



Chương

Bài 1.

GIỚI HẠN DÃY SỐ



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = 0$.

C. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = -\infty$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = +\infty$ là mệnh đề **sai** vì chưa rõ dấu của v_n là dương hay âm.

» Câu 2. Trong các khẳng định dưới đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

👉 **Lời giải**

Chọn D

(I) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương $\Rightarrow$ (I) là khẳng định đúng.

(II) $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1 \Rightarrow$ (II) là khẳng định sai vì $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

(III) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1 \Rightarrow$ (III) là khẳng định đúng.

Vậy số khẳng định đúng là 2.

» Câu 3. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

B. $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

C. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

D. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

👉 **Lời giải**



Chọn B

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số thì $\lim q^n = 0$ ($|q| < 1$).

» Câu 4. $\lim \frac{1}{5n+3}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$\lim \frac{1}{5n+3} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = 0$$

Ta có

» Câu 5. $\lim \frac{1}{2n+5}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim \frac{1}{2n+5} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = 0$$

» Câu 6. Tìm $I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

- A. $\frac{7}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1} = \lim \frac{\frac{7}{n} - 2 + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = -\frac{2}{3}.$$

Ta có

» Câu 7. $\lim \frac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5}$ bằng:

- A. 2. B. 0. C. $-\frac{3}{5}$. D. -3.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim \frac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5} = \lim \frac{\frac{2}{n^4} - \frac{3}{n^6}}{1 + \frac{5}{n}} = 0.$$

» Câu 8. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n+1}{2+n-n^2}$?

- A. $L = -\infty$. B. $L = -2$. C. $L = 1$. D. $L = 0$.



Lời giải

Chọn D

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n} - 1} = 0$$

Ta có:

» **Câu 9.** Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 3n^2}$ B. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 3n^2}$ C. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 3n^2}$ D. $u_n = \frac{1 - 2n^2}{5n + 3n^2}$

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{5n + 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n} + 3} = \frac{1}{3}$$

➤ Xét đáp án A.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n}{5n + 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n}}{\frac{5}{n} + 3} = \frac{1}{3}$$

➤ Xét đáp án B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n}{5n + 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}}{\frac{5}{n} + 3} = 0$$

➤ Xét đáp án C.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{5n + 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 2}{\frac{5}{n} + 3} = -\frac{2}{3}$$

➤ Xét đáp án D.

» **Câu 10.** Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n}{n + 1}$ bằng

A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1.$$

Ta có:

» **Câu 11.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 19n}{18n + 19}$ bằng

A. $\frac{19}{18}$ B. $\frac{1}{18}$ C. $+\infty$ D. $\frac{1}{19}$

Lời giải

Chọn A



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+19n}{18n+19} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}+19}{18+\frac{19}{n}} = \frac{19}{18}$$

Ta có

» **Câu 12.** Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\frac{1}{n}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

C. $\frac{n+1}{n}$.

D. $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$.

» **Câu 13.** Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1}$.

A. 2.

B. 8.

C. 1.

D. 4.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5} \right)}{n^5 \left(4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5}} = \frac{8}{4} = 2$.

» **Câu 14.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2n + 2}{4n^4 + 2n + 5}$ bằng

A. $\frac{2}{11}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $+\infty$.

D. 0.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2n + 2}{4n^4 + 2n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}} = \frac{1}{2}$.

» **Câu 15.** Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{3-n}, n \in \mathbb{N}^*$ là:

A. -2.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. $-\frac{1}{3}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{\frac{3}{n} - 1} = -\frac{1}{3}$.

» **Câu 16.** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 3n - 1}{4 + 5n + 2n^2}$.



A. 2.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 4.

D. $-\frac{1}{4}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

$$\lim \frac{8n^2 + 3n - 1}{4 + 5n + 2n^2} = \lim \frac{8 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} + 2} = 4$$

Ta có

» Câu 17. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$; $v_n = \frac{3}{n+3}$. Tính $\lim \frac{u_n}{v_n}$.

A. 0.

B. 3.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $+\infty$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

$$I = \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{3}{n+3}} = \lim \frac{n+3}{3(n+1)} = \lim \frac{1 + \frac{3}{n}}{3\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Ta có

» Câu 18. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$ bằng.

A. 2.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 0.

👉 **Lời giải**

Chọn B

» Câu 19. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $(0,999)^n$.

B. $(-1)^n$.

C. $(-1,0001)^n$.

D. $(1,2345)^n$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Do $0,999 < 1$ nên $\lim (0,999)^n = 0$.

» Câu 20. $\lim \frac{100^{n+1} + 3.99^n}{10^{2n} - 2.98^{n+1}}$ là

A. $+\infty$.

B. 100.

C. $\frac{1}{100}$.

D. 0.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\lim \frac{100^{n+1} + 3.99^n}{10^{2n} - 2.98^{n+1}} = \lim \frac{100 + 3 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^n}{1 - 2 \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^n} = 100$$

» Câu 21. $\lim (3^n - 4^n)$ là

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 1.

👉 **Lời giải**



Chọn B

Ta có: $\lim (3^n - 4^n) = \lim 4^n \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right) = -\infty$.

» Câu 22. Tính giới hạn $\lim \frac{3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}}{4 + 3^n}$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. $\frac{6}{5}$.

D. -6.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\lim \frac{3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}}{4 + 3^n} = \lim \frac{6 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n - 6}{4 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n + 1} = -6$$

Ta có

$$T = \lim (\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n})$$

» Câu 23. Tính giới hạn

A. $T=0$.

B. $T=\frac{1}{4}$.

C. $T=\frac{1}{8}$.

D. $T=\frac{1}{16}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

$$\begin{aligned} T &= \lim (\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n}) = \lim \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16^{n+1} + 4^n} + \sqrt{16^{n+1} + 3^n}} \\ &= \lim \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16 \cdot 16^n + 4^n} + \sqrt{16 \cdot 16^n + 3^n}} = \lim \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{\sqrt{16 + \left(\frac{1}{4} \right)^n} + \sqrt{16 + \left(\frac{3}{4} \right)^n}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

» Câu 24. Cho dãy số (u_n) thỏa $|u_n - 2| < \frac{1}{n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

A. $\lim u_n$ không tồn tại.

B. $\lim u_n = 1$.

C. $\lim u_n = 0$.

D. $\lim u_n = 2$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có: $|u_n - 2| < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \lim (u_n - 2) = \lim \frac{1}{n^3} = 0 \Rightarrow \lim u_n - 2 = 0 \Rightarrow \lim u_n = 2$.

