

Dạng 2. Tích phân một số hàm đặc biệt

Dạng 2.1 Tích phân của hàm số lẻ và hàm số chẵn

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số $y = f(x)$ có miền xác định trên tập đối xứng D và

Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$: là hàm số chẵn.

Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$: là hàm số lẻ.

(thay thế chỗ nào có x bằng $-x$ sẽ tính được $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$).

Thường gặp cung góc đối nhau của $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x).dx = 0$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và chẵn trên $[-a; a]$ thì $\begin{cases} \int_{-a}^a f(x).dx = 2 \int_0^a f(x).dx \\ \int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x + 1} dx = \int_0^a f(x).dx \end{cases}$.

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau (sau khi nhận định đó là hàm chẵn hoặc lẻ và **bài toán thường có cận đối nhau dạng $-a \rightarrow a$**):

□ Bước 1. Phân tích: $I = \int_{-a}^a f(x).dx = \int_{-a}^0 f(x).dx + \int_0^a f(x).dx = A + B$.

□ Bước 2. Tính $A = \int_{-a}^0 f(x).dx$? bằng cách đổi biến $t = -x$ và cần nhớ rằng: tích phân không phụ thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có:

$$\int_{-2014}^0 \frac{3t^2 \cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \int_{-2014}^0 \frac{3x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

2. Tích phân của hàm số liên tục

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thì

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x).dx.$$

$$+ \int_a^{\pi-a} x f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_a^{\pi-a} f(\sin x).dx \text{ và } \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x).dx.$$

$$+ \int_a^{2\pi-a} xf(\cos x)dx = \pi \int_a^{2\pi-a} f(\cos x)dx \text{ và } \int_0^{2\pi} x.f(\cos x)dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\cos x)dx$$

→ Về mặt thực hành, sẽ đặt $x = \text{cận trên} + \text{cận dưới} - t$ ($x = a + b - t$). Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \text{ và } \int_0^{nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx.$$

Lưu ý: Hàm số $f(x)$ có chu kỳ T thì $f(x+T) = f(x)$.

→ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

Bước 1. Tách: $I = \int_a^{a+T} f(x)dx = \underbrace{\int_a^0 f(x)dx}_A + \underbrace{\int_0^T f(x)dx}_B + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x)dx}_C \quad (i)$

Bước 2. Tính $C = \int_T^{a+T} f(x)dx$?

Đặt $x = t + T \Rightarrow dx = dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = a + T \\ x = T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = a \\ t = 0 \end{cases}$. Khi đó:

$$C = \int_0^a f(t+T)dt = -\int_a^0 f(t)dt = -\int_a^0 f(x)dx = -A \quad (ii)$$

Thế (i) vào (ii) ta được: $I = B = \int_0^T f(x)dx$.

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2017) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx.$$

A. $I = -6$

B. $I = 0$

C. $I = -2$

D. $I = 6$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = -t$. Khi đó $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x)dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t)d(-t) = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t)dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

Ta có: $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

$$\text{Hay } I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(-x) + f(x)) d(x) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x} d(x) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)} d(x)$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 x} d(x) = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| d(x) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(x) - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x d(x)$$

$$\text{Vậy } I = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 6.$$

Câu 2. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \pi\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$b < 15$. Khi đó $a + b + c$ bằng:

A. 10.

B. 9.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+x^2} \sin x dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx}_{I_2}$$

Ta nhận thấy $\sqrt{1+x^2} \sin x$ là hàm lẻ nên $I_1 = 0$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx. \text{ Chọn } v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_2 = -x \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} = \pi\sqrt{\frac{2}{16}} - \sqrt{2} = \pi\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{2}$$

Vậy $a + b + c = 11$

Câu 3. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a; a]$ và $k > 0$.

Giá trị tích phân $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$ bằng

A. $\int_0^a f(x) dx$.

B. $\int_{-a}^a f(x) dx$.

C. $2 \int_{-a}^a f(x) dx$.

D. $2 \int_0^a f(x) dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx.$$

Xét tích phân $\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx$.

Đặt $t = -x \Leftrightarrow x = -t$

$\Rightarrow dt = -dx \Leftrightarrow -dt = dx$

Đổi cận:

$x = -a \Rightarrow t = a$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

Khi đó,

$$\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_a^0 \frac{f(-t)}{1+e^{k(-t)}} (-dt) = \int_0^a \frac{f(t)}{1+e^{-kt}} dt$$

$$= \int_0^a \frac{e^{kt} \cdot f(t)}{1+e^{kt}} dt = \int_0^a \frac{e^{kx} \cdot f(x)}{1+e^{kx}} dx$$

$$\text{Do đó, } \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_0^a \frac{e^{kx} \cdot f(x)}{1+e^{kx}} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_0^a \frac{(e^{kx} + 1)f(x)}{1+e^{kx}} dx = \int_0^a f(x) dx$$

Câu 4. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$. Biết $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m}$. Khi đó giá trị của m là

A. $m = 2$.

B. $m = 20$.

C. $m = 5$.

D. $m = 10$.

Lời giải

Hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ nên ta có:

$$\int_{-2}^2 (2f(x) + 3f(-x)) dx = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } K = \int_{-2}^2 (2f(x) + 3f(-x)) dx = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx$$

Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt; f(-x) = f(t), x = -2 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -2$

$$\text{Do đó } \int_{-2}^2 f(-x) dx = \int_2^{-2} f(t) \cdot (-dt) = \int_{-2}^2 f(t) dt = \int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow K = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(-x) dx = 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 f(x) dx = 5 \int_{-2}^2 f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{Đặt } J = \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}; x = 2 \tan \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

Ta có: $dx = d(2 \tan \alpha) = \frac{2d\alpha}{\cos^2 \alpha} = 2(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha$.

Với $x = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$; Với $x = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Do đó $J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 \alpha)}{4 \tan^2 \alpha + 4} d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{2} = \frac{1}{2} \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có $K = J \Rightarrow 5 \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{20}$

Mà theo giả thiết, $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{\pi}{m}$ nên $\frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{20} \Rightarrow m = 20$.

Chú ý: Có thể tính nhanh $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$ bằng công thức: $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

Từ đó: $\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$

$\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} (\arctan 1 - \arctan(-1)) = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{4}$

Câu 5. (THPT Hàm Rồng Thanh Hóa -2019) Cho hàm số $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4 + x^2}$. Tính $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{20}$.

B. $I = \frac{\pi}{10}$.

C. $I = \frac{-\pi}{20}$.

D. $I = \frac{-\pi}{10}$.

Lời giải

Tính $\int_{-2}^2 f(-x) dx$

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận

x	-2	2
t	2	-2

$\Rightarrow \int_{-2}^2 f(-x) dx = -\int_2^{-2} f(t) dt = \int_{-2}^2 f(t) dt = \int_{-2}^2 f(x) dx$

$2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4 + x^2} \Rightarrow \int_{-2}^2 (2f(x) + 3f(-x)) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{4 + x^2} dx$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^2 5f(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{4 + x^2} dx$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-2}^2 \frac{1}{4 + x^2} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{20}$

Câu 6. (Hà Nội - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4; 4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và $\int_1^2 f(-2x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -10$.

B. $I = -6$.

C. $I = 6$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$.

Đặt $-x = t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: khi $x = -2$ thì $t = 2$; khi $x = 0$ thì $t = 0$ do đó $\int_{-2}^0 f(-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$

$\Rightarrow \int_0^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$.

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x) = -f(2x)$.

Do đó $\int_1^2 f(-2x) dx = -\int_1^2 f(2x) dx \Rightarrow \int_1^2 f(2x) dx = -4$.

Xét $\int_1^2 f(2x) dx$.

Đặt $2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$ do đó $\int_1^2 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 f(t) dt = -4$

$\Rightarrow \int_2^4 f(t) dt = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -8$.

Do $I = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 - 8 = -6$.

