$

b) $2.2.2.2.3.3.3.3$

c) $100.10.2.5$

Lời giải

a) Ta có: $5.5.5.5.5.5 = 5^6$

b) Ta có: $2.2.2.2.3.3.3.3 = 2^4 \cdot 3^4$

c) Ta có: $100.10.2.5 = 10.10.10.10 = 10^4$

Bài 2:

Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^4 : 3^2$

b) $2^4 \cdot 2^2$

c) $(2^4)^2$

Lời giải

a) Ta có: $3^4 : 3^2 = 3^2 = 9$

b) Ta có: $2^4 \cdot 2^2 = 16 \cdot 4 = 64$

c) Ta có: $(2^4)^2 = 2^8 = 256$

Bài 3:

Viết các tích sau đây dưới dạng một lũy thừa của một số:

a) $A = 8^2 \cdot 32^4$

b) $B = 27^3 \cdot 9^4 \cdot 243$

Lời giải

a) $A = 8^2 \cdot 32^4 = 2^6 \cdot 2^{20} = 2^{26}$

b) $B = 27^3 \cdot 9^4 \cdot 243 = 3^{22}$

Bài 4:

Viết kết quả phép tính dưới dạng một lũy thừa:

a) $64 : 2^3$

b) $243 : 3^4$

c) $625 : 5^3$

d) $7^5 : 343$

e) $100000 : 10^3$

f) $11^5 : 121$

g) $243 : 3^3 : 3$

h) $4^8 : 64 : 16$

Lời giải

a) $64 : 2^3 = 2^6 : 2^3 = 2^3$

b) $243 : 3^4 = 3^5 : 3^4 = 3^1$

c) $625 : 5^3 = 5^4 : 5^3 = 5^1$

d) $7^5 : 343 = 7^5 : 7^3 = 7^2$

e) $100000 : 10^3 = 10^5 : 10^3 = 10^2$

f) $11^5 : 121 = 11^5 : 11^2 = 11^3$

g) $243 : 3^3 : 3 = 3^5 : 3^3 : 3 = 3^1$

h) $4^8 : 64 : 16 = 4^8 : 4^3 : 4 = 4^4$

Bài 5:

Tìm các số mũ n sao cho lũy thừa 3^n thỏa mãn điều kiện: $25 < 3^n < 250$

Lời giải

Ta có: $3^2 = 9, 3^3 = 27 > 25, 3^4 = 81, 3^5 = 243 < 250$ nhưng $3^6 = 243 \cdot 3 = 729 > 250$

Vậy với số mũ $n = 3, 4, 5$ ta có $25 < 3^n < 250$

Bài 6:

Thực hiện phép tính:

a) $5 \cdot 2^2 - 18 : 3$

b) $17 \cdot 85 + 15 \cdot 17 - 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

c) $2^3 \cdot 17 - 2^3 \cdot 14$

d) $20 - [30 - (5 - 1)^2]$

e) $75 - (3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 2^3)$

f) $2 \cdot 5^2 + 3 : 71^0 - 54 : 3^3$

g) $150 + 50 : 5 - 2 \cdot 3^2$

h) $5 \cdot 3^2 - 32 : 4^2$

Lời giải

a) $5 \cdot 2^2 - 18 : 3$
 $= 5 \cdot 4 - 18 : 3$
 $= 20 - 6$
 $= 14$

b) $17 \cdot 85 + 15 \cdot 17 - 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
 $= 17 \cdot 85 + 15 \cdot 17 - 120$
 $= 17 \cdot (85 + 15) - 120$

$$=17.100 - 120$$

$$=1700 - 120 =1580$$

$$c) 2^3.17 - 2^3.14$$

$$=2^3(17 - 14)$$

$$=2^3.3$$

$$=8.3$$

$$=24$$

$$e) 75 - (3.5^2 - 4.2^3)$$

$$=75 - (3.25 - 4.8)$$

$$=75 - (75 - 32)$$

$$=75 - 75 + 32$$

$$=32$$

$$g) 150 + 50 : 5 - 2.3^2$$

$$=150 + 10 - 2.9$$

$$=150 + 10 - 18$$

$$=142$$

$$d) 20 - [30 - (5 - 1)^2]$$

$$=20 - [30 - 4^2]$$

$$=20 - (30 - 16)$$

$$=20 - 14 =6$$

$$f) 2.5^2 + 3 : 71^0 - 54 : 3^3$$

$$=2.25 + 3 : 1 - 54 : 27$$

$$=50 + 3 - 2$$

$$=51$$

$$h) 5.3^2 - 32 : 4^2$$

$$=5.9 - 32 : 16$$

$$=45 - 2$$

$$=43$$

Bài 7: Thực hiện phép tính.

$$a) 27.75 + 25.27 - 2.3.5^2$$

$$b) 12 : \{ 400 : [500 - (125 + 25.7)] \}$$

$$c) 13.17 - 256 : 16 + 14 : 7 - 2021^0$$

$$d) 2.3^2 : 3 + 182 + 3.(51 : 17)$$

$$e) 15 - 5^2.2^3 : (100.2)$$

$$f) 5^2.2^3 - 12.5 + 170 : 17 - 8$$

Lời giải

$$a) 27.75 + 25.27 - 2.3.5^2$$

$$=27.(75 + 25) - 150$$

$$=27.100 - 150$$

$$=2700$$

$$b) 12 : \{ 400 : [500 - (125 + 25.7)] \}$$

$$=12 : \{ 400 : [500 - (125 + 175)] \}$$

$$=12 : \{ 400 : [500 - 300] \}$$

$$=12 : \{ 400 : 200 \}$$

$$=12 : 2 =6$$

$$c) 13.17 - 256 : 16 + 14 : 7 - 2021^0$$

$$=221 - 16 + 2 - 1$$

$$=206$$

$$d) 2.3^2 : 3 + 182 + 3.(51 : 17)$$

$$=6 + 182 + 3.3$$

$$=6 + 182 + 9$$

$$=197$$

$$e) 15 - 5^2.2^3 : (100.2)$$

$$f) 5^2.2^3 - 12.5 + 170 : 17 - 8$$

$$\begin{aligned}
 &= 15 - 25.8 : 200 \\
 &= 15 - 200 : 200 \\
 &= 15 - 1 \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1000 - 60 + 10 - 8 \\
 &= 942
 \end{aligned}$$

Bài 8: Thực hiện phép tính.