» Câu 25. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

👉 **Lời giải**

Chọn A



Ta có: $\lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right)$

$$= \lim \left(\frac{(a^2 - 4a + 3)n + 2 + 2a^2 - 8a}{n+2} \right) = \lim \left(\frac{a^2 - 4a + 3 + \frac{2 + 2a^2 - 8a}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = a^2 - 4a + 3$$

Theo giả thiết: $\lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = 1$

Vậy $S = \{1; 3\} \Rightarrow 1 + 3 = 4$

» Câu 26. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có giới hạn bằng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính

A. 192 B. 68 C. 32 D. 128

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$\lim \frac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3} = \lim \frac{\left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{3}{n} - 1\right)^2}{\left(4 - \frac{5}{n}\right)^3} = \frac{3}{64} = \frac{a}{b}$$

Ta có: . Do đó: $ab = 192$

» Câu 27. Biết $\lim \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng

A. -12. B. -2. C. 0. D. -6.

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$\lim \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \lim \frac{n^3 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}\right)}{n^3 \left(a + \frac{2}{n^3}\right)} = \frac{2}{a} = \frac{1}{2}$$

Ta có

Suy ra $a = 4$. Khi đó $a - a^2 = 4 - 4^2 = -12$.

» Câu 28. Giới hạn $\lim \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 7}$ có giá trị bằng?

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. 0. D. $\frac{1}{3}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có kết quả quen thuộc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3 + 2n + 7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6 \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}$$

Do đó

» Câu 29. Tìm $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$.

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{n}$. D. 0.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim \left(\frac{1+2+\dots+n}{n^2} \right) = \lim \left(\frac{n(n+1)}{2n^2} \right) = \lim \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

» Câu 30. $\lim (2-3n)^4 (n+1)^3$ là:

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 81 D. 2

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\lim (2-3n)^4 (n+1)^3 = \lim \left[n^7 \left(\frac{2}{n} - 3 \right)^4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 \right]$$

Ta có $\lim n^7 = +\infty$

$$\lim \left(\frac{2}{n} - 3 \right)^4 = (-3)^4 = 3^4$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = 1$$

$$\Rightarrow \lim (2-3n)^4 (n+1)^3 = +\infty$$

» Câu 31. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+5+\dots+(4n-3)}}{2n-1}$ bằng

- A. 1. B. $+\infty$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 0.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+5+\dots+(4n-3)}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 \cdot \frac{1-4^n}{1-4}}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4^n-1}}{\sqrt{3}(2n-1)} = +\infty$

» Câu 32. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+1}$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $+\infty$. C. 1. D. $-\infty$.

👉 **Lời giải**



Chọn A

$$\lim u_n = \lim \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+1} = \lim \frac{n\sqrt{n^2}}{2n^2+1} = \lim \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

» Câu 33. $\lim(\sqrt{n^2-3n+1}-n)$ bằng

- A. -3 . B. $+\infty$. C. 0 . D. $-\frac{3}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\sqrt{n^2-3n+1}-n = \frac{-3n+1}{\sqrt{n^2-3n+1}+n} = \frac{-3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$

Ta có

$$\lim(\sqrt{n^2-3n+1}-n) = -\frac{3}{2}$$

Nên

» Câu 34. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

- A. $\lim \frac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. B. $\lim \frac{3n^2+n}{4n^2-5}$.
C. $\lim(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1})$. D. $\lim \frac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

$$\lim(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}) = \lim \frac{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}$$

Ta có:

$$= \lim \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$L = \lim(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1})$$

» Câu 35. Tính giới hạn

- A. $+\infty$. B. 1 . C. $-\infty$. D. $\frac{9}{4}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$L = \lim(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}) = \lim \frac{(9n^2+2n-1)-(4n^2+1)}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}} = \lim \frac{5n^2+2n-2}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$= \lim \frac{n^2\left(5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right)} = \lim n \cdot \frac{5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} = +\infty.$$



» Câu 36. Tính giới hạn $L = \lim \left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} + \sqrt[3]{5n^2 - 8n^3} \right)$.

- A. $+\infty$. B. -7 . C. $\frac{53}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 2} + \sqrt[3]{5n^2 - 8n^3} \right) \\ &= \lim \frac{8n^2 - 2}{\sqrt[3]{(8n^3 + 3n^2 - 2)^2} - \sqrt[3]{(8n^3 + 3n^2 - 2)(5n^2 - 8n^3)} + \sqrt[3]{(5n^2 - 8n^3)^2}} \\ &= \lim \frac{8 - \frac{2}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(8 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3}\right) \cdot \left(\frac{5}{n} - 8\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{5}{n} - 8\right)^2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

» Câu 37. Tính giới hạn $L = \lim \left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n + 6 \right)$.

- A. $+\infty$. B. $\frac{25}{4}$. C. $\frac{53}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n + 6 \right) = 6 + \lim \left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} - 2n \right) \\ &= 6 + \lim \frac{3n^2 + 4}{\sqrt[3]{(8n^3 + 3n^2 + 4)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 4} + 4n^2} \\ &= 6 + \lim \frac{3 + \frac{4}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}\right)^2} + 2\sqrt[3]{8 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^3}} + 4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

» Câu 38. Tính giới hạn $L = \lim \left(\sqrt[3]{n - n^3} + n + 2 \right)$.