Câu 7. (Hồng Quang - Hải Dương - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ ($a; b \in \mathbb{Q}$). Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -2$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Gọi $I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx$.

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$.

Đổi cận: Với $x = -\ln 2 \Rightarrow t = \ln 2$; Với $x = \ln 2 \Rightarrow t = -\ln 2$.

Ta được $I = -\int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t) dt = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx$.

$$\text{Khi đó ta có: } 2I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx. \text{ Đặt } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\text{Đổi cận: Với } x = -\ln 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}; x = \ln 2 \Rightarrow u = 2.$$

$$\text{Ta được } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{u(u+1)} du$$

$$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = (\ln|u| - \ln|u+1|) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2$$

$$\text{Vậy ta có } a = \frac{1}{2}, b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 8. (Chuyên ĐH Vinh - 2018) Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1. \text{ Giá trị của } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Do } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ và } \int_1^2 f(x) dx = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

$$\text{Mặt khác } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx \text{ và } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = - \int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t} + 1} dt = \int_0^2 \frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t} + 1} dt = \int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t + 1} dt = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x + 1} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x + 1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx = \int_0^2 \frac{(3^x + 1)f(x)}{3^x + 1} dx =$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 3.$$

Câu 9. (SGD&ĐT BRVT - 2018) Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)dx = 10$. Tính

$$I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx.$$

- A.** $I = 10$. **B.** $I = \frac{10}{3}$. **C.** $I = 20$. **D.** $I = 5$.

Lời giải

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = 2$, $x = 2 \Rightarrow t = -2$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \frac{f(t)}{2^{-t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{2^t}{2^t + 1} f(t) dt = \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x + 1} f(x) dx \\ \Rightarrow 2I &= \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x + 1} dx + \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x + 1} f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + 10 \end{aligned}$$

Mặt khác do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x) = f(x)$.

Xét $J = \int_{-2}^0 f(x) dx$, đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

$$\Rightarrow J = \int_0^2 f(-t) dt = \int_0^2 f(-x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 10 \Rightarrow 2I = 20 \Rightarrow I = 10. \text{-----}$$

Câu 10. (Yên Phong 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 6. \text{ Kết quả của } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx \text{ bằng}$$

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Xét tích phân $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx$. Đặt $x = -t$; $dx = -dt$; $x = -1 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = -1$.

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx = - \int_1^{-1} \frac{f(-t)}{1 + 2018^{-t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{1 + \frac{1}{2018^t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{2018^t \cdot f(t)}{1 + 2018^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{2018^x f(x)}{1 + 2018^x} dx.$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx + \int_{-1}^1 \frac{2018^x f(x)}{1 + 2018^x} dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 6.$$

$$\text{Do đó } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2018^x} dx = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Câu 11. (Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018) Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases} \text{ và } \int_0^a \frac{dx}{1 + f(x)} = \frac{ba}{c}, \text{ trong đó } b, c \text{ là hai số nguyên dương và } \frac{b}{c} \text{ là phân số tối giản.}$$

Khi đó $b + c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.** (11; 22). **B.** (0; 9). **C.** (7; 21). **D.** (2017; 2020).

Lời giải

Cách 1. Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Lúc đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1dx = a$$

Do đó $I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3$.

Câu 12. (Chuyên Sơn La - 2020) Tích phân $\int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx = \frac{2^a}{b}$. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 0$.

B. $S = 2021$.

C. $S = 2020$.

D. $S = 4042$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx.$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -2$.

$$\text{Ta được } I = \int_2^{-2} \frac{(-t)^{2020}}{e^{-t} + 1} (-dt) = \int_{-2}^2 \frac{t^{2020}}{\frac{1}{e^t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{t^{2020} \cdot e^t}{e^t + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020} \cdot e^x}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx + \int_{-2}^2 \frac{x^{2020} \cdot e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-2}^2 x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big|_{-2}^2 = \frac{2^{2021} - (-2)^{2021}}{2021} = \frac{2^{2022}}{2021}.$$

Do đó $I = \frac{2^{2021}}{2021}$. Suy ra $a = b = 2021$. Vậy $S = a + b = 4042$.

Câu 13. (Đại Học Hà Tĩnh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2; \ln 2]$ và thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1}. \text{ Biết } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = a \ln 2 + b \ln 3, (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Tính } P = a + b.$$

A. $P = -2$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{Ta có } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x) d(-x) = 2 \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx.$$

$$\text{Mặt khác } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{(e^x + 1)e^x} d(e^x) = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \left[\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x + 1} \right] d(e^x)$$

$$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x} d(e^x) - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} d(e^x + 1) = x \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} - \ln(e^x + 1) \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} = \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln \frac{3}{2} = \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 14. (Đại học Hồng Đức – Thanh Hóa 2019) Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Giá trị của

tích phân $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2019^x} dx$ là

A. $\frac{2}{2019}$.

B. 2.

C. 4.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1 + 2019^x} dx$$

$$\text{Đặt } t = -x \rightarrow -dt = dx$$

Cận

x	-1	1
t	1	-1

$$I = - \int_1^{-1} \frac{f(-t)}{1 + 2019^{-t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{1 + 2019^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{2019^t f(t)}{1 + 2019^t} dt$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-1}^1 \frac{2019^t f(t)}{1 + 2019^t} dt + \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{1 + 2019^t} dt = \int_{-1}^1 \frac{f(t)(1 + 2019^t)}{1 + 2019^t} dt$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-1}^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2.2 \Rightarrow I = 2.$$

Dạng 2.2 Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_a^b |f(x)| dx ?$$

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Giả sử trên đoạn $[a; b]$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in [a; b]$ và có bảng xét dấu sau:

x		a	x_0	b	
f(x)		+	0	-	

Bước 2. Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên $[a; x_0], [x_0; b]$ ta được:

$$I = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b [-f(x)] dx = A + B.$$

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính $A, B \Rightarrow I$.

Câu 1. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$. **B.** $I = \frac{a^2 + 2}{2}$. **C.** $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$. **D.** $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $a > 0$ nên $I = -\int_{-1}^0 x dx + \int_0^a x dx = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1 + a^2}{2}$

Câu 2. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m \in (4; 6)$. **B.** $m \in (2; 4)$. **C.** $m \in (3; 5)$. **D.** $m \in (1; 3)$.

Lời giải

Do $m > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow \frac{1}{2m} < 1$. Do đó với $m > 1, x \in [1; m] \Rightarrow 2mx - 1 > 0$.

Vậy $\int_1^m |2mx - 1| dx = \int_1^m (2mx - 1) dx = \left(mx^2 - x \right) \Big|_1^m = m^3 - m - m + 1 = m^3 - 2m + 1$.

Từ đó theo bài ra ta có $m^3 - 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases}$. Do $m > 1$ vậy $m = \sqrt{2}$.

Câu 3. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$. **B.** $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

C. $\int_{-2}^3 |e^x (x + 1)| dx = \int_{-2}^3 e^x (x + 1) dx$. **D.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^4 - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $\int_{-1}^{2018} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_{-1}^{2018} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

Câu 4. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho tích phân $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = abc$.

A. $P = -36$ **B.** $P = 0$ **C.** $P = -18$ **D.** $P = 18$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned}
 \int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx &= -\int_1^2 \frac{x-2}{x+1} dx + \int_2^5 \frac{x-2}{x+1} dx \\
 &= -\int_1^2 \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) dx + \int_2^5 \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) dx \\
 &= -\left(x - 3 \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 + \left(x - 3 \ln|x+1| \right) \Big|_2^5 \\
 &= -(2 - 3 \ln 3) + 1 - 3 \ln 2 + 5 - 3 \ln 6 - 2 + 3 \ln 3 \\
 &= 2 - 6 \ln 2 + 3 \ln 3
 \end{aligned}$$

Vậy $a = 2, b = -6, c = 3 \Rightarrow P = abc = -36$.

