

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề thi có 01 trang

Câu 1 (4,5 điểm).

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a)  $7x^2 - 7xy - 5x + 5y$ .

b)  $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$ .

2. Cho biểu thức  $Q = \left( \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} + \frac{2x^2}{x^2(x - 2) + 4(x - 2)} \right) \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right)$ , với  $x \neq 0$  và  $x \neq 2$ .

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm giá trị của x để Q có giá trị là  $\frac{1}{4}$ .

Câu 2 (5,0 điểm).

1. Giải các phương trình sau:

a)  $|x^2 - 2x - 1| = 14$ .

b)  $\frac{5x - 150}{50} + \frac{5x - 102}{49} + \frac{5x - 56}{48} + \frac{5x - 12}{47} + \frac{5x - 660}{46} = 0$ .

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn  $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$ .

Câu 3 (3,0 điểm).

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{2012}{x^2 + y^2 - 20(x + y) + 2213}$

2. Chứng minh rằng  $n^4 + 7(7 + 2n^2)$  chia hết cho 64 với mọi n là số nguyên lẻ.

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho AE = AF. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N.

1. Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật.

2. Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng: AC = 2EF.

3. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ .

Câu 5 (1,5 điểm).

Cho a và b là hai số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng  $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \geq \frac{25}{4}$ .

Đẳng thức xảy ra khi nào?

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

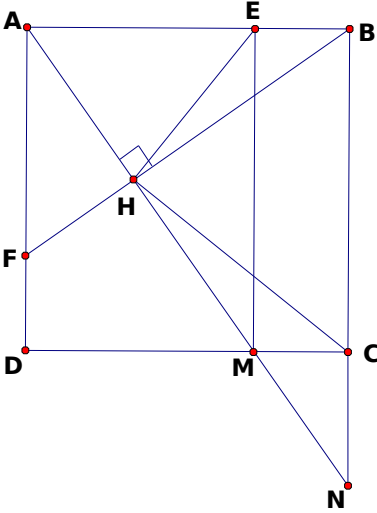
Họ và tên thí sinh: .....Số báo danh:.....

Giám thị 1 (Họ tên và ký).....

Giám thị 2 (Họ tên và ký).....

| Câu 1                  | Hướng dẫn giải                                                                                                                                                                                                                  | (4,5 điểm)  |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>1</b><br>(2.0 điểm) | a) $7x^2 - 7xy - 5x + 5y = (7x^2 - 7xy) - (5x - 5y) = 7x(x - y) - 5(x - y)$<br>$= (x - y)(7x - 5)$                                                                                                                              | 0,5<br>0,5  |
|                        | b) Ta có $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$<br>$= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013$                                                                                                                                               | 0.25        |
|                        | $= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2013(x^2 + x + 1)$                                                                                                                                                                                   | 0.5         |
|                        | $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)$                                                                                                                                                                                               | 0.25        |
|                        |                                                                                                                                                                                                                                 |             |
| <b>2</b><br>(2.5 điểm) | Với ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$                                                                                                                                                                        |             |
|                        | Ta có $Q = \left( \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} + \frac{2x^2}{x^2(x - 2) + 4(x - 2)} \right) \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right)$                                                                                                |             |
|                        | $= \left( \frac{x(x - 2)}{2(x^2 + 4)} + \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x - 2)} \right) \left( \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \right)$                                                                                                        | 0.75        |
|                        | $= \left( \frac{x(x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \right) \left( \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \right)$                                                                                                                        | 0.5         |
|                        | $= \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x^2} = \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x}$                                                                                              | 0.5         |
|                        | b) $Q = \frac{x + 1}{2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(x + 1) = 2x \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$<br>$x = -2$ thỏa ĐKXĐ nên là giá trị cần tìm.                                                              | 0.5<br>0.25 |
|                        |                                                                                                                                                                                                                                 |             |
| Câu 2                  |                                                                                                                                                                                                                                 | (5.0 điểm)  |
| <b>1</b><br>(1,5 điểm) | a) $ x^2 - 2x - 1  = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 14 \\ x^2 - 2x - 1 = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = 0 \\ x^2 - 2x + 13 = 0 \end{cases}$                                     | 0,5         |
|                        | Pt $x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = -3$                                                                                                                                   | 0.5         |
|                        | CM Pt $x^2 - 2x + 13 = 0$ vô nghiệm                                                                                                                                                                                             | 0.25        |
|                        | Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-3; 5\}$                                                                                                                                                                       | 0.25        |
| <b>(1,5 điểm)</b>      | b) $\frac{5x - 150}{50} + \frac{5x - 102}{49} + \frac{5x - 56}{48} + \frac{5x - 12}{47} + \frac{5x - 660}{46} = 0$                                                                                                              |             |
|                        | $\Leftrightarrow \left( \frac{5x - 150}{50} - 1 \right) + \left( \frac{5x - 102}{49} - 2 \right) + \left( \frac{5x - 56}{48} - 3 \right) + \left( \frac{5x - 12}{47} - 4 \right) + \left( \frac{5x - 660}{46} + 10 \right) = 0$ | 0,25        |
|                        | $\Leftrightarrow \left( \frac{5x - 200}{50} \right) + \left( \frac{5x - 200}{49} \right) + \left( \frac{5x - 200}{48} \right) + \left( \frac{5x - 200}{47} \right) + \left( \frac{5x - 200}{46} \right) = 0$                    | 0,25        |
|                        | $\Leftrightarrow (5x - 200) \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \frac{1}{47} + \frac{1}{46} \right) = 0$                                                                                                        | 0,25        |
|                        | $\Leftrightarrow (5x - 200) = 0 \Leftrightarrow x = 40.$                                                                                                                                                                        | 0,5         |