- A. $+\infty$. B. 2 . C. 1 . D. $\frac{1}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\begin{aligned} L &= \lim \left(\sqrt[3]{n - n^3} + n + 2 \right) = 2 + \lim \left(\sqrt[3]{n - n^3} + n \right) = 2 + \lim \frac{n}{\sqrt[3]{(n - n^3)^2} - n\sqrt[3]{n - n^3} + n^2} \\ &= 2 + \lim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n^2} - 1} + 1} = 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$



$$L = \lim (\sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 1})$$

» Câu 39. Tính giới hạn

- A. $+\infty$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{5}{3}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

$$\begin{aligned} L &= \lim (\sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt[3]{n^6 + 1}) = \lim \left[(\sqrt{n^4 + n^2} - n^2) - (\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2) \right] \\ &= \lim (\sqrt{n^4 + n^2} - n^2) - \lim (\sqrt[3]{n^6 + 1} - n^2) = \lim \frac{(n^4 + n^2 - n^4)}{\sqrt{n^4 + n^2} + n^2} - \lim \frac{(n^6 + 1) - n^6}{\sqrt[3]{(n^6 + 1)^2} + n^2 \sqrt[3]{n^6 + 1} + n^4} \\ &= \lim \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n^2} + n^2} - \lim \frac{1}{\sqrt[3]{(n^6 + 1)^2} + n^2 \sqrt[3]{n^6 + 1} + n^4} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$L = \lim (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2})$$

» Câu 40. Tính giới hạn

- A. $+\infty$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{53}{2}$. D. $\frac{1}{6}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\begin{aligned} L &= \lim (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) = \lim \left[(\sqrt{n^2 + n + 1} - n) + (n - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) \right] \\ &= \lim \left[\frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} + \frac{n^3 - (n^3 + n^2)}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n^2} + (\sqrt[3]{n^3 + n^2})^2} \right] \\ &= \lim \left[\frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} - \frac{n^2}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n^2} + (\sqrt[3]{n^3 + n^2})^2} \right] \\ &= \lim \left[\frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)} - \frac{n^2}{n^2 \left(1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 \right)} \right] \\ &= \lim \left[\frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \right)^2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

» Câu 41. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $\left(\frac{4}{e}\right)^n$. B. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. C. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. D. $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.



Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Mặt khác $\left|\frac{4}{e}\right| > 1$; $\left|\frac{5}{3}\right| = \left|\frac{-5}{3}\right| > 1$; $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Vậy $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

» **Câu 42.** Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$.

- A. $S = 2$. B. $S = \frac{3}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

» **Câu 43.** Tổng vô hạn sau đây $S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$ có giá trị bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. 3. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{3^2}; \dots; \frac{2}{3^n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{3} < 1$.

$$S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

» **Câu 44.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,15555\dots = 3,1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là

- A. $\frac{63}{20}$. B. $\frac{142}{45}$. C. $\frac{1}{18}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$3,15555\dots = 3,1(5) = 3,1 + 5 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) = 3,1 + 5 \cdot \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{142}{45}$$

» **Câu 45.** Tổng $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n} + \dots$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. 1. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n} + \dots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1, q = \frac{1}{2}$.



Áp dụng công thức được $S = \frac{u_1}{1-q}$ kết quả $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$.

- » **Câu 46.** Cho dãy số $(u_n); n \in \mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{u_n}{5} \end{cases}$. Gọi $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho. Khi đó $\lim S_n$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{5}$. C. 0. D. $\frac{5}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-\frac{u_n}{5}}{u_n} = -\frac{1}{5}$ do đó dãy $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 3, d = -\frac{1}{5}$.

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q} = \frac{3}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

Suy ra

- » **Câu 47.** Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm $\lim \frac{n}{u_n}$.
- A. $L = \frac{1}{3}$. B. $L = \frac{1}{2}$. C. $L = 3$. D. $L = 2$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$.

$$\lim \frac{n}{u_n} = \lim \frac{n}{3n-1} = \lim \frac{1}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

- » **Câu 48.** Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n = \frac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$.

B. $u_n = n(\sqrt{n^2+2018} - \sqrt{n^2+2016})$.

C. $\begin{cases} u_1 = 2017 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

D. $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta tính giới hạn của các dãy số trong từng đáp án:

$$\lim u_n = \lim \frac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}} = \lim \left[\frac{2017-n}{n} \cdot \left(\frac{2017-n}{2018-n} \right)^{2017} \right]$$

+) **Đáp án A:**



$$= \lim \left[\left(\frac{2017}{n} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2017}{n} - 1}{\frac{2018}{n} - 1} \right)^{2017} \right] = -1$$

$$\lim u_n = \lim n(\sqrt{n^2 + 2018} - \sqrt{n^2 + 2016}) = \lim \frac{n(n^2 + 2018 - n^2 - 2016)}{\sqrt{n^2 + 2018} + \sqrt{n^2 + 2016}}$$

+) Đáp án B:

$$= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2018} + \sqrt{n^2 + 2016}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2018}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2016}{n^2}}} = 1$$

+) Đáp án C:

Cách 1: Ta có $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) \Rightarrow u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1) = \dots = \frac{1}{2^{n-1}}(u_1 - 1)$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2016}{2^{n-1}} + 1 \Leftrightarrow u_n = 4032 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \Rightarrow \lim u_n = 1$$

Cách 2:

Bước 1: Ta chứng minh (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1.

Thật vậy bằng quy nạp ta có $u_1 = 2017 > 1$.

Giả sử $u_n > 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1) > \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$

Vậy $u_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hơn nữa $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(1 - u_n) < 0$ nên (u_n) là dãy giảm

Suy ra (u_n) có giới hạn $\lim u_n = a$

Bước 2: Ta có $a = \lim u_n = \lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(u_n + 1) = \frac{1}{2} \lim u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a = 1.$$

+) Đáp án D:

Ta có $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$$\Rightarrow \lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

» **Câu 49.** Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n = \frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n=1, 2, \dots$ Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$

A. $\frac{1}{4}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C



$$u_n = \frac{n}{(1+n^2)^2 - n^2} = \frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} \right)$$

Ta có

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2+n+1} \right) = \frac{1}{2} \frac{n^2+n}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

$$\lim(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = \frac{1}{2} \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra

» Câu 50. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$, khi đó $L = \lim \frac{u_n}{3^n}$

A. Không xác định. B. $L = +\infty$. C. $L = -\frac{5}{6}$. D. $L = 0$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Đặt $u_n = v_n + \frac{1}{2}$, thay vào biểu thức truy hồi ta có $v_n + \frac{1}{2} = 3 \left(v_{n-1} + \frac{1}{2} \right) - 1 \Leftrightarrow v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2$

Dễ thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, công bội $q=3$, suy ra $v_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}$

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2} (n \geq 1)$

Vậy $L = \lim \frac{u_n}{3^n} = \lim \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) = -\frac{5}{6}$

» Câu 51. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Biết rằng hai dãy số đồng thời thỏa mãn các hệ thức $u_{n+1} = 4v_n - 2, v_{n+1} = u_n + 1$ với mọi $\forall n \in \mathbb{N}^+$. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 2v_n)$ bằng

A. 0. B. $\frac{3}{2}$. C. -1. D. $\frac{1}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Giả sử $\begin{cases} \lim u_n = a \\ \lim v_n = b \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \lim u_{n+1} = \lim (4v_n - 2) \\ \lim v_{n+1} = \lim (u_n + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4b - 2 \\ b = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$



Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 2v_n) = a + 2b = -\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 0$.