a) $2^3 - 5^3 : 5^2 + 12.2^2$

b) $5 \cdot [(85 - 35 : 7) : 8 + 90] - 5^2.2$

c) $2 \cdot [(7 - 3^3 : 3^2) : 2^2 + 99] - 100$

d) $2^7 : 2^2 + 5^4 : 5^3.2^4 - 3.2^5$

e) $(3^5.3^7) : 3^{10} + 5.2^4 - 7^3 : 7$

f) $3^2 \cdot [(5^2 - 3) : 11] - 2^4 + 2.10^3$

g) $(6^{2007} - 6^{2006}) : 6^{2006}$

h) $(5^{2001} - 5^{2000}) : 5^{2000}$

i) $(7^{2005} + 7^{2004}) : 7^{2004}$

j) $(5^7 + 7^5) \cdot (6^8 + 8^6) \cdot (2^4 - 4^2)$

k) $(7^5 + 7^9) \cdot (5^4 + 5^6) \cdot (3^3.3 - 9^2)$

l) $[(5^2.2^3 - 7^2.2) : 2] \cdot 6 - 7.2^5$

Lời giải

a) $2^3 - 5^3 : 5^2 + 12.2^2$
 $= 8 - 5 + 12.4$
 $= 8 - 5 + 48$
 $= 51$

b) $5 \cdot [(85 - 35 : 7) : 8 + 90] - 5^2.2$
 $= 5 \cdot [(85 - 5) : 8 + 90] - 50$
 $= 5 \cdot [80 : 8 + 90] - 50$
 $= 5 \cdot 100 - 50$
 $= 450$

c) $2 \cdot [(7 - 3^3 : 3^2) : 2^2 + 99] - 100$
 $= 2 \cdot [(7 - 3) : 4 + 99] - 100$
 $= 2 \cdot (4 : 4 + 99) - 100$
 $= 2 \cdot 100 - 100$
 $= 100$

d) $2^7 : 2^2 + 5^4 : 5^3.2^4 - 3.2^5$
 $= 2^5 + 5.2^4 - 3.2^5$
 $= 2^4 \cdot (2 + 5 - 6)$
 $= 2^4$

e) $(3^5.3^7) : 3^{10} + 5.2^4 - 7^3 : 7$
 $= 3^{12} : 3^{10} + 5.2^4 - 7^2$
 $= 3^2 + 5.2^4 - 7^2$
 $= 9 + 5.16 - 49$
 $= 9 + 80 - 49$
 $= 40$

f) $3^2 \cdot [(5^2 - 3) : 11] - 2^4 + 2.10^3$
 $= 9 \cdot [(25 - 3) : 11] - 16 + 2.1000$
 $= 9 \cdot (22 : 11) - 16 + 2000$
 $= 9 \cdot 2 - 16 + 2000$
 $= 2 + 2000$
 $= 2002$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & (6^{2007} - 6^{2006}) : 6^{2006} \\ &= 6^{2006} (6 - 1) : 6^{2006} \\ &= 6^{2006} . 5 : 6^{2006} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & (5^{2001} - 5^{2000}) : 5^{2000} \\ &= 5^{2000} (5 - 1) : 5^{2000} \\ &= 5^{2000} . 4 : 5^{2000} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & (7^{2005} + 7^{2004}) : 7^{2004} \\ &= 7^{2004} (7 + 1) : 7^{2004} \\ &= 7^{2004} . 8 : 7^{2004} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad & (5^7 + 7^5) . (6^8 + 8^6) . (2^4 - 4^2) \\ &= (5^7 + 7^5) . (6^8 + 8^6) . (16 - 16) \\ &= (5^7 + 7^5) . (6^8 + 8^6) . 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad & (7^5 + 7^9) . (5^4 + 5^6) . (3^3 . 3 - 9^2) \\ &= (7^5 + 7^9) . (5^4 + 5^6) . (27 - 27) \\ &= (7^5 + 7^9) . (5^4 + 5^6) . 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad & [(5^2 . 2^3 - 7^2 . 2) : 2] . 6 - 7 . 2^5 \\ &= [(25 . 8 - 49 . 2) : 2] . 6 - 7 . 2^5 \\ &= (200 - 98) : 2 . 6 - 7 . 32 \\ &= 306 - 224 \\ &= 82 \end{aligned}$$

Bài 9: Thực hiện phép tính.

$$\text{a)} \quad 142 - [50 - (2^3 . 10 - 2^3 . 5)]$$

$$\text{b)} \quad 375 : \left\{ 32 - \left[4 + (5 . 3^2 - 42) \right] \right\} - 14$$

$$\text{c)} \quad \left\{ 210 : \left[16 + 3 . (6 + 3 . 2^2) \right] \right\} - 3$$

$$\text{d)} \quad 500 - \left\{ 5 . \left[409 - (2^3 . 3 - 21)^2 \right] - 1724 \right\}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 142 - [50 - (2^3 . 10 - 2^3 . 5)] \\ &= 142 - [50 - 2^3 . 5] \\ &= 142 - 5 . (10 - 8) \\ &= 142 - 10 \\ &= 132 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 375 : \left\{ 32 - \left[4 + (5 . 3^2 - 42) \right] \right\} - 14 \\ &= 375 : \left\{ 32 - [4 + (45 - 42)] \right\} - 14 \\ &= 375 : \left\{ 32 - (4 + 3) \right\} - 14 \\ &= 375 : \left\{ 32 - 7 \right\} - 14 \\ &= 375 : 25 - 14 = 15 - 14 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \left\{ 210 : \left[16 + 3 . (6 + 3 . 2^2) \right] \right\} - 3 \\ &= \left\{ 210 : [16 + 3 . (6 + 12)] \right\} - 3 \\ &= \left\{ 210 : [16 + 3 . 18] \right\} - 3 \\ &= \left\{ 210 : 70 \right\} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 500 - \left\{ 5 . \left[409 - (2^3 . 3 - 21)^2 \right] - 1724 \right\} \\ &= 500 - \left\{ 5 \left[409 - (8 . 3 - 21)^2 \right] - 1724 \right\} \\ &= 500 - \left\{ 5 . \left[409 - (24 - 21)^2 \right] - 1724 \right\} \end{aligned}$$

$$=3-3=0$$

$$=500 - \{5 \cdot [409 - 9] - 1724\}$$

$$=500 - \{5 \cdot 400 - 1724\}$$

$$=500 - 276 = 224$$

Bài 10: Thực hiện phép tính.

a) $80 - (4.5^2 - 3.2^3)$

b) $5^6 : 5^4 + 2^3 \cdot 2^2 - 1^{2017}$

c) $5^3 - 2 \cdot [56 - 48 : (15 - 7)]$

d) $23.75 + 5^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 13 + 180$

e) $36.4 - 4 \cdot (82 - 7.11)^2 : 4 - 2016^0$

f) $303 - 3 \cdot \{ [655 - (18 : 2 + 1) \cdot 4^3 + 5] \} : 10^0$

Lời giải:

a) $80 - (4.5^2 - 3.2^3)$

$$=80 - (4.25 - 3.8)$$

$$=80 - (100 - 24)$$

$$=80 - 76 = 4$$

b) $5^6 : 5^4 + 2^3 \cdot 2^2 - 1^{2017}$

$$=5^2 + 2^5 - 1$$

$$=25 + 32 - 1$$

$$=56$$

c) $5^3 - 2 \cdot [56 - 48 : (15 - 7)]$

$$=125 - 2 \cdot [56 - 48 : 8]$$

$$=125 - 2 \cdot (56 - 6)$$

$$=125 - 2 \cdot 50$$

$$=25$$

d) $23.75 + 5^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 13 + 180$

$$=23.75 + 25 \cdot (10 + 13) + 180$$

$$=23.75 + 25 \cdot 23 + 180$$

$$=23 \cdot 100 + 180$$

$$=2300 + 180$$

$$=2480$$

e) $36.4 - 4 \cdot (82 - 7.11)^2 : 4 - 2016^0$

$$=36.4 - 4 \cdot (82 - 77)^2 : 4 - 1$$

$$=4(36 - 25) : 4 - 1$$

$$=11 - 1$$

$$=10$$

f) $303 - 3 \cdot \{ [655 - (18 : 2 + 1) \cdot 4^3 + 5] \} : 10^0$

$$=303 - 3 \cdot \{ [655 - 640 + 5] \}$$

$$=303 - 3 \cdot \{ [655 - 640 + 5] \}$$

$$=303 - 3 \cdot 10 = 263$$

Bài 11: Tính giá trị của biểu thức: $A = 2002.20012001 - 2001.20022002$

Lời giải:

$$A = 2002.20012001 - 2001.20022002$$

$$A = 2002.(20010000 + 2001) - 2001.(20020000 + 2002)$$

$$A = 2002.(2001 \cdot 10^4 + 2001) - 2001.(2002 \cdot 10^4 + 2001)$$

$$A = 2002.2001 \cdot 10^4 + 2002.2001 - 2001.2002 \cdot 10^4 - 2001.2002$$

$$A = 0$$

Bài 12:

Tính:

a) $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$

b) $B = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{150}$

c) $C = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000}$

Lời giải:

a) $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$

$$2A = 2.2 + 2^2.2 + 2^3.2 + 2^4.2 + \dots + 2^{100}.2$$

$$2A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{101}$$

$$2A - A = (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{101}) - (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100})$$

$$A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{101} - 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \dots - 2^{100}$$

$$A = 2^{101} - 2$$

Vậy $A = 2^{101} - 2$

b) $B = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{150}$

$$5B = 1.5 + 5.5 + 5^2.5 + 5^3.5 + \dots + 5^{150}.5$$

$$5B = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{151}$$

$$5B - B = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{151}) - (1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{150})$$

$$4B = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{151} - 1 - 5 - 5^2 - 5^3 - \dots - 5^{150}$$

$$4B = 5^{151} - 1$$

$$B = \frac{5^{151} - 1}{4}$$

c) $C = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000}$

$$3C = 3.3 + 3^2.3 + 3^3.3 + \dots + 3^{1000}.3$$

$$3C = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{1001}$$

$$3C - C = (3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{1001}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1000})$$

$$2C = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{1001} - 3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^{1000}$$

$$2C = 3^{1001} - 3$$

$$C = \frac{3^{1001} - 3}{2}$$

Dạng 2: So sánh các lũy thừa

I. Phương pháp giải.

Để so sánh hai lũy thừa ta thường biến đổi về hai lũy thừa có cùng cơ số hoặc có cùng số mũ (có thể sử dụng các lũy thừa trung gian để so sánh)

Với $a, b, m, n \in \mathbb{N}$ ta có: $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$m > n \Leftrightarrow a^m > a^n \quad (a > 1)$$

$$a = 0 \text{ hoặc } a = 1 \text{ thì } a^m = a^n \quad (m, n \neq 0)$$

Với A, B là các biểu thức ta có :

$$A^n > B^n \Leftrightarrow A > B > 0$$

$$A^m > A^n \Rightarrow m > n \quad \text{và} \quad A > 1$$

$$m < n \quad \text{và} \quad 0 < A < 1$$

II. Bài toán.

Bài 1:

So sánh:

a) 333^{17} và 333^{23}

b) 2007^{10} và 2008^{10}

c) $(2008 - 2007)^{2009}$ và $(1998 - 1997)^{1999}$

Lời giải

a) Vì $1 < 17 < 23$ nên 333^{17} và 333^{23}

b) Vì $2007 < 2008$ nên 2007^{10} và 2008^{10}

c) Ta có : $(2008 - 2007)^{2009} = 1^{2009} = 1$

$$(1998 - 1997)^{1999} = 1^{1999} = 1$$

Vậy $(2008 - 2007)^{2009} = (1998 - 1997)^{1999}$

Bài 2:

So sánh

a) 2^{300} và 3^{200}

e) 99^{20} và 9999^{10}

b) 3^{500} và 7^{300}

f) 11^{1979} và 37^{1320}

c) 8^5 và 3.4^7

g) 10^{10} và 48.50^5

d) 202^{303} và 303^{202}

h) $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10}

Lời giải

a) Ta có: $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$

$$3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$$

Vì $8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$

b) Tương tự câu a) ta có: $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$

$$7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$$

Vì $243^{100} < 343^{100}$ nên $3^{500} < 7^{300}$

c) Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14} < 3.2^{14} = 3.4^7 \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$

d) Ta có: $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.102^2)^{101} = (808.101)^{101}$

$$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$$

Vì $808.101^2 > 9.101^2$ nên $202^{303} > 303^{202}$

e) Ta thấy: $99^2 < 99.101 = 9999 \Rightarrow (99^2)^{10} < 9999^{10} \Rightarrow 99^{20} < 9999^{10}$

f) Ta có: $11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$ (1)

$$37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $11^{1979} < 37^{1320}$

g) Ta có: $10^{10} = 2^{10}.5^{10} = 2.2^9.5^{10}$ (*)

$$48.50^5 = (3.2^4).(2^5.5^{10}) = 3.2^9.5^{10}$$
 (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow 10^{10} < 48.50^5$

h) Có: $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9.(1990 + 1) = 1991.1990^9$

$$1991^{10} = 1991.1991^9$$

Vì $1990^9 < 1991^9$ nên $1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$

Bài 3:

Chứng tỏ rằng : $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Lời giải

Ta có : $2^{63} = 128^9$

$$5^{27} = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27} \quad (1)$$

Lại có: $2^{63} = 512^7$

$$5^{28} = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Bài 4:

So sánh:

a) 107^{50} và 73^{75}

b) 2^{91} và 5^{35}

Lời giải

a) Ta thấy : $107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150} \quad (1)$

$$73^{75} > 72^{75} = (8.9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 107^{50} < 2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150} < 73^{75}$

b) $2^{91} > 2^{90} = 32^{18}$

$$5^{35} < 5^{36} = 25^{18}$$

$$\Rightarrow 2^{91} > 32^{18} > 25^{18} > 5^{35}$$

Vậy $2^{91} > 5^{35}$

Bài 5:

So sánh các cặp số sau:

a) $A = 27^5$ và $B = 243^3$

b) $A = 2^{300}$ và $B = 3^{200}$

Lời giải

a) Ta có $A = 27^5 = (3^3)^5 = 3^{15}$

$$B = (3^5)^3 = 3^{15}$$

Vậy $A = B$

b) $A = 2^{300} = 2^{3 \cdot 100} = 8^{100}$

$$B = 3^{200} = 3^{2 \cdot 100} = 9^{100}$$

Vì $8 < 9$ nên $8^{100} < 9^{100}$

$$\Rightarrow A < B$$

Bài 6:

So sánh các số sau:

a) 199^{20} và 2003^{15}

b) 3^{39} và 11^{21}

Lời giải

a) $199^{20} < 200^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = 2^{60} \cdot 5^{40}$

$2003^{15} > 2000^{15} = (2 \cdot 10^3)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = 2^{60} \cdot 5^{45}$

Vậy $2003^{15} > 199^{20}$

b) $3^{39} < 3^{40} = (3^2)^{20} = 9^{20} < 11^{21}$

Bài 7:

So sánh 2 hiệu: $72^{45} - 72^{44}$ và $72^{44} - 72^{43}$

Lời giải

$72^{45} - 72^{44} = 72^{44} \cdot (72 - 1) = 72^{44} \cdot 71$

$72^{44} - 72^{43} = 72^{43} \cdot (72 - 1) = 72^{43} \cdot 71$

Vậy $72^{45} - 72^{44} > 72^{44} - 72^{43}$

Bài 8:

So sánh các số sau:

a) 9^5 và 27^3

b) 3^{200} và 2^{300}

c) 3^{500} và 7^{300}

d) $3 \cdot 4^7$ và 8^5

e) 202^{303} và 303^{202}

Lời giải

a) Ta có: $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$

b) Ta có: $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

$27^3 = (3^3)^3 = 3^9$

$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$

Vì $3^{10} > 3^9$ nên $9^5 > 27^3$

Vì $9^{100} > 8^{100}$ nên $3^{200} > 2^{300}$

c) Ta có: $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$

d) Ta có: $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$

$7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$

$2^{15} = 2 \cdot 2^{14} < 3 \cdot 2^{14} = 3 \cdot 4^7$

Vì $243^{100} < 343^{100} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$

Vậy $8^5 < 3 \cdot 4^7$

e) Ta có: $202^{303} = (202^3)^{101}$; $303^{202} = (303^2)^{101}$

Ta so sánh 202^3 và 303^2

$$202^3 = 2^3 \cdot 101 \cdot 101^2$$

$$303^2 = 3^2 \cdot 101^2$$

$$\text{Vậy } 303^{202} < 2002^{303}$$

Bài 9: So sánh

$$\text{a) } A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^4 \text{ và } B = 2^5 - 1 \qquad \text{b) } C = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100} \text{ và } D = \frac{3^{101} - 3}{2}$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^4$$

$$2A = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + \dots + 2^4 \cdot 2$$

$$2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^5$$

$$2A - A = (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^5) - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^4)$$

$$A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^5 - 1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^4$$

$$A = 2^5 - 1$$

$$\text{Vậy } A = B$$

$$\text{b) } C = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$$

$$3C = 3 \cdot 3 + 3^2 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3 + \dots + 3^{100} \cdot 3$$

$$3C = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$$

$$3C - C = (3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}) - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100})$$

$$2C = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101} - 3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^{100}$$

$$2C = 3^{101} - 3$$

$$C = \frac{3^{101} - 3}{2}$$

$$\text{Vậy } C = D$$

Dạng 3: Tìm số hạng chưa biết trong lũy thừa

I. Phương pháp giải. Khi giải bài toán tìm x có lũy thừa phải:

Phương pháp 1: Biến đổi về các lũy thừa cùng cơ số.

Phương pháp 2: Biến đổi về các lũy thừa cùng số mũ.

Phương pháp 3: Biến đổi về dạng tích các lũy thừa.

II. Bài toán.

Bài 1:

Tìm x , biết.

a) $2^x \cdot 4 = 128$

b) $2^x - 26 = 6$

c) $64 \cdot 4^x = 4^5$

d) $27 \cdot 3^x = 243$

e) $49 \cdot 7^x = 2041$

g) $3^x = 81$

h) $3^4 \cdot 3^x = 3^7$

k) $3^x + 25 = 26 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^0$

Lời giải

a) Ta có: $2^x \cdot 4 = 128 \Rightarrow 2^x = 128 : 4 \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$.

b) Ta có: $2^x - 26 = 6 \Rightarrow 2^x = 6 + 26 \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$.

c) Ta có: $64 \cdot 4^x = 4^5 \Rightarrow 4^3 \cdot 4^x = 4^5 \Rightarrow 4^{x+3} = 4^5 \Rightarrow x+3 = 5 \Rightarrow x = 5 - 3 \Rightarrow x = 2$.

d) Ta có: $27 \cdot 3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 243 : 27 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

e) Ta có: $49 \cdot 7^x = 2401 \Rightarrow 7^x = 2401 : 49 \Rightarrow 7^x = 49 \Rightarrow 7^x = 7^2 \Rightarrow x = 2$.

g) Ta có: $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$.

h) Ta có: $3^4 \cdot 3^x = 3^7 \Rightarrow 3^x = 3^7 : 3^4 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$.

k) Ta có: $3^x + 25 = 26 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^0 \Rightarrow 3^x = 26 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 25 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$.

Bài 2:

Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết.

a) $3^x \cdot 3 = 243$

b) $2^x \cdot 16^2 = 1024$

c) $64 \cdot 4^x = 16^8$

d) $2^x = 16$

Lời giải

a) Ta có: $3^x \cdot 3 = 243 \Rightarrow 3^x = 243 : 3 \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$.

b) Ta có: $2^x \cdot 16^2 = 1024 \Rightarrow 2^x = 1024 : 16^2 \Rightarrow 2^x = 1024 : 256 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

c) Ta có: $64 \cdot 4^x = 16^8 \Rightarrow 4^3 \cdot 4^x = (4^2)^8 \Rightarrow 4^{x+3} = 4^{16} \Rightarrow x+3 = 16 \Rightarrow x = 16 - 3 \Rightarrow x = 13$.

d) Ta có: $2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$.

Bài 3:

Tìm x , biết.

a) $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$

b) $\frac{x - 2019}{4} = \frac{1}{x - 2019}$

c) $(2x - 1)^4 = 16$

d) $(2x + 1)^4 = (2x + 1)^6$

e) $\left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2}$

g) $(2x + 1)^3 = 125$

Lời giải

a) Ta có: $(7x - 11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200 \Rightarrow (7x - 11)^3 = 32 \cdot 25 + 200 \Rightarrow (7x - 11)^3 = 1000 \Rightarrow (7x - 11)^3 = 10^3$
 $\Rightarrow 7x - 11 = 10 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$

b) Ta có: $\frac{x - 2019}{4} = \frac{1}{x - 2019} \Rightarrow (x - 2019)^2 = 4 \Rightarrow (x - 2019)^2 = 2^2 \Rightarrow x - 2019 = 2 \Rightarrow x = 2021$.

c) Ta có: $(2x - 1)^4 = 16 \Rightarrow (2x - 1)^4 = \pm(2)^4 \Rightarrow 2x - 1 = \pm 2$.