- Câu 5.** (Chuyên Hạ Long 2019) Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int_0^2 |x^2 - 2m^2| dx = \int_0^2 (x^2 - 2m^2) dx$.
- A.** Vô số. **B.** 0. **C.** Duy nhất. **D.** 2.

Lời giải

$$\int_0^2 |x^2 - 2m^2| dx = \int_0^2 (x^2 - 2m^2) dx \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } x^2 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m\sqrt{2} \\ x = m\sqrt{2} \end{cases}.$$

TH1. Nếu $m = 0$ thì $(*)$ luôn đúng.

$$\text{TH2. Nếu } m \neq 0 \text{ thì } (*) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2m^2 > 0 & (1) \\ x^2 - 2m^2 < 0 & (2) \end{cases} \text{ với mọi } x \in [0; 2].$$

+) $m > 0$.

$$(1) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{2} < m\sqrt{2} \leq 0 \\ 2 \leq -m\sqrt{2} < m\sqrt{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}.$$

$$(2) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{2} \leq 0 \\ m\sqrt{2} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}.$$

+) $m < 0$.

$$(1) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{2} < -m\sqrt{2} \leq 0 \\ 2 \leq m\sqrt{2} < -m\sqrt{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}.$$

$$(2) \text{ đúng} \Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{2} \leq 0 \\ -m\sqrt{2} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{2}.$$

Suy ra $m \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \cup \{0\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 6. (Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018) Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$.

B. $\ln 2$.

C. $2\ln 2$.

D. $\frac{2}{\ln 2}$.

Lời giải

$$I = \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx \text{ ta có } 2^x - 2^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_{-1}^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \int_{-1}^0 |2^x - 2^{-x}| dx + \int_0^1 |2^x - 2^{-x}| dx = \left| \int_{-1}^0 (2^x - 2^{-x}) dx \right| + \left| \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \right|_{-1}^0 + \left| \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Câu 7. (KTNL Gia Bình 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x) dx = 2$; $\int_0^3 f(x) dx = 6$.

Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx$

A. $I = 8$

B. $I = 6$

C. $I = \frac{3}{2}$

D. $I = 4$

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) dx = I_1 + I_2.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) d(1-2x) = \frac{1}{2} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx = 3.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) d(2x-1) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = 4.$$

Câu 8. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x) dx = 8$ và $\int_0^5 f(x) dx = 4$.

Tính $\int_{-1}^1 f(|4x-1|) dx$.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f(|4x-1|)dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx = I + J.$$

$$+) \text{ Xét } I = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1 - 4x \Rightarrow dt = -4dx;$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow t = 5; x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0.$$

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx = \int_5^0 f(t)\left(-\frac{1}{4}dt\right) = \frac{1}{4} \int_0^5 f(t)dt = \frac{1}{4} \int_0^5 f(x)dx = 1.$$

$$+) \text{ Xét } J = \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 4x - 1 \Rightarrow dt = 4dx;$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 3.$$

$$J = \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)dx = \int_0^3 f(t)\left(\frac{1}{4}dt\right) = \frac{1}{4} \int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{4} \int_0^3 f(x)dx = 2.$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx = 3.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Tính $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$.

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

Lời giải

$$+ \text{ Xét } \int_0^1 f(2x)dx = 2.$$

$$\text{Đặt } u = 2x \Rightarrow du = 2dx; x = 0 \Rightarrow u = 0; x = 1 \Rightarrow u = 2.$$

$$\text{Nên } 2 = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du \Rightarrow \int_0^2 f(u)du = 4.$$

$$+ \text{Xét } \int_0^2 f(6x) dx = 14.$$

$$\text{Đặt } v = 6x \Rightarrow dv = 6dx; x = 0 \Rightarrow v = 0; x = 2 \Rightarrow v = 12.$$

$$\text{Nên } 14 = \int_0^2 f(6x) dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v) dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v) dv = 84.$$

$$+ \text{Xét } \int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx + \int_0^2 f(5|x|+2) dx.$$

$$\square \text{ Tính } I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 5|x|+2.$$

$$\text{Khi } -2 < x < 0, t = -5x+2 \Rightarrow dt = -5dx; x = -2 \Rightarrow t = 12; x = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

$$\square \text{ Tính } I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 5|x|+2.$$

$$\text{Khi } 0 < x < 2, t = 5x+2 \Rightarrow dt = 5dx; x = 2 \Rightarrow t = 12; x = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t) dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{5} (84 - 4) = 16.$$

$$\text{Vậy } \int_{-2}^2 f(5|x|+2) dx = 32.$$

Câu 10. (Phong 1 - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;3)$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2; \int_0^3 f(x) dx = 8$. Giá trị

của tích phân $\int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx = ?$

A. 6

B. 3

C. 4

D. 5

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) dx = I + J$$

$$\text{Tính } I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x) dx$$

$$\text{Đặt } t = 1-2x \Rightarrow dt = -2dx. \text{ Đổi cận } x = -1 \Rightarrow t = 3; x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \int_3^0 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

$$\text{Tính } J = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1) dx$$

$$\text{Đặt } t = 2x-1 \Rightarrow dt = 2dx. \text{ Đổi cận } x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx = I + J = 4 + 1 = 5.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x) dx = 8$ và $\int_0^5 f(x) dx = 4$. Tính $\int_{-1}^1 f(|4x-1|) dx$

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_{-1}^1 f(|4x-1|) dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f(-4x+1) dx + \int_{-\frac{1}{4}}^1 f(4x-1) dx.$$

$$\text{Tính: } A = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f(-4x+1) dx. \text{ Đặt } t = -4x+1 \Rightarrow -\frac{1}{4} dt = dx$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4} \int_5^0 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^5 f(t) dt = 1$$

$$\text{Tính: } B = \int_{-\frac{1}{4}}^1 f(4x-1) dx. \text{ Đặt } t = 4x-1 \Rightarrow \frac{1}{4} dt = dx$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4} \int_0^3 f(t) dt = 2.$$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^1 f(|4x-1|) dx = A + B = 3.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + 2f'(-x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ với mọi số

thực x . Giả sử $f(2) = m$, $f(-3) = n$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(-2) - f(3)$.

A. $T = m + n$.

B. $T = n - m$.

C. $T = m - n$.

D. $T = -m - n$.

Lời giải

Chọn B

Với mọi số thực x , thay x bởi $-x$ vào biểu thức $f'(x) + 2f'(-x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ (1), ta được

$$f'(-x) + 2f'(x) = \frac{2|-x|}{(-x)^6 + (-x)^2 + 1} \text{ hay } 2f'(x) + f'(-x) = \frac{2|x|}{x^6 + x^2 + 1} \text{ (2)}.$$

Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó trừ theo vế cho (1), rút gọn suy ra $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{|x|}{x^6 + x^2 + 1}$ với mọi số thực x .

Xét $I = \int_{-3}^2 f'(x) dx = \int_{-3}^2 \frac{2}{3} \cdot \frac{|x|}{x^6 + x^2 + 1} dx$. Đặt $u = -x$, khi đó ta được $du = -dx$.

Đổi cận: Khi $x = -3 \Rightarrow u = 3$ và $x = 2 \Rightarrow u = -2$.

Ta được

$$I = \int_3^{-2} \frac{2}{3} \cdot \frac{|-u|}{(-u)^6 + (-u)^2 + 1} (-du) = \int_{-2}^3 \frac{2}{3} \cdot \frac{|u|}{u^6 + u^2 + 1} du = \int_{-2}^3 \frac{2}{3} \cdot \frac{|x|}{x^6 + x^2 + 1} dx = \int_{-2}^3 f'(x) dx.$$

$$\text{Mà } I = \int_{-3}^2 f'(x) dx = f(2) - f(-3) \text{ (3) và } I = \int_{-2}^3 f'(x) dx = f(3) - f(-2) \text{ (4).}$$

Từ (3) và (4), ta được $f(2) - f(-3) = f(3) - f(-2)$ suy ra

$$f(-2) - f(3) = f(-3) - f(2) = n - m.$$

Câu 13. (Sở Bạc Liêu 2023) Cho hàm số $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$, biết $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} f(x) dx = a(\sqrt{b} - \sqrt{c})$, với a là số nguyên dương. Giá trị biểu thức $T = a + b + c$ là?