» **Câu 52.** Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Chiều cao mô hình không quá 1,5 mét
- B.** Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét
- C.** Chiều cao mô hình dưới 2 mét.
- D.** Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

🔑 **Lời giải**

Chọn C

Gọi bán kính khối cầu dưới cùng là $R_1 = 50$ cm.

Gọi $R_2, R_3, \dots, R_n$ lần lượt là bán kính của các khối cầu $R_2, R_3, \dots, R_n$ nằm ngay trên khối cầu dưới cùng.

Ta có $R_2 = \frac{R_1}{2}, R_3 = \frac{R_2}{2} = \frac{R_1}{4}, \dots, R_n = \frac{R_{n-1}}{2} = \frac{R_1}{2^{n-1}}$

Gọi h_n là chiều cao của mô hình gồm có n khối cầu chồng lên nhau.
Ta có

$$h_n = 2R_1 + 2R_2 + 2R_3 + \dots + 2R_n = 2 \left(R_1 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{4}R_1 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}R_1 \right) = 2R_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

$$h = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2R_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \right]$$

Suy ra chiều cao mô hình là

Xét dãy số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^n}; \dots$ là một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

là dãy cấp số nhân lùi vô hạn. Do đó

Suy ra $h = 2R_1 \cdot 2 = 200$ cm. Vậy chiều cao mô hình nhỏ hơn 200 cm.

» **Câu 53.** Trong một lần Đoàn trường Lê Văn Hưu tổ chức chơi bóng chuyền hơi, bạn Nam thả một quả bóng chuyền hơi từ tầng ba, độ cao 8m so với mặt đất và thấy rằng mỗi lần chạm đất thì quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết quả bóng chuyển động vuông góc với mặt đất. Khi đó tổng quãng đường quả bóng đã bay từ lúc thả bóng đến khi quả bóng không máy nữa gần bằng số nào dưới đây nhất?

- A.** 57m.
- B.** 54m.
- C.** 56m.
- D.** 58m.

🔑 **Lời giải**

Chọn C

Lần đầu rơi xuống, quãng đường quả bóng đã bay đến lúc chạm đất là 8m.

Sau đó quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ 2 thì quãng đường quả

bóng đã bay là $8 + 2 \cdot 8 \cdot \frac{3}{4}$.



Tương tự, khi quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ n thì quãng

$$8 + 2.8.\frac{3}{4} + \dots + 2.8.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 8 + \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = 8 + 48\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

đường quả bóng đã bay là

Quãng đường quả bóng đã bay từ lúc thả đến lúc không máy nữa bằng:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [8 + 48(1 - (\frac{3}{4})^{n-1})] = 8 + 48 = 56$$

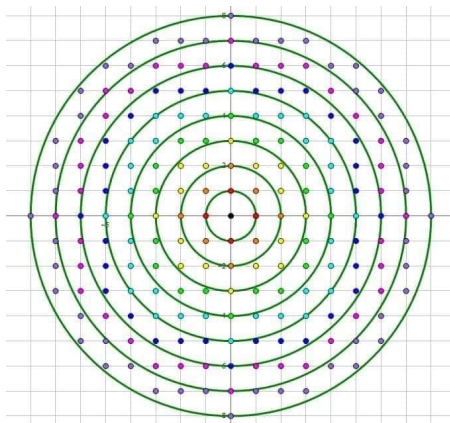
» **Câu 54.** Với mỗi số nguyên dương n , gọi S_n là số cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq n^2$. (nếu $a \neq b$ thì hai cặp số $(a; b)$ và $(b; a)$ khác nhau). Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{S_n}}{n} = \sqrt{2p}$. B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{S_n}}{n} = 2$. C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{S_n}}{n} = \sqrt{p}$. D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{S_n}}{n} = 4$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Cách 1:



Xét điểm $M(x; y)$ bất kì nằm trong (tính cả biên) của hình tròn (C_n) : $x^2 + y^2 \leq n^2$.

Mỗi điểm M tương ứng với một và chỉ một hình vuông đơn vị $S(M)$ nhận M là đỉnh ở góc trái, phía dưới, có các cạnh lần lượt song song hoặc nằm trên các trục tọa độ.

Ta được S_n bằng số các hình vuông $S(M)$ và bằng tổng diện tích của $S(M)$, với $M \in (C_n)$.

Nhận xét: các hình vuông $S(M)$, $S(M)$ đều nằm trong hình tròn $(C_{n+\sqrt{2}})$: $x^2 + y^2 \leq (n+\sqrt{2})^2$. Do đó $S_n \leq p(n+\sqrt{2})^2$ (1)

Mặt khác, các hình vuông $S(M)$ phủ kín hình tròn $(C_{n-\sqrt{2}})$: $x^2 + y^2 \leq (n-\sqrt{2})^2$.

Vì thế $S_n \geq p(n-\sqrt{2})^2$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\sqrt{p}(n-\sqrt{2}) \leq \sqrt{S_n} \leq \sqrt{p}(n+\sqrt{2})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.



$$\Leftrightarrow \sqrt{p} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \right) \leq \frac{\sqrt{s_n}}{n} \leq \sqrt{p} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n} \right) = \sqrt{p}$$

Mà , theo nguyên lí kẹp, ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{p}$$

Cách 2: Gọi D_n là số cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq n^2$ với $x \neq y$ và E_n là số cặp số nguyên $(x; x)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq n^2$. Ta có E_n là số các số nguyên k s

ao cho $2k^2 \leq n^2$, từ $k \leq \frac{\sqrt{2}}{2}n$, ta có $n \in \mathbb{Z}$ và $-\left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor \leq k \leq \left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor$. Cho nên

$$E_n = 2 \left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 1$$

Tiếp theo, ta đánh giá D_n .

Tổng số cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq n^2$ với $x \neq y$ là $4N_n$ với N_n là số các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq n^2$ và $x \neq y$. Giả sử $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \leq n^2$, khi đó $0 \leq x \leq n$, $0 \leq y \leq \sqrt{n^2 - x^2}$.

Nên ta có đánh giá với D_n là $4 \left(-n + \sum_{0 \leq x \leq n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor \right) \leq 4N_n \leq D_n \leq 4 \sum_{0 \leq x \leq n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor$.