TH 1: $2x - 1 = 2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

TH 2: $2x - 1 = -2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy $x = \frac{3}{2}$ hoặc $x = \frac{-1}{2}$.

$$(2x+1)^4 = (2x+1)^6 \Rightarrow (2x+1)^4 - (2x+1)^6 = 0 \Rightarrow (2x+1)^4 [1 - (2x+1)^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2x+1)^4 = 0 \\ 1 - (2x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

d)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \\ 2x+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-0,5 \\ x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy $x = -0,5; x = 0; x = -1$.

e) Ta có:

$$\left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \Rightarrow 3x^2 = \frac{39}{2} - \frac{15}{2} \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = (\pm 2)^2 \Rightarrow x = \pm 2.$$

g) Ta có: $(2x+1)^3 = 125 \Rightarrow (2x+1)^3 = 5^3 \Rightarrow 2x+1=5 \Rightarrow 2x=5-1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=4:2 \Rightarrow x=2.$

Bài 4:

Tìm x biết:

a, $(3x-1)^{10} = (3x-1)^{20}$ b, $x(6-x)^{2003} = (6-x)^{2003}$ c, $5^x + 5^{x+2} = 650$

Lời giải

a) Ta có: $(3x-1)^{10} = (3x-1)^{20} \Rightarrow (3x-1)^{20} - (3x-1)^{10} = 0$

$$\Rightarrow (3x-1)^{10} [(3x-1)^{10} - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ (3x-1)^{10}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ 3x-1=1 \\ 3x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \\ x=0 \end{cases}$$

b) Ta có: $x(6-x)^{2003} = (6-x)^{2003} \Rightarrow x(6-x)^{2003} - (6-x)^{2003} = 0$

$$\Rightarrow (6-x)^{2003} (x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6-x=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=1 \end{cases}$$

c) Ta có: $5^x + 5^x \cdot 5^2 = 650 \Rightarrow 5^x (1+25) = 650 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x=2$

Bài 5:

Tìm x biết:

a, $2^{x+2} - 2^x = 96$ b, $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$ c) $10^x : 5^y = 20^y$

Lời giải

a) Ta có:

$$2^{x+2} - 2^x = 96 \Rightarrow 2^x \cdot 4 - 2^x = 96 \Rightarrow 2^x \cdot (4 - 1) = 96 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 96 \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

b) Ta có: $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x \Rightarrow 2^{x+1} \cdot 3^y = 2^x \cdot 3^x \Rightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy $x=y=1$.

c) Ta có: $10^x : 5^y = 20^y \Rightarrow 10^x = 20^y \cdot 5^y \Rightarrow 10^x = 100^y \Rightarrow 10^x = 10^{2y} \Rightarrow x = 2y$.

Dạng 4: Một số bài tập nâng cao về lũy thừa

I. Phương pháp giải.

Phương pháp 1: Để so sánh hai lũy thừa ta thường đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

- Nếu hai lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n (a > 1) \Leftrightarrow m > n$$

- Nếu hai lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn

$$a^n > b^n (n > 0) \Leftrightarrow a > b$$

Phương pháp 2: Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

$$A > B, B > C \text{ thì } A > C.$$

$$AC < BC (C > 0) \Leftrightarrow A < B$$

II. Bài toán.

Dạng 1: So sánh hai số lũy thừa.

Bài 1:

So sánh các lũy thừa: 3^{2n} và 2^{3n}

Lời giải

Ta có: $3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$

$$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$$

Vì $9^n > 8^n$ nên $3^{2n} > 2^{3n}$

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

- Thu gọn biểu thức lũy thừa bằng cách vận dụng các phép tính lũy thừa, cộng trừ các số theo quy luật.
- Vận dụng phương pháp so sánh hai lũy thừa ở phần B.
- Nếu biểu thức lũy thừa là dạng phân thức: Đối với từng trường hợp bậc của lũy thừa ở tử lớn hơn hay bé hơn bậc của lũy thừa ở mẫu mà ta nhân với hệ số thích hợp nhằm tách phần nguyên rồi so sánh từng phần tương ứng.

Với $a, m, n, K \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

- Nếu $m > n$ thì $K - \frac{a}{m} > K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} < K + \frac{a}{n}$.

- Nếu $m < n$ thì $K - \frac{a}{m} < K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} > K + \frac{a}{n}$. (còn gọi là phương pháp so sánh phần bù)

* Với biểu thức là tổng các số có dạng $\frac{1}{a^2}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$) ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

Bài 1:

Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$. So sánh S với $5 \cdot 2^8$.

Lời giải

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$

$$2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^9 + 2^{10}$$

$$\Rightarrow S = 2^{10} - 1$$

$$\text{Mà } 2^{10} - 1 < 2^{10} = 4 \cdot 2^8 < 5 \cdot 2^8$$

Vậy $S < 5.2^8$.

Bài 2:

So sánh hai biểu thức A và B , biết: $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \Rightarrow 10A = 10 \cdot \left(\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \right) = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}.$$

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10B = 10 \cdot \left(\frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \right) = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = \frac{10^{17} + 1 + 9}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}.$$

$$\text{Vì } 10^{16} + 1 < 10^{17} + 1 \text{ nên } \frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1} \Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}$$

$$\Rightarrow 10A > 10B \text{ hay } A > B$$

Bài 3:

So sánh hai biểu thức C và D , biết: $C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1}$ và $D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \right) = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2008} - 2} = \frac{2^{2008} - 2 - 1}{2^{2008} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2}.$$

$$D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \right) = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2007} - 2} = \frac{2^{2007} - 2 - 1}{2^{2007} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}.$$

$$\text{Vì } 2^{2008} - 2 > 2^{2007} - 2 \text{ nên } \frac{1}{2^{2008} - 2} < \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2} > 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C > \frac{1}{2}D \text{ hay } C > D.$$

Vậy $C > D$.

Dạng 3: Từ việc so sánh lũy thừa, tìm cơ số (số mũ) chưa biết.

* Với các số tự nhiên m, x, p và số dương a .

+ Nếu $a > 1$ thì: $a^m < a^x < a^p \Rightarrow m < x < p$.

+ Nếu $a < 1$ thì: $a^m < a^x < a^p \Rightarrow m > x > p$.

* Với các số dương a, b và số tự nhiên m , ta có: $a^m < b^m \Rightarrow a < b$.

Bài 1:

Tìm các số nguyên n thỏa mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Lời giải

Ta giải từng bất đẳng thức $3^{64} < n^{48}$ và $n^{48} < 5^{72}$.

Ta có: $n^{48} > 3^{64} \Rightarrow (n^3)^{16} > (3^4)^{16} \Rightarrow (n^3)^{16} > 81^{16} \Rightarrow n^3 > 81$

$\Rightarrow n > 4$ (với $n \in \mathbb{Z}$) (1).

Mặt khác $n^{48} < 5^{72} \Rightarrow (n^2)^{24} < (5^3)^{24} \Rightarrow (n^2)^{24} < 125^{24} \Rightarrow n^2 < 125$

$\Rightarrow -11 \leq n \leq 11$ (với $n \in \mathbb{Z}$) (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < n \leq 11$.

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

Bài 2:

Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết:

a) $16^x < 128^4$.

b)

$$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$$

Lời giải

a) Ta có: $16^x < 128^4 \Rightarrow (2^4)^x < (2^7)^4 \Rightarrow 2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7$
 $\Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Ta có: $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$

$$\Rightarrow 5^{3x+3} \leq 10^{18} : 2^{18} \Rightarrow 5^{3x+3} \leq 5^{18} \Rightarrow 3x+3 \leq 18 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Bài 3:

Tìm số tự nhiên x, y sao cho $10^x = y^2 - 143$.

Lời giải

Ta có: $10^x = y^2 - 143 \Rightarrow 10^x + 143 = y^2$

Nếu $x=0 \Rightarrow y=12$ thỏa mãn.

Nếu $x > 0 \Rightarrow 10^x$ có chữ số tận cùng là 0. Khi đó, 10^x có chữ số tận cùng là 3. Mà y^2 là số chính phương nên không thể có tận cùng bằng 3. Do đó không tồn tại x, y thỏa mãn.

Vậy $x=0; y=12$.