A. $T = 15$.

B. $T = 5$.

C. $T = 0$.

D. $T = 10$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} f(x) dx = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} |x - 2| dx - \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} |x + 2| dx$$

$$*\text{Nhận xét: } y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ 2 - x & (x < 2) \end{cases} \text{ và } y = |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & (x \geq -2) \\ -x - 2 & (x < -2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{5}} f(x) dx &= \int_{-\sqrt{6}}^2 (2 - x) dx + \int_2^{\sqrt{5}} (x - 2) dx - \left(\int_{-\sqrt{6}}^{-2} (-x - 2) dx + \int_{-2}^{\sqrt{5}} (x + 2) dx \right) \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{6}}^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^{\sqrt{5}} - \left[\left(-\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-\sqrt{6}}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^{\sqrt{5}} \right] \\ &= 5 + 2\sqrt{6} + \frac{9}{2} - 2\sqrt{5} - \left(5 - 2\sqrt{6} + \frac{9}{2} + 2\sqrt{5} \right) = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{5} = 4(\sqrt{6} - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 4 + 5 + 6 = 15.$$

Dạng 2.3 Tích phân nhiều hàm

Câu 1. (Mã 101-2021-Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + C_1 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + C_2 & x < 1 \end{cases}.$$

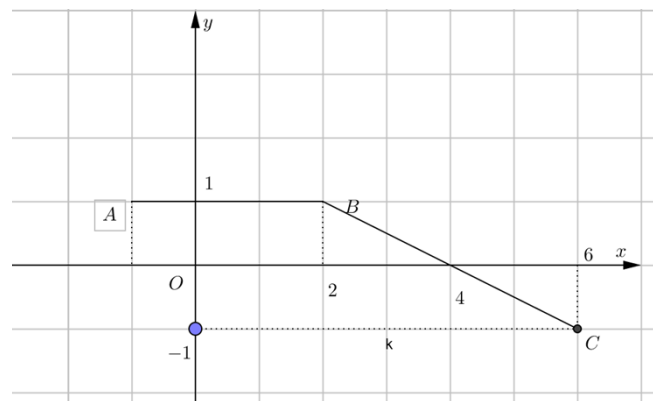
Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + 4x + 2$.

Vì $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 6 + C_1 = 7 \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + 2 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = -3 + 2 \cdot 15 = 27.$$

Câu 2. (Mã 101-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 6]$ và có đồ thị đường gấp khúc ABC như hình bên. Biết F là một nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng

**A.** 10.**B.** 5.**C.** 6.**D.** 7.**Lời giải****Chọn B**

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có hàm số } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } 2 < x \leq 6 \end{cases}.$$

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } 2 < x \leq 6 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } F(-1) = -1 \Rightarrow -1 + C_1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = 0 \text{ nên } F(x) = \begin{cases} x & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } 2 < x \leq 6 \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác } \int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx = 0 \Rightarrow F(4) - F(2) + F(6) - F(4) = 0.$$

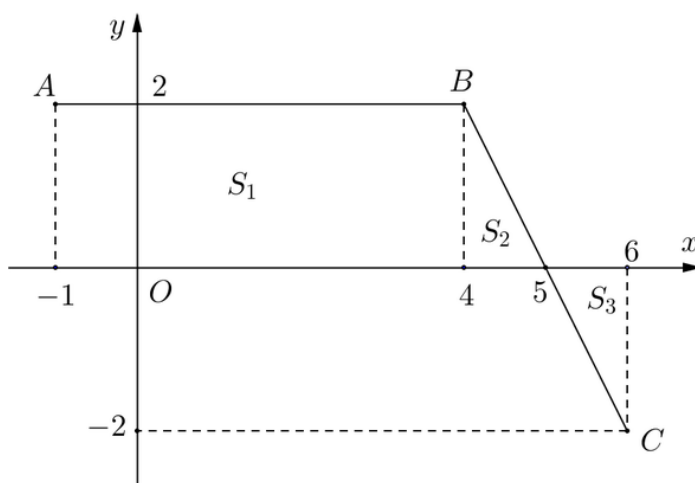
$$\Rightarrow F(6) = F(2) = 2.$$

$$\int_2^4 f(x)dx - \int_4^6 f(x)dx = 2 \Rightarrow F(4) - F(2) - F(6) + F(4) = 2.$$

$$\Rightarrow 2F(4) = 6 \Leftrightarrow F(4) = 3.$$

$$\text{Vậy } F(4) + F(6) = 2 + 3 = 5.$$

Câu 3. (Mã 120-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$.



Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng

A. 19.

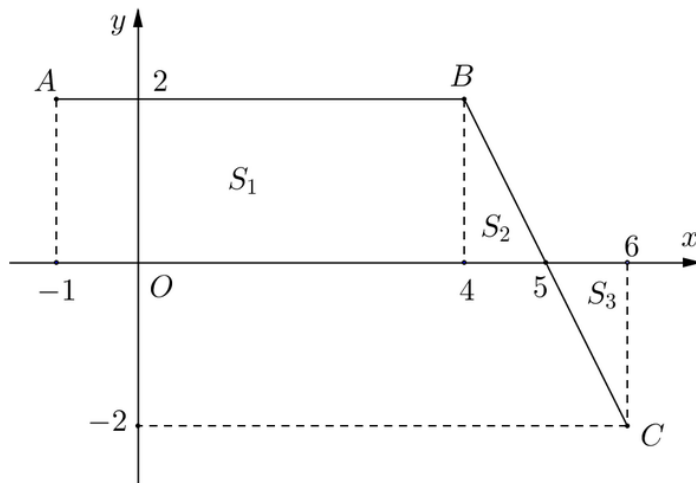
B. 17.

C. 22.

D. 18.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào hình vẽ ta có:

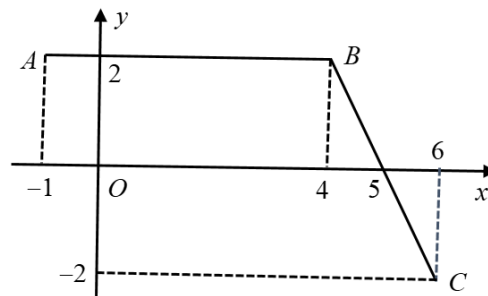
$$S_1 = \int_{-1}^4 f(x) dx = 10 \Rightarrow F(4) - F(-1) = 10 \Rightarrow F(4) = 8$$

$$S_2 = \int_4^5 f(x) dx = 1 \Rightarrow F(5) - F(4) = 1 \Rightarrow F(5) = 9$$

$$S_3 = \int_5^6 |f(x)| dx = 1 \Leftrightarrow F(6) - F(5) = -1 \Rightarrow F(6) = 8$$

Vậy $F(5) + F(6) = 17$.

Câu 4. (Mã 111-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(5) + F(6)$ bằng



A. 21.

B. 25.

C. 23.

D. 19.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{khi } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$.

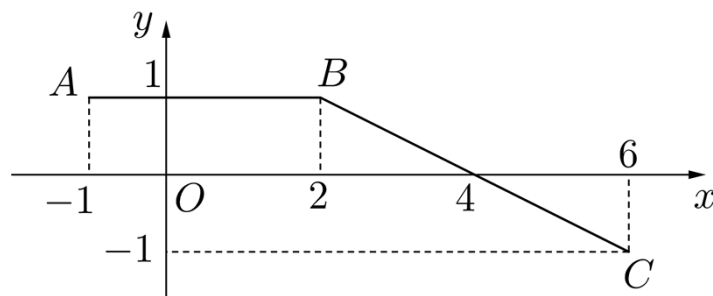
$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^4 2 dx = F(4) - F(-1) = 10 \Leftrightarrow F(4) = 9.$$

Xét $4 \leq x \leq 6$, ta có: $F(x) = -x^2 + 10x + C$.

