

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
GIA LAI**

NĂM HỌC 2019 – 2020

Môn thi: TOÁN

HƯỚNG DẪN CHẤM

ĐỀ CHÍNH THỨC

(gồm 4 trang)

Câu 1 (5,0 điểm).

- a) Hôm nay là thứ Tư, hỏi sau $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 89^3 + 90^3)$ ngày nữa sẽ là thứ mấy trong tuần? Vì sao?

Đáp án	Điểm
Ta có $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 89^3 + 90^3 = (1^3 + 90^3) + (2^3 + 89^3) + \dots + (45^3 + 46^3)$	0,75
Hơn nữa $a^3 + b^3$ chia hết cho $a + b$ với mọi số nguyên dương a, b đồng thời 91 là bội số của 7.	0,75
Nên $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 89^3 + 90^3)$ chia hết cho 7. Vậy sau $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 89^3 + 90^3)$ ngày nữa cũng là ngày thứ Tư.	0,5

- b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 - 2xy + (y + 1)^2 = 20 + 2y$.

Đáp án	Điểm
Ta có: $3x^2 - 2xy + (y + 1)^2 = 20 + 2y \Leftrightarrow (x - y)^2 = 19 - 2x^2$	1,0
$(x - y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow 19 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{19}{2}$ Vì x là số nguyên nên $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$	0,5
Với $x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 19$ (loại). Với $x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 17$ (loại). Với $x^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 11$ (loại).	0,5
Với $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ $x = 3 \Rightarrow (3 - y)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ $x = -3 \Rightarrow (-3 - y)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = -2 \end{cases}$	0,5
Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(3; 2), (3; 4), (-3; -2), (-3; -4)$.	0,5

Câu 2 (5,0 điểm).

- a) Cho a, b là các số hữu tỷ. Chứng minh rằng, nếu a, b không đồng thời bằng không thì $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ là số vô tỷ.

Đáp án	Điểm
Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Nếu $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ là số hữu tỷ thì $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = 2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6}$ là số hữu tỷ nên $2ab\sqrt{6}$ là số hữu tỷ. Và do đó $ab = 0$.	1,0
Nếu $a = 0$ thì từ $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = b\sqrt{3}$ là số hữu tỷ ta lại có $b = 0$. Đây là điều mâu thuẫn. Trường hợp $b = 0$ làm tương tự.	0,75 0,75

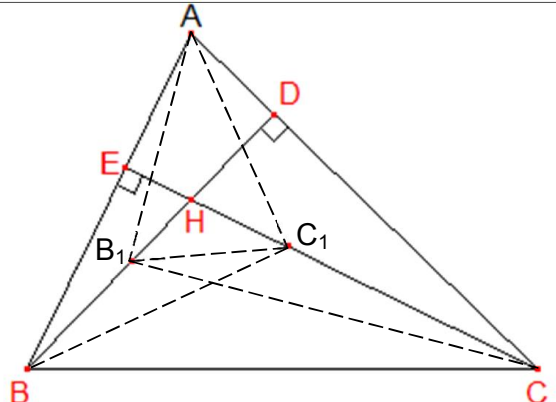
- b) Cho x, y là hai số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 y^3}{(x+y)^2 (x+1)^3 (y+1)^3}.$$

Đáp án	Điểm
Ta có $(x+y)^2 \geq 4xy; \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}; \quad \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}}.$	1,5
Do đó $P = \frac{x^3 y^3}{(x+y)^2 (x+1)^3 (y+1)^3} \leq \frac{x^3 y^3}{4xy \left(3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}\right)^3 \left(3\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}}\right)^3} = \frac{4}{729}.$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 2$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{4}{729}$ đạt khi $x = y = 2$.	0,5 0,5

Câu 3 (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC , hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Gọi B_1, C_1 là hai điểm tương ứng trên các đoạn HB, HC sao cho $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^\circ$. Tam giác AB_1C_1 là tam giác gì? Vì sao?

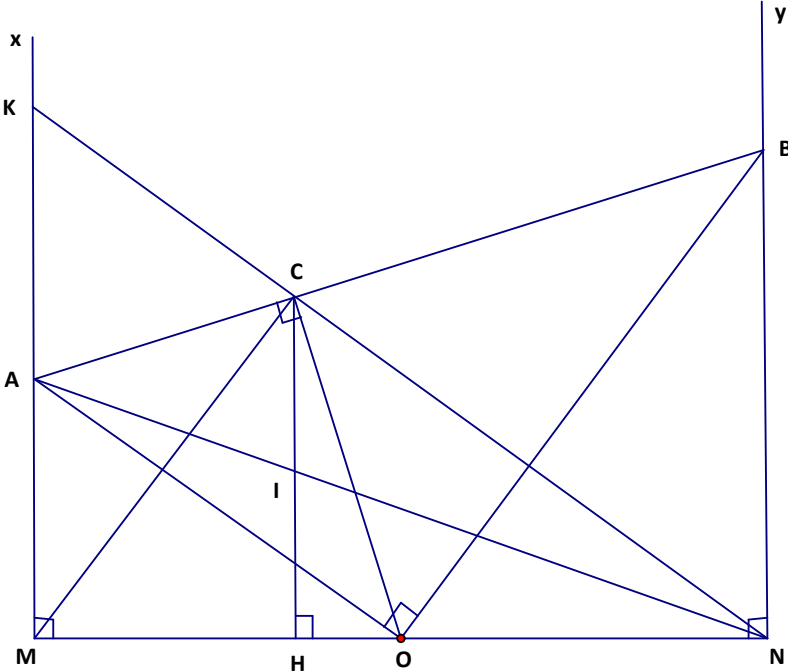
Đáp án	Điểm
	
Tam giác AB_1C_1 vuông ở B_1 có B_1D là đường cao nên $AB_1^2 = AD \cdot AC \quad (1)$	1,0