Bài 4:

a) Số 5^8 có bao nhiêu chữ số?

b) Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau được số có bao nhiêu chữ số?

Lời giải

a) Ta có:

$$5^8 = (5^4)^2 = 625^2 > 600^2 = 360000$$

$$5^8 = \frac{10^8}{2^8} = \frac{100000000}{256} < \frac{100000000}{250} = 400000$$

$\Rightarrow 360000 < 5^8 < 400000$. Do đó 5^8 có 6 chữ số.

b) Giả sử 2^{2003} có a chữ số và 5^{2003} có b chữ số thì khi viết 2 số này liền nhau ta được $(a+b)$ chữ số.

$$\text{Vì } 10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a \text{ và } 10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a-1} \cdot 10^{b-1} < 2^{2003} \cdot 5^{2003} < 10^a \cdot 10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}. \text{ Do đó: } 2003 = a + b - 1 \Rightarrow a + b = 2004.$$

Vậy số đó có 2004 chữ số.

Bài 5:

Tìm số 5 các chữ số của các số n và m trong các trường hợp sau:

a) $n = 8^3 \cdot 15^5$.

b) $m = 4^{16} \cdot 5^{25}$.

Lời giải

a) Ta có:

$$n = 8^3 \cdot 15^5 = (2^3)^3 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^5$$

$$= 2^4 \cdot 3^5 \cdot (2 \cdot 5)^5 = 16 \cdot 243 \cdot 10^5 = 3888 \cdot 10^5.$$

Số $3888 \cdot 10^5$ gồm 3888 theo sau là 5 chữ số 0 nên số này có 9 chữ số.

Vậy số n có 9 chữ số.

b) Ta có:

$$m = 4^{16} \cdot 5^{25} = (2^2)^{16} \cdot 5^{25}$$

$$= 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^7 \cdot (2^{25} \cdot 5^{25}) = 128 \cdot 10^{25}.$$

Số $128 \cdot 10^{25}$ gồm 128 theo sau là 25 chữ số 0 nên số này có tất cả 28 chữ số.

Vậy số m có 28 chữ số.

Dạng 4: Sử dụng lũy thừa chứng minh chia hết

Bài 1:

Chứng minh rằng:

- a) $A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 4
- b) $B = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33
- c) $C = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8$ chia hết cho 30
- d) $D = 45 + 99 + 180$ chia hết cho 9
- e) $E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{119}$ chia hết cho 13
- f) $F = 10^{28} + 8$ chia hết cho 72
- g) $G = 8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17
- h) $H = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$ chia hết cho 3, 7, 15

i) $I = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991}$ chia cho 13 và 41

j) $J = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

k) $K = 10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81

Lời giải

a) $A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 4

$$A = (1+3) + 3^2 \cdot (1+3) + \dots + 3^{10} \cdot (1+3)$$

$$A = 4 + 3^2 \cdot 4 + \dots + 3^{10} \cdot 4$$

$$A = 4 \cdot (1 + 3^2 + \dots + 3^{10}) ; 4 (\text{đpcm})$$

b) $B = 16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 33

$$B = (2^4)^5 + 2^{15}$$

$$B = 2^{20} + 2^{15}$$

$$B = 2^{15} \cdot (1 + 2^5)$$

$$B = 2^{15} \cdot 33 ; 33 (\text{đpcm})$$

c) $C = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8$ chia hết cho 30

$$C = (5 + 5^2) + 5^2 \cdot (5 + 5^2) + \dots + 5^6 \cdot (5 + 5^2)$$

$$C = 30 + 5^2 \cdot 30 + \dots + 5^6 \cdot 30$$

$$C = 30 \cdot (1 + 5^2 + \dots + 5^6) ; 30 (\text{đpcm})$$

d) $D = 45 + 99 + 180$ chia hết cho 9

Ta có: $45 : 9 ; 99 : 9 ; 180 : 9$ nên $D = 45 + 99 + 180 : 9$ (đpcm) (tính chất chia hết của một tổng)

e) $E = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{119}$ chia hết cho 13

$$E = (1 + 3 + 3^2) + 3^3 \cdot (1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{117} \cdot (1 + 3 + 3^2)$$

$$E = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 3^{117} \cdot 13$$

$$E = 13 \cdot (1 + 3^3 + \dots + 3^{117}) ; 13 (\text{đpcm})$$

f) $F = 10^{28} + 8$ chia hết cho 72

Ta thấy: $72 = 8 \cdot 9$

Ta có:

$10^{28} + 8 : 9$ vì tổng các chữ số bằng 9

$10^{28} + 8 \cdot 8$ vì có tận cùng là 008

Mà $(8;9)=1$ nên $10^{28} + 8 \cdot 8 \cdot 9 = 72$ (đpcm)

g) $G = 8^8 + 2^{20}$ chia hết cho 17

$$G = (2^3)^8 + 2^{20}$$

$$G = 2^{24} + 2^{20}$$

$$G = 2^{20} \cdot (2^4 + 1)$$

$$G = 2^{20} \cdot 17 \cdot 17 (\text{đpcm})$$

h) $H = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}$ chia hết cho 3, 7, 15

Ta có:

$$H = 2 \cdot (1 + 2) + 2^3 \cdot (1 + 2) + \dots + 2^{59} \cdot (1 + 2)$$

$$H = 2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + \dots + 2^{59} \cdot 3$$

$$H = 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{59}) ; 3$$

Ta có:

$$H = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2) + 2^4 \cdot (1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{28} \cdot (1 + 2 + 2^2)$$

$$H = 2 \cdot 7 + 2^4 \cdot 7 + \dots + 2^{58} \cdot 7$$

$$H = 7 \cdot (2 + 2^4 + \dots + 2^{58}) ; 7$$

Ta có:

$$H = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + 2^5 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{57} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3)$$

$$H = 2 \cdot 15 + 2^5 \cdot 15 + \dots + 2^{57} \cdot 15$$

$$H = 15 \cdot (2 + 2^5 + \dots + 2^{57}) ; 15$$

Vậy H chia hết cho 3; 7; 15.

i) $I = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1991}$ chia cho 13 và 41

Ta có:

$$I = (1 + 3 + 3^2) + 3^3 \cdot (1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{1989} \cdot (1 + 3 + 3^2)$$

$$I = 13 + 3^3 \cdot 13 + \dots + 3^{1989} \cdot 13$$

$$I = 13 \cdot (1 + 3^3 + \dots + 3^{1989}) ; 13 (\text{đpcm})$$

Ta có:

$$I = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7) + \dots + (3^{1984} + 3^{1986} + 3^{1988} + 3^{1990}) + (3^{1985} + 3^{1987} + 3^{1989} + 3^{1991})$$

$$I = (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + 3 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + \dots + 3^{1984} \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6) + 3^{1985} \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + 3^6)$$

$$I = 820 \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1985})$$

$$I = 41 \cdot 20 \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{1984} + 3^{1985}) : 41$$

Vậy I chia hết cho $13; 41$

k) $K = 10^n + 72n - 1$ chia hết cho 81

Ta có:

$$K = 10^n + 72n - 1$$

$$K = 10^n - 1 + 72n$$

$$K = (10 - 1) \cdot [10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1] + 72n$$

$$K = 9 \cdot [10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1] - 9n + 81n$$

$$K = 9 \cdot [10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1 - n] + 81n$$

$$K = 9 \cdot [(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + \dots + (10 - 1) + (1 - 1)] + 81n$$

Ta có:

$$10^k - 1 = (10 - 1) \cdot [10^{k-1} + \dots + 10 + 1] \text{ chia hết cho } 9$$

$$\Rightarrow 9 \cdot [(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + \dots + (10 - 1) + (1 - 1)] \text{ chia hết cho } 81$$

$$\Rightarrow 9 \cdot [10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1 - n] + 81n \text{ chia hết cho } 81$$

$$\Rightarrow K = 10^n + 72n - 1 : 81 (\text{đpcm})$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

So sánh:

a) 243^5 và $3 \cdot 27^5$.

b) 625^5 và 125^7 .