Mà $F(4) = 9 \Rightarrow C = -15$. Nên $F(x) = -x^2 + 10x - 15$.

Ta có: $F(5) = 10$; $F(6) = 9$. Vậy $F(5) + F(6) = 19$.

Câu 5. (Mã 102-2021-Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC như hình bên dưới.



Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -2$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng

A. 3.

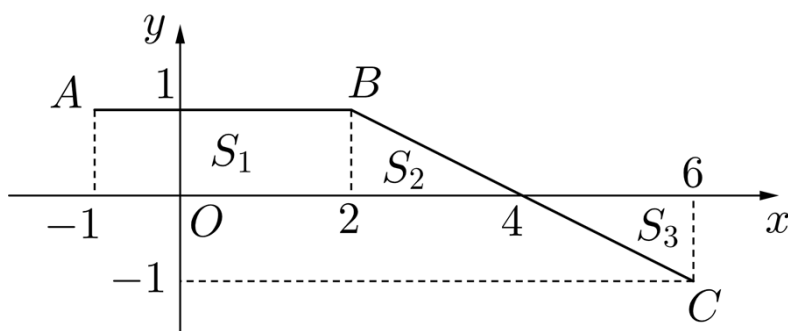
B. 4.

C. 8.

D. 5.

Lời giải

Chọn A



Dựa vào hình vẽ ta có

$$F(6) - F(1) = \int_{-1}^6 f(x) dx = S_1 + S_2 - S_3 = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow F(6) = 3 + F(1) = 1.$$

$$F(4) - F(1) = \int_{-1}^4 f(x) dx = S_1 + S_2 = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 4 \Rightarrow F(4) = 4 + F(1) = 2.$$

$$F(4) + F(6) = 2 + 1 = 3$$

Câu 6. (Mã 103 - 2021 - Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Khi } x \geq 1 \text{ thì } F(x) = \int f(x) dx = \int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C_1$$

Khi $x < 1$ thì $F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 + 2) dx = x^3 + 2x + C_2$

Theo giả thiết $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 1$

Vậy $F(-1) + 2F(2) = -3 + C_2 + 2(10 + C_1) = 21$.

- Câu 7. (Mã 102 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng
- A.** 9. **B.** 15. **C.** 11. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với $x > 1$ hay $x < 1$ thì hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 2) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Với $x \geq 1$ thì $\int f(x) dx = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + C_1$

Với $x < 1$ thì $\int f(x) dx = \int (3x^2 - 2) dx = x^3 - 2x + C_2$

Mà $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2$.

Khi đó $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Đồng thời $F(x)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$ nên: $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$.

Do đó $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Vậy: $F(-1) + 2F(2) = 3 + 2 \cdot 3 = 9$.

- Câu 8. (Mã 104 - 2021 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng
- A.** 18. **B.** 20. **C.** 9. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = 2 = F(1) - F(0) \Rightarrow F(1) = 2 + F(0) = 4$$

$$\text{Trên khoảng } (-\infty; 1), \text{ ta có: } \int f(x) dx = \int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$$

$$\text{Mà } F(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + x + 2.$$

$$\text{Trên nửa khoảng } [1; +\infty), \text{ ta có: } \int f(x) dx = \int (2x + 2) dx = x^2 + 2x + C$$

$$\text{Mà } F(1) = 4 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = x^2 + 2x + 1.$$

$$\text{Do đó: } F(-1) + 2F(2) = 0 + 2 \cdot 9 = 18.$$

- Câu 9. (Đề Tham Khảo 2021)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx$ bằng
- A.** $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 2 \sin x + 1 \Leftrightarrow dt = 2 \cos x dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3.$$

Tích phân trở thành:

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 (t^2 - 2t + 3) dt + \int_2^3 (t^2 - 1) dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} + \frac{16}{3} \right) = \frac{23}{6}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{ khi } x \geq 2 \\ 3x^2-1 & \text{ khi } x < 2 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 4$. Giá trị của $F(-2) + 3F(4)$ bằng

A. 106.

B. 110.

C. 12.

D. 36.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$F(0) - F(-2) = \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 (3x^2 - 1) dx = x^3 - x \Big|_{-2}^0 = 6 \Rightarrow F(-2) = F(0) - 6 = -2.$$

$$F(2) - F(0) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (3x^2 - 1) dx = x^3 - x \Big|_0^2 = 6 \Rightarrow F(2) = F(0) + 6 = 10.$$

$$F(4) - F(2) = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 (2x + 7) dx = x^2 + 7x \Big|_2^4 = 26 \Rightarrow F(4) = F(2) + 26 = 36$$

$$\text{Vậy } F(-2) - 3F(4) = -2 + 3.36 = 106.$$

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.

A. 8.

B. 12.

C. 14.

D. 10.

Lời giải:

Chọn C

Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-2	$2x$	2	

$$\text{Ta có: } \int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) = F(2) - 3 \text{ mà } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 2 dx = 2 \text{ nên } F(2) = 5.$$

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 3 - F(0) \text{ mà } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1 \text{ nên } F(0) = 2.$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = F(0) - F(-1) = 2 - F(-1) \text{ mà } \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx = x^2 \Big|_{-1}^0 = -1 \text{ nên } F(-1) = 3.$$

$$\int_{-3}^{-1} f(x) dx = F(-1) - F(-3) = 3 - F(-3) \text{ mà } \int_{-3}^{-1} f(x) dx = \int_{-3}^{-1} -2 dx = -4 \text{ nên } F(-3) = 7.$$

Vậy $F(0) + F(2) + F(-3) = 2 + 5 + 7 = 14$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq \frac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{khi } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$. Giá trị của $F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. -1 .

C. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

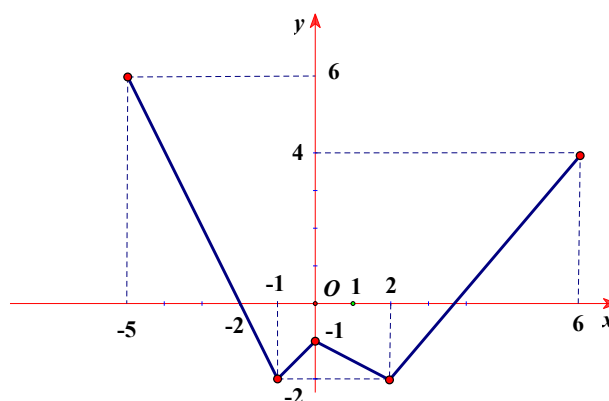
$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(0) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = 1.$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

Vậy $F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$.

Câu 13. (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-5; 6]$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-5}^0 f(x) dx$ bằng.