Vì thế cho nên từ $s_n = E_n + D_n$, có $-4n + 1 + T_n \leq s_n \leq 1 + T_n$, trong đó

$$T_n = 2 \left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4 \sum_{1 \leq x \leq n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(2 \left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4 \sum_{1 \leq x \leq n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor \right)$. Do đánh giá về phần nguyên

$$2 \left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4 \sum_{1 \leq x \leq n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor \leq 2 \left(\frac{n\sqrt{2}}{2} \right) + 4 \sum_{1 \leq x \leq n} \sqrt{n^2 - x^2}$$

$$2 \left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 4 \sum_{1 \leq x \leq n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor \geq 2 \left(\frac{n\sqrt{2}}{2} \right) + 4 \sum_{1 \leq x \leq n} (\sqrt{n^2 - x^2} - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{1 \leq x \leq n} \sqrt{n^2 - x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{1 \leq x \leq n} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{n} \right)^2}$$

Nên ta được

Về bản chất, kết quả giới hạn này là giá trị của tích phân xác định

$$I = \int_0^1 4\sqrt{1 - x^2} dx = \pi$$



Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{\rho}$.

» Câu 55. Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

🔑 **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Vậy $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

$L = \lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$

» Câu 56. Tìm

A. $L = \frac{5}{2}$.

B. $L = +\infty$.

C. $L = 2$.

D. $L = \frac{3}{2}$.

🔑 **Lời giải**

Chọn C

Ta có $1+2+3+\dots+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1=1$, $d=1$ nên

$$1+2+3+\dots+k = \frac{(1+k)k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$L = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \right) = 2.$$

» Câu 57. Tổng $S = \frac{100}{10.15.20} + \frac{100}{15.20.25} + \frac{100}{20.25.30} + \dots + \frac{100}{110.115.120}$ có giá trị bằng:

A. $\frac{93}{1380}$

B. $\frac{91}{13800}$

C. $\frac{9}{138}$

D. $\frac{91}{1380}$

🔑 **Lời giải**

Chọn D

Ta có

$$\frac{100}{10.15.20} = 10 \left(\frac{1}{10.15} - \frac{1}{15.20} \right); \frac{100}{15.20.25} = 10 \left(\frac{1}{15.20} - \frac{1}{20.25} \right);$$

$$\frac{100}{20.25.30} = 10 \left(\frac{1}{20.25} - \frac{1}{25.30} \right); \frac{100}{110.115.120} = 10 \left(\frac{1}{110.115} - \frac{1}{115.120} \right)$$



Khi đó

$$S = 10 \left(\frac{1}{10.15} - \frac{1}{15.20} \right) + 10 \left(\frac{1}{15.20} - \frac{1}{20.25} \right) + 10 \left(\frac{1}{20.25} - \frac{1}{25.30} \right) + \dots + 10 \left(\frac{1}{110.115} - \frac{1}{115.120} \right)$$

$$= \frac{1}{15} - \frac{1}{115.12} = \frac{91}{1380}$$

» **Câu 58.** Giá trị của tổng: $S = \frac{12}{4.16} + \frac{20}{16.36} + \frac{28}{36.64} + \dots + \frac{84}{400.484}$ là:

A. $\frac{31}{121}$

B. $\frac{30}{121}$

C. $\frac{32}{121}$

D. $\frac{33}{121}$

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $\frac{12}{4.16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$; $\frac{20}{16.36} = \frac{1}{16} - \frac{1}{36}$; $\frac{28}{36.64} = \frac{1}{36} - \frac{1}{64}$; $\frac{84}{400.484} = \frac{1}{400} - \frac{1}{484}$

Khi đó $S = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right) + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{64} \right) + \dots + \left(\frac{1}{400} - \frac{1}{484} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{484} = \frac{30}{121}$

» **Câu 59.** Cho $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Công thức của S_n là:

A. $\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

B. $\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$

C. $\frac{2^n - 1}{2^n}$

D. $\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n-1}}$

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \right) S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

B. Câu hỏi - Trả lời đúng/sai

» **Câu 60.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$.

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a=2$.		
(b)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a=3$.		
(c)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của a là một số nguyên		
(d)	Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của $a=-2$		

👉 **Lời giải**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{a + \frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} \quad (a \neq 0)$$



(a) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của $a=2$.

$$2 = \lim u_n \Leftrightarrow 2 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a=2$$

Khi đó

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 1, giá trị của $a=3$.

$$1 = \lim u_n \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a=4$$

Khi đó

» **Chọn SAI.**

(c) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 3, giá trị của a là một số nguyên

$$3 = \lim u_n \Leftrightarrow 3 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$$

Khi đó

» **Chọn SAI.**

(d) Để dãy số đã cho có giới hạn bằng -2, giá trị của $a=-2$

$$-2 = \lim u_n \Leftrightarrow -2 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a=-2$$

Khi đó

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 61.** Đặt $I = \lim (\sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n+1})$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta biến đổi được $I = \lim \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$		
(b)	Nếu $I=0$ thì có 3 giá trị a thỏa mãn		
(c)	Nếu $I=0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1		
(d)	Có 2 giá trị a nguyên để $I=1$		

» **Lời giải**

(a) Ta biến đổi được $I = \lim \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$
 $\sqrt{n^2+a^2 n} - \sqrt{n^2+(a+2)n+1} \rightarrow 0 \rightarrow$ nhân lượng liên hợp.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \lim (\sqrt{n^2+a^2 n} - \sqrt{n^2+(a+2)n+1}) \\ &= \lim \frac{(a^2 - a - 2)n - 1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

» **Chọn SAI.**

(b) Nếu $I=0$ thì có 3 giá trị a thỏa mãn

$$I = \lim \frac{a^2 - a - 2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2 - a - 2}{2}$$



$$I=0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - a - 2}{2} = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Khi

» **Chọn SAI.**

(c) Nếu $I=0$ thì tổng các giá trị a tìm được bằng 1

Khi đó $-1+2=1 \neq 0$

» **Chọn SAI.**

(d) Có 2 giá trị a nguyên để $I=1$

$$I=1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - a - 2}{2} = 1 \Leftrightarrow a^2 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