Lời giải:

a) Ta có: $243^5 = (3^5)^5 = 3^{25}$; $3 \cdot 27^5 = 3 \cdot (3^3)^5 = 3 \cdot 3^{15} = 3^{16}$

Vì $3^{16} < 3^{25} \Rightarrow 3.27^5 < 243^5$.

b) $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}$; $125 = (5^3)^7 = 5^{21}$. Vì $5^{21} > 5^{20} \Rightarrow 125^7 > 625^5$.

Bài 2:

So sánh:

a) 99^{20} và 9999^{10} .

b) 3^{500} và 7^{300} .

c) 202^{303} và 303^{202} .

d) 11^{1979} và 37^{1320} .

Lời giải:

a) Ta thấy: $99^{20} = (99^2)^{10} = (99.99)^{10}$; $9999^{10} = (99.101)^{10}$

Vì $(99.99)^{10} < (99.101)^{10} \Rightarrow 99^{20} < 9999^{10}$.

b) Ta có: $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$, $7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$.

Vì $243^{100} < 343^{100}$ nên $3^{500} < 7^{300}$.

c) Ta có: $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101)^{101}$

$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$

Vì $808.101^2 > 9.101^2$ nên $202^{303} > 303^{202}$.

d) Ta có: $11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$ (1)

$37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $11^{1979} < 37^{1320}$.

Bài 3:

So sánh:

a) 8^5 và 3.4^7 .

b) 10^{10} và 48.50^5 .

c) $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và 3.24^{10} .

d) $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10} .

Lời giải:

a) Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14}$, $3.4^7 = 3.2^{14}$. Vì $2 < 3 \Rightarrow 2.2^{14} < 3.2^{14} \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$.

b) Ta có:

$10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$, $48 \cdot 50^5 = (3 \cdot 2^4) \cdot (2^5 \cdot 5^{10}) = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} < 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} \Rightarrow 10^{10} < 48 \cdot 50^5$.

c) Ta có: $4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30}.2^{30} = (2^3)^{10}.(2^2)^{15} = 8^{10}.4^{15}$,

$$24^{10}.3 = (8.3)^{10}.3 = 8^{10}.3^{10}.3 = 8^{10}.3^{11}$$

$$\text{Vì } 3^{11} < 4^{15} \Rightarrow 8^{10}.3^{11} < 8^{10}.4^{15} \Rightarrow 4^{30} > 3.24^{10}$$

$$\Rightarrow 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3.24^{10}.$$

d) Ta có :

$$1990^{10} + 1990^9 = 1990^9.(1990 + 1) = 1991.1990^9$$

$$1991^{10} = 1991.1991^9$$

$$\text{Vì } 1990^9 < 1991^9 \text{ nên } 1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}.$$

Bài 4:

So sánh các số sau: 199^{20} và 2003^{15} .

Lời giải:

$$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$$

$$\text{Vì } 5^{45} > 5^{40} \Rightarrow 2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}.$$

Bài 5:

So sánh:

a) $78^{12} - 78^{11}$ và $78^{11} - 78^{10}$.

b) $A = 72^{45} - 72^{44}$ và $B = 72^{44} - 72^{43}$.

Lời giải:

a) Ta có: $78^{12} - 78^{11} = 78^{11}.(78 - 1) = 78^{11}.77$

$$78^{11} - 78^{10} = 78^{10}.(78 - 1) = 78^{10}.77$$

$$\text{Vì } 78^{11} > 78^{10} \Rightarrow 78^{11}.77 > 78^{10}.77 \Rightarrow 78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}.$$

b) Ta có: $A = 72^{44}(72 - 1) = 72^{44}.71$ và $B = 72^{43}(72 - 1) = 72^{43}.71$

$$72^{44} > 72^{43} \Rightarrow 72^{44}.71 > 72^{43}.71 \Rightarrow A > B.$$

Bài 6:

So sánh các số sau: 3^{39} và 11^{21} .

Lời giải:

Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$$11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10} < 11^{21}$$

$$\text{Vì } 81^{10} < 121^{10} \Rightarrow 3^{39} < 11^{21}.$$

Bài 7:

Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Lời giải:

Ta có: $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9, 5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$ (1)

Lại có: $2^{63} = (2^9)^7 = 512^7, 5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Bài 8:

Chứng minh rằng: $2^{1995} < 5^{863}$.

Lời giải:

Ta có: $2^{1995} = 2^{1990} \cdot 2^5; 5^{863} = 5^{860} \cdot 5^3$

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh 2^{1990} và 5^{860}

Có: $2^{10} = 1024, 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$

Có: $2^{1990} = 2^{1720} \cdot 2^{270}$, cần so sánh $2^{1720} \cdot 2^{270}$ với số $2^{1720} \cdot 3^{172}$ như sau:

$$3^7 = 2187; 2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$$

$$3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11})^{24} > (2^{11})^6 = 2^{270}$$

Do đó: $2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$

Mà $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$

Bài 9:

Chứng minh rằng: $2^{1999} < 7^{714}$.

Lời giải:

Ta có: $2^{10} = 1024; 7^3 = 343$

$$\Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238}$$

$$\Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \quad (1)$$

Xét: $3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 \cdot (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381}$ (vì $3^5 < 2^8$)

$$\Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714}$

$$\Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$$

Bài 10:

So sánh: 3^{200} và 2^{300} .

Lời giải:

Ta có: $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$; $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ mà $8^{100} < 9^{100}$
 $\Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$

Bài 11:

So sánh: 71^{50} và 37^{75} .

Lời giải:

Ta có: $71^{50} < 72^{50} = (8.9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100}$ (1)

$37^{75} > 36^{75} = (4.9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150}$ (2)

Mà $2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$

Bài 12:

So sánh các số:

a) 50^{20} và 2550^{10} .

b) 999^{10} và 999999^5 .

Lời giải:

a) Ta có: $50^{20} = \left[(50)^2\right]^{10} = 2500^{10} < 2550^{10} \Rightarrow 50^{20} < 2550^{10}$

b) Ta có: $999^{10} = \left[(999)^2\right]^5 > 998001^5 < 999999^5 \Rightarrow 999^{10} < 999999^5$

Bài 13:

Viết theo từ nhỏ đến lớn: 2^{100} ; 3^{75} và 5^{50} .

Lời giải:

$2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50} < 5^{50}$ (1)

$3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25} = 3^{75} > 5^{50}$ (2)

$5^{50} = (5^2)^{25} = 25^{25}$ (3)

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$

Bài 14:

So sánh 2 số: 1234^{56789} và 56789^{1234} .