A. $\frac{25}{2}$.

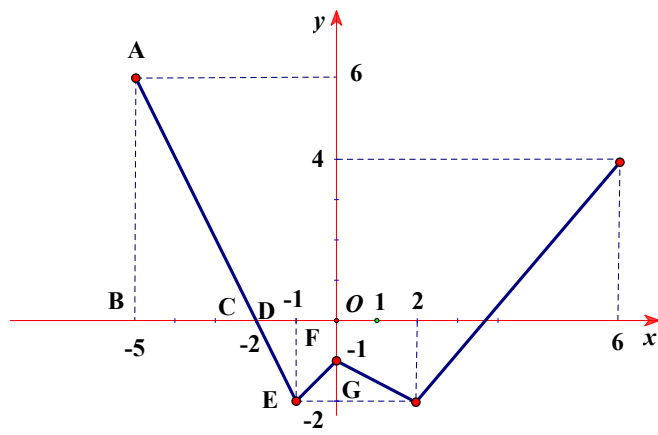
B. $\frac{19}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9.$$

$$S_{DEE} = \frac{1}{2} DF \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

$$S_{FEGO} = \frac{1}{2} (GO + EF) DO = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Khi đó

$$\int_{-5}^0 f(x) dx = \int_{-5}^{-2} f(x) dx - \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx = S_{ABC} - S_{DEE} - S_{FEGO} = 9 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

Câu 14. (Sở Lào Cai - 2021) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $I = \int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$; $f(x) = 3x^2 - 2x$. Dấu của $f(x)$:



Xét các trường hợp sau:

$$+) \text{ Nếu } m < 0: I = \int_0^m (3x^2 - 2x) dx = (x^3 - x^2) \Big|_0^m = m^3 - m^2 = m - 10.$$

$$\Rightarrow m^3 - m^2 - m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+) \text{ Nếu } 0 \leq m < \frac{2}{3}: I = -\int_0^m (3x^2 - 2x) dx = -(x^3 - x^2) \Big|_0^m = -m^3 + m^2 = m - 10.$$

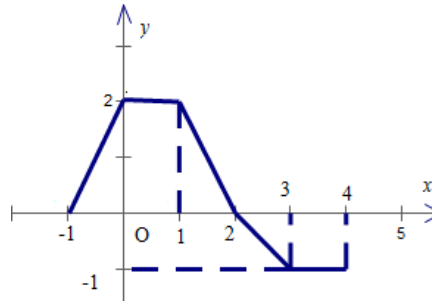
$$\Rightarrow m^3 - m^2 + m - 10 = 0 \Leftrightarrow m \approx 2,36. (\text{ loại}).$$

$$+) \text{ Nếu } m \geq \frac{2}{3}: I = -\int_0^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^m (3x^2 - 2x) dx = \frac{4}{27} + (x^3 - x^2) \Big|_{\frac{2}{3}}^m$$

$$= m^3 - m^2 + \frac{8}{27} = m - 10 \Rightarrow m^3 - m^2 - m + \frac{278}{27} = 0 \Leftrightarrow m \approx -2,02. (\text{ loại}).$$

Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 15. (THPT Lương Thế Vinh - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ với $-1 \leq x \leq 4$ có đồ thị các đoạn thẳng như hình bên.



Tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng

A. 4.

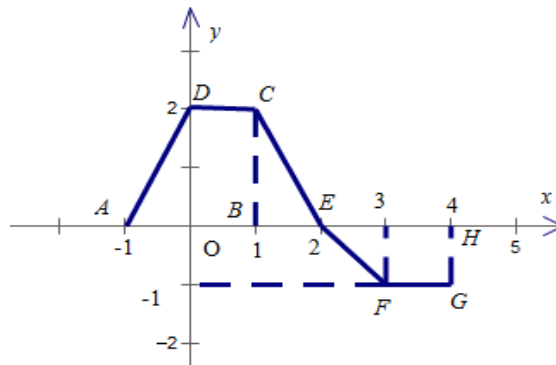
B. 1.

C. 5,5.

D. 2,5.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx.$$

$$\text{Trong đó: } \int_{-1}^1 f(x) dx = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (1+2) \cdot 2 = 3.$$

$$\int_1^2 f(x) dx = S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1; \int_2^4 f(x) dx = -S_{EFGH} = -\frac{1}{2} (1+2) \cdot 1 = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 3 + 1 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

A. $I = e + 2\sqrt{3} - 22$. B. $I = e + 2\sqrt{3} + \frac{22}{3}$. C. $I = e - 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$. **D. $I = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m + 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0$ và $f(0) = m + 1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ hay $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2} d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= \frac{2}{3} (3+x^2) \sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 1, & x \geq 5 \\ 2x - 6, & x < 5 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\ln 2} f(3e^x + 1) \cdot e^x dx$ bằng

A. $\frac{77}{3}$. **B. $\frac{77}{9}$.** C. $\frac{68}{3}$. D. $\frac{77}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) = 4$ nên hàm số liên tục tại $x = 5$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = 3e^x + 1 \Rightarrow e^x dx = \frac{1}{3} dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 4; x = \ln 2 \Rightarrow t = 7$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{3} \int_4^7 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_4^7 f(x) dx = \frac{1}{3} \left(\int_4^5 (2x - 6) dx + \int_5^7 (x^2 - 4x - 1) dx \right) = \frac{77}{9}.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq 4 \\ \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x & \text{khi } x < 4 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$ bằng

A. $\frac{28}{3}$. B. 8. C. $\frac{341}{48}$. **D. $\frac{341}{96}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x - 4) = 4; \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x \right) = 4; f(4) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

Nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 4$

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin^2 x + 3) \sin 2x dx$$

$$\text{Đặt } 2 \sin^2 x + 3 = t \Rightarrow \sin 2x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 5$$

$$\Rightarrow I = \int_3^5 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_3^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_3^4 \left(\frac{1}{4}t^3 - t^2 + t \right) dt + \frac{1}{2} \int_4^5 (2t - 4) dt = \frac{341}{96}.$$

Câu 19. (Chuyên ĐHSPT - 2021) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7, & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu

$$\int_0^1 f(e^x + 1) e^x dx = e^2 \text{ thì } a \text{ bằng}$$

A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}.$

B. $6e - 6.$

C. $6e + 6.$

D. $-6e + 6.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét: } I = \int_0^1 f(e^x + 1) e^x dx.$$

$$\text{Đặt } t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = e + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_2^{e+1} f(t) dt = \int_2^3 (at - 3a + 7) dt + \int_3^{e+1} (2t + 1) dt = e^2 + 3e - 3 - \frac{a}{2} = e^2$$

$$\Leftrightarrow a = 6e - 6.$$

Câu 20. (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2021) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x \leq 8 \\ \frac{40}{x-7} & \text{khi } x > 8 \end{cases}$. Tích

$$\text{phân } I = \int_{e^2}^{e^4} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx \text{ bằng}$$

A. $36 + \frac{40}{7} \ln 2 + \frac{15}{7} \ln 3.$ **B.** $-6 - \frac{20}{7} \ln 2 + \frac{40}{7} \ln 3.$

C. $36 - \frac{40}{7} \ln 2 + \frac{20}{7} \ln 3.$ **D.** $6 - \frac{20}{7} \ln 2 + \frac{40}{7} \ln 3.$

Lời giải

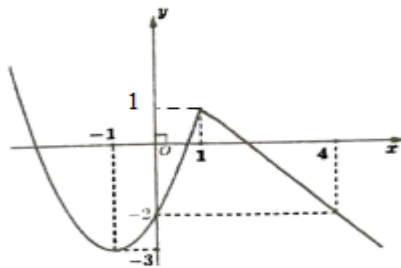
Chọn D

Đặt: $t = \ln^2 x \Rightarrow dt = 2 \frac{\ln x}{x} dx$.

Đổi cận: $x = e^2 \Rightarrow t = 4$; $x = e^4 \Rightarrow t = 16$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_{e^2}^{e^4} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int_{e^2}^{e^4} \frac{2 \ln x \cdot f(\ln^2 x)}{x \ln^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_4^{16} \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \left(\int_4^8 \frac{f(t)}{t} dt + \int_8^{16} \frac{f(t)}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_4^8 \frac{t^2 - 3t}{t} dt + \int_8^{16} \frac{40}{t(t-7)} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\int_4^8 (t-3) dt + \int_8^{16} \left(\frac{40}{7} \cdot \frac{1}{t-7} - \frac{40}{7} \cdot \frac{1}{t} \right) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{t^2}{2} - 3t \right]_4^8 + \frac{1}{2} \left(\frac{40}{7} \cdot \ln|t-7| - \frac{40}{7} \ln|t| \right) \right)_8^{16} \\ &= \frac{1}{2} (24 - 12) + \frac{1}{2} \left(\frac{40}{7} \ln 9 - \frac{40}{7} \ln 2 \right) \\ &= 6 + \frac{40}{7} \ln 3 - \frac{20}{7} \ln 2. \end{aligned}$$

Câu 21. (Sở Bạc Liêu - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; 1]$ là một phần của Parabol có đỉnh $(-1; -3)$ và trên $(1; +\infty)$ đồ thị là một phần của đường thẳng (tham khảo hình vẽ).