Khi

» **Chọn SAI.**

» Câu 62. Biết $\lim(\sqrt{n^2 - 8n} - n + a) = 0$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có tất cả 3 giá trị a thỏa mãn		
(b)	Tổng các giá trị a tìm được bằng 0		
(c)	Có 2 giá trị nguyên âm a thỏa mãn		
(d)	Tích các giá trị a tìm được bằng -4		

» **Lời giải**

Nếu $\sqrt{n^2 - 8n} - n + a \rightarrow 0 \rightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim(\sqrt{n^2 - 8n} - n + a) = \lim \frac{(2a^2 - 8)n}{\sqrt{n^2 - 8n} + n} = \lim \frac{2a^2 - 8}{\sqrt{1 + \frac{-8}{n}} + 1} = a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$

Ta có

(a) Có tất cả 3 giá trị a thỏa mãn

Vậy $a \in \{-2; 2\}$

» **Chọn SAI.**

(b) Tổng các giá trị a tìm được bằng 0

Khi đó tổng các giá trị của a bằng 0

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Có 2 giá trị nguyên âm a thỏa mãn

» **Chọn SAI.**

(d) Tích các giá trị a tìm được bằng -4

» **Chọn ĐÚNG.**

$$L = \lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}}$$

» Câu 63. Cho giới hạn . Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
--	---------	------	-----



(a)	Khi $a=1$ thì $L = \frac{1}{\sqrt{3}}$		
(b)	Khi $a=0$ thì $L = \frac{1}{3}$		
(c)	Khi $a>0$ thì $L>0$		
(d)	Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b, c là các tham số thì $P = \frac{a+c}{b^3} = \frac{1}{2}$		

Lời giải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{a + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3}$$

Ta có

(a) Khi $a=1$ thì $L = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Với $a=1$ thì $L = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Khi $a=0$ thì $L = \frac{1}{3}$

Với $a=1$ thì $L = \sqrt{3}$

» **Chọn SAI.**

(c) Khi $a>0$ thì $L>0$

Với $a>0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3} > 0 \Rightarrow L > 0$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Khi $L=b\sqrt{3}+c$ với b, c là các tham số thì $P = \frac{a+c}{b^3} = \frac{1}{2}$

$$L = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3} = b\sqrt{3} + c \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{a+c}{b^3} = \frac{a}{\frac{a}{27}} = 27$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 64.** Cho giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$. Khi đó :

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$L=2$ khi $a=1$		
(b)	$L=3$ thì có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn		
(c)	$L>3$ khi $a>6$		



- (d) Có 3 giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

👉 **Lời giải**

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 1} = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}} = \sqrt{3 + a}.$$

Ta có

- (a) $L=2$ khi $a=1$

Khi đó $L=2 \Leftrightarrow \sqrt{3+a}=2 \Leftrightarrow 3+a=4 \Leftrightarrow a=1$

» **Chọn ĐÚNG.**

- (b) $L=3$ thì có 2 giá trị nguyên a thỏa mãn

Khi đó $L=3 \Leftrightarrow \sqrt{3+a}=3 \Leftrightarrow 3+a=9 \Leftrightarrow a=6$

» **Chọn SAI.**

- (c) $L>3$ khi $a>6$

Khi đó $L>3 \Leftrightarrow \sqrt{3+a}>3 \Leftrightarrow 3+a>9 \Leftrightarrow a>6$

» **Chọn ĐÚNG.**

- (d) Có 3 giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

$$\begin{cases} a \in (0;20), a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a+3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow a \in \{1;6;13\}.$$

Ta có

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 65.** Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 4}{an^2 + n + 3} = 2$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{4^n + 3} = b$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị của $a=2$		
(b)	Giá trị của $b=4$		
(c)	$2a - b=0$		
(d)	Ba số $a, b, 16$ lập thành một cấp số nhân		

👉 **Lời giải**

- (a) Giá trị của $a=2$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 4}{an^2 + n + 3} = 2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left(a + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} = 2 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{a + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 2 \Leftrightarrow a=1$$

Ta có



» **Chọn SAI.**

(b) Giá trị của $b=4$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{4^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n \cdot 4}{4^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 4 \Rightarrow b=4 \end{aligned}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $2a - b = 0$.

$$\text{Vậy } a=1, b=4 \Rightarrow 2a - b = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

» **Chọn SAI.**

(d) Ba số $a, b, 16$ lập thành một cấp số nhân.

$$\text{Ta có } a=1, b=4.$$

Mà $b^2 = 16$ và $a \cdot 16 = 1 \cdot 16 = 16 \Rightarrow b^2 = a \cdot 16$ nên theo tính chất của cấp số nhân ta có $1, 4, 16$ lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 1, q = 4$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 66.** Cho dãy số (u_n) với $u_n = an^2 + n - 1$ với $a \in \mathbb{R}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.		
(b)	Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.		
(c)	Với $a=-\frac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.		
(d)	Với $a \leq 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.		

» **Lời giải**

(a) Với $a=1$, giới hạn của dãy số đã cho là 1.

$$\text{Với } a=1, u_n = n^2 + n - 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = +\infty.$$

Ta có:

» **Chọn SAI.**

(b) Với $a=2$, giới hạn của dãy số đã cho là $+\infty$.

$$\text{Với } a=2, u_n = 2n^2 + n - 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = +\infty.$$

Ta có:

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Với $a=-\frac{5}{2}$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

$$\text{Với } a=-\frac{5}{2}, u_n = -\frac{5}{2}n^2 + n - 1.$$



Ta có: $\lim \left(-\frac{5}{2}n^2 + n - 1 \right) = \lim n^2 \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Với $a \leq 0$, giới hạn của dãy số đã cho là $-\infty$.

Với $a < 0$. Ta có: $\lim (an^2 + n - 1) = \lim n^2 \left(a + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$

Với $a = 0$, $u_n = n - 1$. Ta có: $\lim (n - 1) = \lim n \left(1 - \frac{1}{n} \right) = +\infty$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 67.** Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 5000000 đồng một tháng. Cứ sau một chu kỳ 3 năm thì ông An được tăng lương 4%.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng		
(b)	Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng		
(c)	Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận u_n , sau n chu kì năm công tác là: $u_n = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25} \right)^n$ đồng		
(d)	Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng		

» **Lời giải**

(a) Mức lương ông An nhận được sau 3 năm là 5200000 đồng.

Mức lương 3 năm tiếp theo của ông An là:

$$5000000 + 5000000 \cdot \frac{4}{100} = 5000000 \cdot \left(1 + \frac{1}{25} \right) = 5200000 \quad (\text{đồng})$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là 374400000 đồng.