Lời giải:

Ta có: $A = 1234^{56789} > 1000^{50000} = (10^3)^{50000} = 10^{150000}$

$B = 56789^{1234} < 100000^{2000} = (10^5)^{2000} = 10^{10000}$

Vì $10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}$

Bài 15:

Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số 0.

Hãy so sánh m với 10.9^8 .

Lời giải:

Số có 9 chữ số là $\overline{a_1 a_2 \dots a_9}$ trong đó các chữ số $a_i \neq 0 (i = \overline{1; 9})$ và có thể giống nhau. Từ tập hợp số $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ mỗi chữ số a_i có 9 cách chọn. Do đó ta có số các số có 9 chữ số thỏa mãn bài toán là $m = 9^9$ số.

Từ đó: $m = 9^9 = 9.9^8 < 10.9^8$

Bài 16:

Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$.

So sánh A và B.

Lời giải:

Ta có: $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$

$2012.A = 2011 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + 2012^5 + \dots + 2012^{72} + 2012^{73}$

$\Rightarrow 2012.A - A = 2011A = 2012^{73} - 1$

$\Rightarrow A = (2012^{73} - 1) : 2011 < 2012^{73} - 1$

Vậy $A < B$.

Bài 17:

So sánh hai biểu thức: $B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$ và $C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$.

Lời giải:

$B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{3^{10}(11+5)}{3^9 \cdot 16} = 3$

$C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^{10}(13+65)}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^2 \cdot 78}{104} = 3$

Vậy $B = C$.

Bài 18:

So sánh: $M = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ và $N = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}$

$$\frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}$$

Vì $\frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^4} < \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}$

$$\Rightarrow M < N$$

Bài 19:

So sánh M và N biết: $M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$ và $N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$.

Lời giải:

$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$ nên $19M = \frac{19 \cdot (19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}$

$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$ nên $19N = \frac{19(19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$

Vì $\frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$

$1 + \frac{90}{19^{31} + 5} > 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$ hay $19M > 19N \Rightarrow M > N$

Bài 20:

So sánh $\frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{104^2} + \frac{1}{105^2}$ và $\frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}$.

Lời giải:

Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{(n-1) \cdot n} = \frac{n - n + 1}{(n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$\frac{1}{101^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$\frac{1}{102^2} < \frac{1}{101} - \frac{1}{102}$$

.....

$$\frac{1}{105^2} < \frac{1}{104} - \frac{1}{103}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{105}$$

$$= \frac{105 - 100}{100 \cdot 105} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7}$$

Bài 21:

So sánh $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$ và $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

A là tích của 99 số âm. Do đó:

$$-A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \dots \frac{99 \cdot 101}{100^2}$$

Để dễ rút gọn ta viết tử dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$-A = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots 98 \cdot 99}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 99 \cdot 100} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 100 \cdot 101}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 99 \cdot 100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } A < -\frac{1}{2}$$

Bài 22:

Tìm các số tự nhiên n sao cho:

a) $3 < 3^n \leq 234$.

b) $8 \cdot 16 \geq 2^n \geq 4$.

Lời giải:

a) $3 < 3^n \leq 234 \Rightarrow 3^1 < 3^n \leq 3^5 \Rightarrow 1 < n \leq 5$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: 2, 3, 4, 5.

b) $8 \cdot 16 \geq 2^n \geq 4 \Rightarrow 2^3 \cdot 2^4 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 2^7 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 7 \geq n \geq 2$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: 2, 4, 5, 6, 7

Bài 23:

Tìm số tự nhiên n biết rằng: $4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16}$.

Lời giải:

Ta có: $4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16} \Rightarrow (4 \cdot 9)^{15} < (2 \cdot 3)^n < (18 \cdot 2)^{16}$

$$\Rightarrow 36^{15} < 6^n < 36^{16}$$

$$\Rightarrow (6^2)^{15} < 6^n < (6^2)^{16}$$

$$\Rightarrow 6^{30} < 6^n < 6^{32}$$

$$\Rightarrow 30 < n < 32$$

$$\Rightarrow n = 31$$

Bài 24:

Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Tìm số tự nhiên n , biết $2A + 3 = 3^n$.

Lời giải:

Có $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$

$$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$$

$$\Rightarrow 3A - A = 2A = 3^{101} - 3$$

$$\Rightarrow 2A + 3 = 3^{101}$$

Mà theo đề bài ta có $2A + 3 = 3^n$

$$\Rightarrow 3^{101} = 3^n \Rightarrow n = 101$$

Bài 25:

Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m - 2^n = 256$.

Lời giải:

Ta có: $2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8$ (1)

Dễ thấy $m \neq n$, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - n = 1$ thì từ (1) ta có:

$$2^n \cdot (2 - 1) = 2^8 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8 \text{ và } m = 9$$

Trường hợp 2: Nếu $m - n \geq 2$

$\Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố, còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, do đó hai vế của (1) mâu thuẫn nhau.

Vậy $n = 8$ và $m = 9$ là đáp số duy nhất.

Bài 26:

Tìm số nguyên dương n biết:

$$a) 64 < 2^n < 256.$$

$$b) 243 > 3^n \geq 9.$$

Lời giải:

a) Ta có: $64 < 2^n < 256 \Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8 \Rightarrow 6 < n < 8$ mà n nguyên dương nên $n = 7$.

b) Ta có: $243 > 3^n \geq 9 \Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2 \Rightarrow 5 > n \geq 2$ mà n nguyên dương nên $n \in \{2; 3; 4\}$.

Bài 27:

Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho: $n^{200} < 6^{300}$.

Lời giải:

Ta có: $n^{200} = (n^2)^{100}$; $6^{300} = (6^3)^{100} = 216^{100}$

$$n^{200} < 6^{300} \Rightarrow (n^2)^{100} < 216^{100} \Rightarrow n^2 < 216 \quad (*)$$

Suy ra: số nguyên lớn nhất thỏa mãn (*) là $n = 14$.

Bài 28:

Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết:

$$a) 32 < 2^n < 512.$$

$$b*) 3^{18} < n^{12} \leq 20^8.$$

Lời giải:

$$a) 32 < 2^n < 512$$

$$2^5 < 2^n < 2^9$$

Suy ra $5 < n < 9$

$$\text{Vậy } n \in \{6; 7\}$$

$$b) \text{ Với } n \in \mathbb{N}, \text{ ta xét: } 3^{18} < n^{12} \Leftrightarrow (3^3)^6 < (n^2)^6 \Leftrightarrow 3^3 < n^2 \Leftrightarrow 27 < n^2$$

Nhận thấy: $5^2 < 27 < 6^2$ nên $6^2 \leq n^2 \Rightarrow 6 \leq n$

$$n^{12} \leq 20^8 \Leftrightarrow (n^3)^4 < (20^2)^4 \Leftrightarrow n^3 < 20^2 \Leftrightarrow n^3 < 400$$

Nhận thấy: $7^3 < 400 < 8^3$ nên $n^3 \leq 7^3 \Rightarrow n \leq 7$

$$\text{Do đó: } 6 \leq n \leq 7 \Rightarrow n \in \{6; 7\}.$$