Tam giác AC_1B vuông ở C_1 có C_1E là đường cao nên $AC_1^2 = AE \cdot AB \quad (2)$	1,0
Mặt khác tam giác ABD đồng dạng với tam giác ACE (theo trường hợp g-g) nên $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \text{ hay } AB \cdot AE = AD \cdot AC \quad (3)$ Từ (1), (2) và (3) suy ra $AB_1^2 = AC_1^2$ hay $AB_1 = AC_1$. Vậy tam giác AB_1C_1 là tam giác cân tại A .	1,0

Câu 4 (4,0 điểm).

Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa đoạn thẳng MN kẻ hai tia Mx và Ny cùng vuông góc với đoạn thẳng MN . Trên tia Mx lấy điểm A (A không trùng với M). Qua trung điểm O của đoạn thẳng MN kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt tia Ny tại B , kẻ OC vuông góc với AB tại C . Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên MN .

- Chứng minh đường thẳng AN đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH .
- Xác định vị trí của điểm A trên tia Mx để diện tích tứ giác $ABNM$ có giá trị nhỏ nhất.

Đáp án	Điểm
	
a) Gọi I là giao điểm của AN và CH ; K là giao điểm của NC và tia Mx Tam giác MOA đồng dạng với tam giác NBO (g-g) $\Rightarrow \frac{OA}{BO} = \frac{MA}{NO} \Rightarrow \frac{OA}{BO} = \frac{MA}{OM}$ (do $OM = ON$)	0,5
Suy ra tam giác MAO đồng dạng với tam giác OAB (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{OAB}$ Suy ra tam giác MAO bằng tam giác CAO (ch-gn) $\Rightarrow AM = AC; OM = OC$	0,5
$OM = ON = OC$ suy ra tam giác MCN vuông tại C . $AM = AC; OM = OC$ suy ra AO là đường trung trực của đoạn thẳng MC Suy ra $OA \parallel NC$	0,5

Tam giác MNK có $OM = ON$, $OA \parallel NK$ suy ra $MA = AK$	
Tam giác NMA có $IH \parallel AM$ suy ra $\frac{IH}{AM} = \frac{NI}{NA}$ Tam giác NKA có $IC \parallel KA$ suy ra $\frac{IC}{KA} = \frac{NI}{NA}$ Suy ra $IH = IC$ Vậy đường thẳng AN đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.	0,5
b) Vì tứ giác ABNM là hình thang vuông nên $S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot (AM + BN) \cdot MN$ $AM + BN \geq 2\sqrt{AM \cdot BN} = 2 \cdot \sqrt{\frac{MN^2}{4}} = MN$ (Vì tam giác MOA đồng dạng với tam giác NBO nên $AM \cdot BN = \frac{MN^2}{4}$; $AM > 0$; $BN > 0$; $MN > 0$)	1,0
Suy ra $S_{ABNM} \geq \frac{1}{2} MN^2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AM = BN = \frac{MN}{2} = OM$ Vậy: Điểm A thuộc tia Mx và cách M một đoạn bằng OM thì diện tích tứ giác ABNM nhỏ nhất.	1,0

Câu 5 (3,0 điểm).

Một gia đình có 4 thành viên, mỗi thành viên đều biết chơi đúng hai loại nhạc cụ và hai thành viên bất kỳ cùng biết chơi đúng một loại nhạc cụ. Chứng minh rằng có một loại nhạc cụ mà cả 4 thành viên trong gia đình đều biết sử dụng.

Đáp án	Điểm
Giả sử 4 thành viên trong gia đình đó là A, B, C, D. Giả sử A biết sử dụng hai loại nhạc cụ là nhạc cụ số 1 và số 2. Theo giả thiết thì B, C, D mỗi người sẽ sử dụng được một nhạc cụ nào đó trong số hai nhạc cụ kể trên.	1,0
Theo nguyên tắc Dirichlet thì phải có ít nhất hai người cùng biết sử dụng một nhạc cụ nào đó trong số hai nhạc cụ kể trên. Giả sử B, C cùng biết sử dụng nhạc cụ số 1.	1,0
Lúc này chắc chắn B còn biết sử dụng một nhạc cụ số 3 và D còn biết sử dụng một nhạc cụ số 4 nào đó nữa. Nếu ta phản chứng thì D sẽ không biết chơi nhạc cụ số 1. Lúc này để đảm bảo D biết sử dụng chung một nhạc cụ với mỗi thành viên khác trong gia đình thì D phải biết chơi ít nhất 3 nhạc cụ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán. Vậy có một loại nhạc cụ mà tất cả các thành viên trong gia đình đều biết sử dụng.	1,0

-----Hết-----

Lưu ý: Mọi cách giải khác đúng đều được điểm tối đa.