Tích phân $I = \int_1^{\sqrt{17}} f(\sqrt{x^2 - 1}) x dx$ bằng

A. $I = -\frac{73}{12}$.

B. $I = \frac{11}{6}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

♦ Parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ a - b + c = -3 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$

Nên (P): $y = x^2 + 2x - 2$.

♦ Đường thẳng (d) có phương trình: $y = ax + b (a \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow d: y = -x + 2$

♦ Đặt $t = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow t^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 2t dt = 2x dx \Rightarrow t dt = x dx$.

Đổi cận: $x = 1 \rightarrow t = 0, x = \sqrt{17} \rightarrow t = 4$.

$$\begin{aligned} \bullet I &= \int_0^4 f(t) t dt = \int_0^4 f(x) x dx = \int_0^1 f(x) x dx + \int_1^4 f(x) x dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 2) x dx + \int_1^4 (-x + 2) x dx \\ &= -\frac{1}{12} - 6 = -\frac{73}{12}. \end{aligned}$$

Câu 22. (Chuyên Tuyên Quang - 2021) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 3 & \text{khi } x \geq 7 \\ 2x + 3 & \text{khi } x < 7 \end{cases}$. Tích phân

$$\int_0^{\ln 4} f(2e^x + 3) e^x dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1148}{3}$.

B. $\frac{220}{3}$.

C. $\frac{115}{3}$.

D. $\frac{287}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $I = \int_0^{\ln 4} f(2e^x + 3) e^x dx$.

Đặt $t = 2e^x + 3 \Rightarrow dt = 2e^x dx$ hay $e^x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 5; x = \ln 4 \Rightarrow t = 11$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_5^{11} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_5^{11} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_5^7 f(x) dx + \int_7^{11} f(x) dx \right) = \frac{1}{2} \left[\int_5^7 (2x + 3) dx + \int_7^{11} (x^2 - 5x + 3) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(x^2 + 3x \right) \Big|_5^7 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x \right) \Big|_7^{11} \right] = \frac{1}{2} \left(30 + \frac{484}{3} \right) = \frac{287}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $\int_0^{\ln 4} f(2e^x + 3) e^x dx = \frac{287}{3}$.

Câu 23. (Cụm Ninh Bình - 2021) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 0) \\ 2 \cos x - 3 & (x < 0) \end{cases}$. Tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|2 \cos x - 1|) \sin x dx \text{ bằng}$$

A. 0.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Đặt $2 \cos x - 1 = t \Rightarrow dt = -2 \sin x dx$

Đổi cận:

Ta có

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	-1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|2 \cos x - 1|) \sin x dx = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} f(|t|) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(|t|) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

(Ở đây $y = f(|t|)$ là hàm số chẵn trên $[-1; 1]$ nên ta có $\int_{-1}^1 f(|t|) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt$)

- Câu 24.** Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng:
- A.** $\frac{a}{6} - 1$. **B.** $\frac{2a}{3} + 1$. **C.** $\frac{a}{6} + 1$. **D.** $\frac{2a}{3} - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta thấy, } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x - x^2) dx \\ &= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1. \end{aligned}$$

- Câu 25.** (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c, \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}). \text{ Tổng } a + b + 3c \text{ bằng}$$

- A.** 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0 \text{ và } f(0) = m + 1.$$

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{ hay } m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2} d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= \frac{2}{3} (3+x^2) \sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 1, b = 2, c = -\frac{22}{3}$.

Vậy tổng $a + b + 3c = -19$.

Câu 26. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Tính tích phân $\int_0^1 \max\{e^x, e^{1-2x}\} dx$

- A. $e - 1$. B. $\frac{3}{2}(e - \sqrt[3]{e})$. C. $e - \sqrt[3]{e}$. D. $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

Lời giải

Ta có: $e^x \geq e^{1-2x} \Leftrightarrow x \geq 1 - 2x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$. Suy ra: $\max\{e^x, e^{1-2x}\} = \begin{cases} e^{1-2x} & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ e^x & \text{khi } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 \max\{e^x, e^{1-2x}\} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-2x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 e^x dx = -\frac{1}{2} e^{1-2x} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + e^x \Big|_{\frac{1}{3}}^1$$

$$= -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} e + e - e^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(e - \sqrt[3]{e}).$$

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$

- A. $I = \frac{71}{6}$. B. $I = 31$. C. $I = 32$. D. $I = \frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn B

+ Xét tích phân: $I_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx$.

Đặt: $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận: với $x = 0$ thì $t = 0$, với $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$.

$$I_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (5 - x) dx = (10x - x^2) \Big|_0^1 = 9.$$

+ Xét tích phân: $I_2 = 3 \int_0^1 f(3 - 2x) dx$.

Đặt: $t = 3 - 2x \Rightarrow dt = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} dt$

Đổi cận: với $x = 0$ thì $t = 3$, với $x = 1$ thì $t = 1$.

$$\begin{aligned} I_2 &= 3 \int_0^1 f(3-2x) dx = -\frac{3}{2} \int_3^1 f(t) dt = -\frac{3}{2} \int_3^1 f(x) dx \\ &= -\frac{3}{2} \int_3^1 (x^2 + 3) dx = \left(-\frac{1}{2} x^3 - \frac{9}{2} x \right) \Big|_3^1 = 22. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx = 9 + 22 = 31.$$

- Câu 28. (THPT Lê Thánh Tông - HCM-2022)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{khi } x < 2 \\ 4x^3-1, & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(0) = 3$. Giá trị $F(3) - 5F(-5)$ bằng
- A.** 12. **B.** 16. **C.** 13. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } F(3) - F(0) + 5F(0) - 5F(-5) &= \int_0^3 f(x) dx + 5 \int_{-5}^0 f(x) dx \\ &= \int_0^2 (2x+3) dx + \int_2^3 (4x^3-1) dx + 5 \int_{-5}^0 (2x+3) dx = 24 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } F(3) - 5F(-5) + 4F(0) = 24 \Rightarrow F(3) - 5F(-5) = 12.$$

- Câu 29. (THPT Nguyễn Tất Thành-Đh-SP-HN-2022)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sin^2 x + 1 & \text{khi } x < 0 \\ 2^x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $F(1) = \frac{2}{\ln 2}$. Tính $F(-\pi)$.

- A.** $F(-\pi) = -2\pi + \frac{1}{\ln 2}$. **B.** $F(-\pi) = -\pi - \frac{1}{\ln 2}$.
- C.** $F(-\pi) = -2\pi$. **D.** $F(-\pi) = -2\pi - \frac{1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_{-\pi}^1 f(x) dx = \int_{-\pi}^0 (2\sin^2 x + 1) dx + \int_0^1 2^x dx = \left(-\frac{1}{2} \sin 2x + 2x \right) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = 2\pi + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\text{Mặt khác } \int_{-\pi}^1 f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = f(1) - f(-\pi)$$

$$\text{Khi đó: } f(1) - f(-\pi) = 2\pi + \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow f(-\pi) = -2\pi + \frac{1}{\ln 2}$$

Câu 30. (Sở Bắc Giang 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2(x^3 + 1)^3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ (với m là tham số). Biết

hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = a \cdot e - \frac{b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$; $\frac{b}{c}$ tối giản ($e = 2,718281828$). Biểu thức $a + b + c + m$ bằng

A. 13.

B. 35.

C. -11.

D. 36.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ta có với $\forall x > 0$ khi đó $f(x) = e^x + m$ hoặc $\forall x < 0$ khi đó $f(x) = x^2(x^3 + 1)^3$ nên hàm số $y = f(x)$ đã liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ với mọi giá trị của tham số m .