1 năm = 12 tháng.

Tổng lương 3 năm đầu là 36.5000000 = 180000000 đồng.

Tổng lương từ năm thứ 4 đến năm thứ 6 là: 36.5200000 = 187200000 đồng.

Tổng số tiền lương ông An nhận được sau 6 năm đầu là:

$$180000000 + 187200000 = 367200000 \text{ đồng.}$$

» **Chọn SAI.**

(c) Dự đoán công thức tính số tiền lương ông An được nhận u_n , sau n chu kì năm

công tác là: $u_n = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25} \right)^n$ đồng.

Chu kì thứ nhất mức lương của ông An là: $u_1 = 5000000$ đồng.



Chu kì thứ hai mức lương của ông An là:

$$u_2 = 5000000 + 5000000 \cdot \frac{4}{100} = 5000000 \cdot \left(1 + \frac{1}{25}\right) = 5000000 \cdot \frac{26}{25} \text{ (đồng)}$$

Chu kì thứ ba mức lương của ông An là:

$$u_3 = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right) + 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right) \cdot \frac{1}{25} = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{25}\right) = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^2 \text{ (đồng)}.$$

Chu kì thứ tư mức lương của ông An là:

$$u_4 = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^2 + 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{25} = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{25}\right) = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^3 \text{ (đồng)}$$

Cứ tiếp tục như vậy ta dự đoán được sau chu kì thứ n số tiền lương ông An nhận được là:

$$u_n = 5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{n-1} \text{ (đồng)}.$$

» **Chọn SAI.**

(d) Giả sử ông An đi làm sau đúng 35 năm thì được về hưu. Tổng số tiền lương ông nhận được trong cả quá trình công tác là 2612277740 đồng.

Tổng tiền lương của chu kì thứ nhất là: $36.5000000 = 180000000$ đồng.

Tổng tiền lương của chu kì thứ hai là: $36.5000000 \cdot \frac{26}{25}$ đồng.

Tổng tiền lương của chu kì thứ ba là: $36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^2$ đồng.

....

Tổng tiền lương của chu kì thứ mười một là: $36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{10}$ đồng.

Tổng tiền lương 2 năm tiếp theo của chu kì thứ mười hai là: $24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11}$ đồng.

Tổng tiền lương sau tròn 35 năm là:

$$\begin{aligned} S &= 36.5000000 + 36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right) + 36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^2 + \dots + 36.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{10} + 24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11} \\ &= 36.5000000 \left(1 + \frac{26}{25} + \left(\frac{26}{25}\right)^2 + \dots + \left(\frac{26}{25}\right)^{10}\right) + 24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11} \\ &= \frac{36.5000000 \cdot \left(1 - \left(\frac{26}{25}\right)^{11}\right)}{1 - \frac{26}{25}} + 24.5000000 \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^{11} = 2612277740 \text{ đồng.} \end{aligned}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn



» **Câu 68.** Giới hạn
 $P = a + b^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}}{b + \frac{2}{\sqrt{n}}}$$

với a, b là các số tự nhiên. Tính

🔑 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 11**

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3\sqrt{n} + 1}{3n\sqrt{n} + 2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \left(2\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)}{n\sqrt{n} \left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}}{3 + \frac{2}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow P = a + b^2 = 11 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\sqrt{1 + b \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} + 1} \end{aligned}$$

» **Câu 69.** Giá trị của giới hạn
 $S = (a + b)^2$
tự nhiên. Tính

🔑 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 16**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n - 2} - n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n - 2} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 2}{n\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 - \frac{2}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} + 1} \end{aligned}$$

Khi đó $a = b = 2 \Rightarrow S = (a + b)^2 = 16$

» **Câu 70.** Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 3n}$$

🔑 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**

Nhận xét: $1 + 2 + \dots + n$ là tổng của n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Vì vậy $1 + 2 + \dots + n = \frac{(1 + n)n}{2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2 + 3n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2n^2 \left(1 + \frac{3}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 \left(1 + \frac{3}{n} \right)} = \frac{1}{2}$$

Ta có:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$$

» Câu 71. Tìm giới hạn

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**

Nhận xét: $1+3+5+\dots+(2n-1)$ là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1=1$ và công sai là $d=2$, vì vậy, ta có:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{(u_1+u_n)n}{2} = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$$

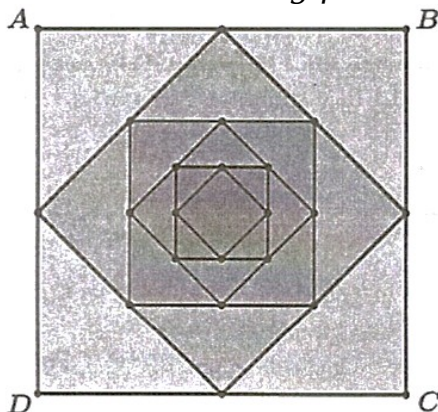
$$\text{Vì vậy: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{n^2}}{2n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

» Câu 72. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1. Nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông $ABCD$, ta được hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông thứ hai, ta được hình vuông thứ ba. Tiếp tục như thế ta nhận được một dãy các hình vuông. Tìm tổng chu vi của dãy các hình vuông đó.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 13,7**

Nếu cạnh hình vuông ban đầu là x thì theo định lý Pythagore, ta có cạnh

$$\text{hình vuông thứ hai là } \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}. (*)$$

Gọi cạnh hình vuông $ABCD$ là $u_1=1$, từ $(*)$ ta có cạnh hình vuông thứ hai là

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ cạnh hình vuông thứ ba là } u_3 = \frac{1}{2}, \text{ cạnh hình vuông thứ tư là}$$

$$u_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \dots$$

Xét tổng chu vi dãy các hình vuông là:

$$S = 4u_1 + 4u_2 + 4u_3 + \dots = 4 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots \right).$$



Để thấy $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng 1, công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S = 4 \cdot \frac{u_1}{1 - q} = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8 + 4\sqrt{2} \approx 13,7$$

Vậy ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 - 3a^n}{8 + \frac{1}{6}b^n}}$$

» **Câu 73.** Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n-1}}}$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính giá trị $8(a+b)$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 9**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{2^{3n} - 3^{n+1}}{8^{n+1} + 6^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{8^n - 3 \cdot 3^n}{8 \cdot 8^n + \frac{1}{6} 6^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{8^n \left(1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{8} \right)^n \right)}{8^n \left(8 + \frac{1}{6} \left(\frac{6}{8} \right)^n \right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 - 3 \left(\frac{3}{8} \right)^n}{8 + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \right)^n}}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow 8(a+b) = 9$$

» **Câu 74.** Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

» **Câu 75.** Tìm tổng $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \dots$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,25**

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = -\frac{1}{3}$.



$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Vì vậy

$$T = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \dots = a + \sqrt{b}$$

» **Câu 76.** Giá trị của tổng $S = (a+b)^2$ với $a; b$ là các số tự nhiên. Tính giá trị

Lời giải

✓ **Trả lời: 16**

Ta thấy T là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$T = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow S = (a+b)^2 = 16$$

Vì vậy

» **Câu 77.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\dots$ viết dạng phân số có dạng $\frac{m}{n}$ với $m; n$ là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $n - 3m$

Lời giải

✓ **Trả lời: 1839**

Ta có: $0,271414\dots = 0,27 + 0,0014 + 0,000014 + \dots$

Xét tổng $0,0014 + 0,000014 + 0,00000014 + \dots$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $u_1 = 0,0014$ và công bội $q = \frac{1}{100}$.

$$0,271414\dots = 0,27 + \frac{u_1}{1-q} = \frac{27}{100} + \frac{0,0014}{1-\frac{1}{100}} = \frac{2687}{9900} \Rightarrow \begin{cases} m=2687 \\ n=9900 \end{cases} \Rightarrow n - 3m = 1839$$

Vì vậy

» **Câu 78.** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\dots$ viết dạng phân số có dạng $\frac{a}{b}$ với $a; b$ là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $|b - 2a|$

Lời giải

✓ **Trả lời: 1**

Ta có: $0,511111\dots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$

Xét tổng $0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots$



Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $u_1 = 0,01$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Vì vậy $0,51111\ldots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \ldots$

$$= 0,5 + \frac{u_1}{1 - q} = 0,5 + \frac{0,01}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{23}{45} \Rightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \Rightarrow |b - 2a| = 1$$

» **Câu 79.** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$, tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n}$. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: -0,8**

Xét số a thoả mãn $u_n - a = 3(u_{n-1} - a), \forall n \geq 2 \Leftrightarrow u_n = 3u_{n-1} - 2a, \forall n \geq 2$.

Suy ra $-2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n - \frac{1}{2} = 3\left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = u_{n-1} - \frac{1}{2}, \forall n \geq 2$ và $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$.

Khi đó dãy (v_n) thoả mãn $\begin{cases} v_1 = -\frac{5}{2} \\ v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Ta thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = -\frac{5}{2}$, công bội $q = 3$, suy ra $v_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}, \forall n \geq 1$

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) = -\frac{5}{6} \approx -0,8$.

» **Câu 80.** Biết rằng giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5 - an}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + b \right)$ với a, b là các số tự nhiên. Tính giá trị $S = a^b$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 64**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n)$$



$$= \lim \left(\frac{(\sqrt{n^2 - 4n + 5} - n) \cdot (\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n)}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right)$$

$$= \lim \left(\frac{n^2 - 4n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right) = \lim \left(\frac{-4n + 5}{\sqrt{n^2 - 4n + 5} + n} + 3 \right)$$

Khi đó $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow S = d^p = 64$

» **Câu 81.** Biết rằng giới hạn $\lim(1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7}) = \lim \left(a + \frac{n-7}{b \cdot n + c \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right)$ với $a; b; c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $|a - b| + c$

Lời giải

✓ **Trả lời: 3**

$$\lim(1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7}) = \lim \left(1 + \frac{9n^2 - 9n^2 + n - 7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right) = \lim \left(1 + \frac{n-7}{3n + \sqrt{9n^2 - n + 7}} \right)$$

Khi đó $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow |a - b| + c = 3$

$$\lim(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2}) = \lim \frac{a}{\sqrt[3]{(n^3 + 3)^2} + n^2 + n \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{b}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$$

» **Câu 82.** Biết giới hạn $a; b$ là các số nguyên dương. Tính $T = 2a + 3b$.

Lời giải

✓ **Trả lời: 12**

$$\lim(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2}) = \lim(\sqrt[3]{n^3 + 3} - n) + \lim(n - \sqrt{n^2 + 2})$$

$$= \lim \frac{n^3 + 3 - n^3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \sqrt[3]{n^3 + 3}} + \lim \frac{n^2 - n^2 - 2}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$$

$$= \lim \frac{3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$$

$$= \lim \frac{3}{\sqrt[3]{(n^3 + 3)^2} + n^2 + n \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}}$$

Do đó, $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \rightarrow T = 2a + 3b = 12$

» **Câu 83.** Giới hạn dãy số $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}}{n}$ có dạng $\lim \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b}{n}} + \sqrt{1 + \frac{c}{n}}}$ với $a; b; c$ là các số tự nhiên. Tính giá trị $a^2 + b^2 + c^2$



Lời giải

Trả lời: 6

$$\begin{aligned}\lim u_n &= \lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n}}{n} = \lim \frac{(n^2 + 2n) - (n^2 + n)}{n(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n})} = \lim \frac{n}{n(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n})} \\ &= \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + n}} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ c=1 \end{cases} \\ \lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} &= \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{n} - b\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}} \end{aligned}$$

với a, b là các số nguyên

» **Câu 84.** Biết giới hạn dương. Tính $S = a + b$.

Lời giải

Trả lời: 3

$$\begin{aligned}\lim \frac{\sqrt[3]{2n^2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n} &= \lim \frac{2n^2 - n^3 + n^3}{n^2 + n - n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt[3]{(2n^2 - n^3)^2} + n^2 - n\sqrt[3]{2n^2 - n^3}} \\ &= \lim \frac{\sqrt{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}}{\sqrt[3]{n^6 \cdot \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2} + n^2 - n\sqrt[3]{n^3 \left(\frac{2}{n} - 1\right)}} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\left(\frac{2}{n} - 1\right)^{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n} - 1\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{n} - 1}} \\ &\rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow S=3 \end{aligned}$$

» **Câu 85.** Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

Trả lời: 0,7

Nhận xét: Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$ trong đó u_1, q theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = -\frac{1}{2}$.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

----- Hết -----