Xét tại $x = 0$, ta được:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = 1 + m; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2(x^3 + 1)^3] = 0 \text{ và } f(0) = 1 + m.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I + J$ trong đó:

$$I = \int_{-1}^0 x^2(x^3 + 1)^3 dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 (x^3 + 1)^3 d(x^3) = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 (x^3 + 1)^3 dx = \frac{1}{3} (e^x - x) \Big|_{-1}^0 = e - 2.$$

$$\text{Từ đó ta được } \int_{-1}^1 f(x) dx = e - 2 + \frac{1}{12} = 1 \cdot e - \frac{23}{12}.$$

Từ đó ta tìm được $a = 1; b = 23; c = 12; m = -1$ nên $a + b + c + m = 1 + 23 + 12 + (-1) = 35$.

Câu 31. (Sở Bạc Liêu 2022) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tích phân

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \frac{f(\ln x - 1)}{x} dx = \frac{a}{b} + ce \text{ biết } a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ và } \frac{a}{b} \text{ tối giản. Tính } a + b + c?$$

A. 35.

B. 29.

C. 36.

D. 27.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \ln x - 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = -2 \text{ và } x = e^2 \Rightarrow t = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int_{-2}^1 f(t) dt = \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 (x^2 - 2x + 2) dx + \int_0^1 (e^x + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_{-2}^0 + (e^x + x) \Big|_0^1 = \frac{32}{3} + e = \frac{a}{b} + ce. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = 32, b = 3, c = 1.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 36.$$

Câu 32. (Sở Phú Thọ 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln(x+1) & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{x^2+3}+1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = a\sqrt{3} + b \ln 2 + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Q}. \text{ Giá trị của } a + b + 6c \text{ bằng}$$

A. 35.

B. -14.

C. -27.

D. 18.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(\ln x)}{x} dx. \text{ Đặt: } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{1}{e} \Rightarrow t = -1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 (2x\sqrt{x^2+3}+1) dx + \int_0^1 3x^2 \ln(x+1) dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^0 2x\sqrt{x^2+3} dx + \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 3x^2 \ln(x+1) dx.$$

$$\text{Ta có: } J = \int_{-1}^0 2x\sqrt{x^2+3} dx.$$

$$\text{Đặt: } r = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow r^2 = x^2+3 \Rightarrow 2rdr = 2xdx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow r = \sqrt{3} \\ x = -1 \Rightarrow r = 2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow J = \int_2^{\sqrt{3}} 2r^2 dr = \frac{2r^3}{3} \Big|_2^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}.$$

$$\text{Ta có: } K = \int_0^1 3x^2 \ln(x+1) dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow K = (x^3 + 1) \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = 2 \ln 2 - \ln 1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - \frac{5}{6}.$$

$$\text{Khi đó: } I = J + K + \int_{-1}^0 dx = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3} + 2 \ln 2 - \frac{5}{6} + 1 = 2\sqrt{3} + 2 \ln 2 - \frac{31}{6}.$$

$$\Rightarrow a = 2; b = 2; c = -\frac{31}{6}. \text{ Vậy } a + b + 6c = -27.$$

Câu 33. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh - 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ thoả mãn

$$\int_0^2 f(x) dx = 13. \text{ Tính } T = a + b - ab?$$

A. $T = -11.$

B. $T = -5.$

C. $T = 1.$

D. $T = -1.$

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy hàm số phải liên tục tại $x = 1$. Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 + a = 3 + b \Leftrightarrow a - b = 1.$$

Ta có:

$$13 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + b) dx + \int_1^2 (2x + a) dx = (x^3 + bx) \Big|_0^1 + (x^2 + ax) \Big|_1^2$$

$$= (b + 1) + (a + 3) = a + b + 4 \Rightarrow a + b = 9.$$

$$\text{Nhu vậy } \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \text{ suy ra } T = a + b - ab = 5 + 4 - 5 \cdot 4 = -11.$$

Câu 34. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2022) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x - 3, & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x - 1) \cos x dx + \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \frac{a}{b} \text{ với } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản. Giá trị của tổng } a + b \text{ bằng}$$

A. 350.

B. 305.

C. -350.

D. 19.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x - 1) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2 \sin x - 1 \Rightarrow dt = 2 \cos x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \cos x dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 (2x-3) dx + \int_0^1 (x^2+x+1) dx \right] = -\frac{13}{12}.$$

$$\text{Xét tích phân } J = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx.$$

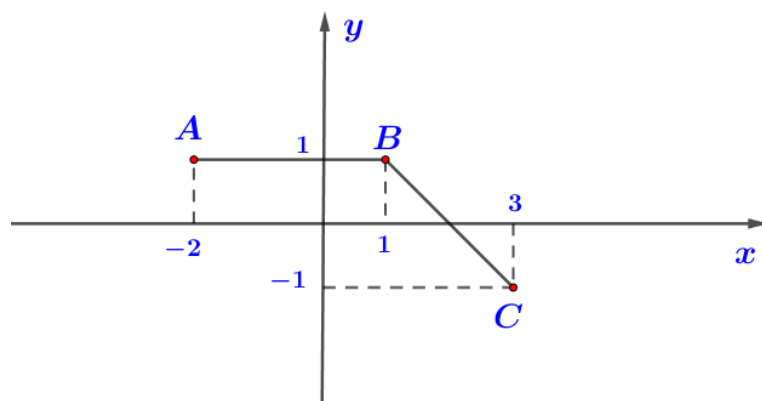
$$\text{Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = e^2 \Rightarrow t = 2 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } J = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2+x+1) dx = \frac{29}{6}.$$

$$\text{Ta có: } I + J = -\frac{13}{12} + \frac{29}{6} = \frac{15}{4}. \text{ Do đó: } a = 15, b = 4. \text{ Vậy } a + b = 19.$$

Câu 35. (Mã 101-2023) Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn

$[-2; 3]$. Tích phân $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng



A. 4.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{7}{2}$.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$$

Đường thẳng AB có phương trình là: $y = 1$.

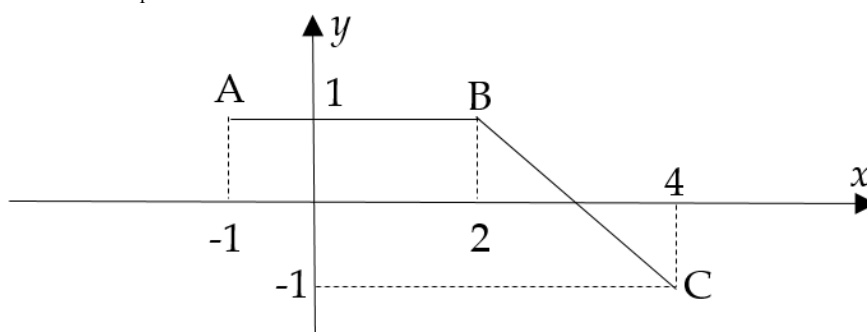
Đường thẳng BC đi qua $B(1, 1); C(3, -1)$ nên có phương trình là: $y = -x + 2$.

$$y = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_{-2}^1 1 dx + \int_1^2 (-x+2) dx + \int_2^3 (-x+2) dx = 3.$$

Câu 36. (Mã 102-2023) Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn

$[-1; 4]$. Tích phân $\int_{-1}^4 f(x) dx$ bằng



A. $\frac{7}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 2) \\ -x+3, & x \in [2; 4] \end{cases}$

$$\text{Vậy } \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^2 1 dx + \int_2^4 (-x+3) dx = 3 + 0 = 3$$