|                               |                                                                                                                                                            |                 |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
|                               | Vậy tập nghiệm của Pt đã cho là $S = \{40\}$                                                                                                               | 0,25            |
|                               |                                                                                                                                                            |                 |
| <b>2</b><br><b>(2,0 điểm)</b> | Ta có $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)                                                | 0.5             |
|                               | $(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2$ (2)                                              | 0.5             |
|                               | Từ (1) và (2) ta có $x < y < x+2$ mà $x, y$ nguyên suy ra $y = x+1$                                                                                        | 0.25            |
|                               | Thay $y = x+1$ vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được $x = \pm 1$ ; <b>từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là: (-1 ; 0) và (1; 2)</b> | 0.5             |
|                               | KL nghiệm                                                                                                                                                  | 0.25            |
|                               |                                                                                                                                                            |                 |
| <b>Câu 3</b>                  |                                                                                                                                                            | <b>(4 điểm)</b> |
| <b>1</b><br><b>(1.0 điểm)</b> | Ta có $x^2 + y^2 - 20(x+y) + 2213 = (x-10)^2 + (y-10)^2 + 2013 \geq 2013$ với mọi $x, y$ .                                                                 | 0.25            |
|                               | $\Rightarrow P = \frac{2012}{(x-10)^2 + (y-10)^2 + 2013} \leq \frac{2012}{2013}$                                                                           | 0.25            |
|                               | $P = \frac{2012}{2013}$ khi $x = 10$ và $y = 10$                                                                                                           | 0.25            |
|                               | Vậy $\text{Max } P = \frac{2012}{2013}$ khi $x = 10$ và $y = 10$                                                                                           | 0.25            |
|                               |                                                                                                                                                            |                 |
| <b>2</b><br><b>(2.0 điểm)</b> | $n^4 + 7(7+2n^2) = n^4 + 14n^2 + 49 = (n^2 + 7)^2$                                                                                                         | 0.25            |
|                               | Do $n$ là số nguyên lẻ nên $n = 2k+1$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                               | 0.25            |
|                               | Khi đó $(n^2 + 7)^2 = 16[k(k+1) + 2]^2$                                                                                                                    | 0.5             |
|                               | Do $k(k+1)$ chia hết cho 2 nên $[k(k+1) + 2]^2$ chia hết cho 4                                                                                             | 0.5             |
|                               | $\Rightarrow 16[k(k+1) + 2]^2$ chia hết cho 64                                                                                                             | 0.25            |
|                               | Vậy $n^4 + 7(7+2n^2)$ chia hết cho 64 với mọi $n$ là số nguyên lẻ.                                                                                         | 0.25            |
|                               |                                                                                                                                                            |                 |
| <b>Câu 4</b>                  |                                                                                                                                                            | <b>(6 điểm)</b> |

|                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                               |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
|                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                               |
| <b>1</b><br><b>(2.0 điểm)</b>                                   | <p>Ta có <math>\widehat{BAM} = \widehat{ABF}</math> (cùng phụ <math>\widehat{BAH}</math>)<br/> <math>AB = AD</math> (gt)<br/> <math>\widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^\circ</math> (ABCD là hình vuông)<br/> <math>\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF</math> (g.c.g)<br/> <math>\Rightarrow DM = AF</math>, mà <math>AF = AE</math> (gt)<br/> Nên <math>AE = DM</math><br/> Lại có <math>AE \parallel DM</math> (vì <math>AB \parallel DC</math>)<br/> Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành<br/> Mặt khác. <math>\widehat{BAE} = 90^\circ</math> (gt)<br/> Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật</p>                                                                                                                                                                                                                                                        | <p>0.75</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p> |
| <b>2</b><br><b>(2.0 điểm)</b>                                   | <p>Ta có <math>\triangle ABH \sim \triangle FAH</math> (g.g)<br/> <math>\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH}</math> hay <math>\frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH}</math> (<math>AB=BC, AE=AF</math>)<br/> Lại có <math>\widehat{HAB} = \widehat{HBC}</math> (cùng phụ <math>\widehat{ABH}</math>)<br/> <math>\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle EAH</math> (c.g.c)<br/> <math>\Rightarrow \frac{S_{\triangle CBH}}{S_{\triangle EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2</math>, mà <math>\frac{S_{\triangle CBH}}{S_{\triangle EAH}} = 4</math> (gt) <math>\Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4</math> nên <math>BC^2 = (2AE)^2</math><br/> <math>\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E</math> là trung điểm của <math>AB</math>, <math>F</math> là trung điểm của <math>AD</math><br/> Do đó: <math>BD = 2EF</math> hay <math>AC = 2EF</math> (đpcm)</p> | <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>   |
| <b>3</b><br><b>(2.0 điểm)</b>                                   | <p>Do <math>AD \parallel CN</math> (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có:<br/> <math>\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}</math> (1)<br/> Lại có: <math>MC \parallel AB</math> (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có:<br/> <math>\Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN}</math> hay <math>\frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}</math> (2)<br/> Từ (1),(2) <math>\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1</math><br/> (Pytago)<br/> <math>\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}</math> (đpcm)</p>                | <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>   |
| <b>Câu 5</b> <span style="float: right;"><b>1,5 điểm</b></span> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                               |

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                             |      |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>(1,5 điểm)</b> | $P = (ab + \frac{1}{ab}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq \frac{25}{4} \quad (*)$                                                                                                                                                                         | 0.25 |
|                   | Vì $(a + b)^2 \geq 4ab, a + b = 1, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$                                                                                                                                                                                  | 0.5  |
|                   | Mà $P = (ab + \frac{1}{ab}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) =$<br>$= (ab + \frac{1}{16ab}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + \frac{15}{16ab} \geq \frac{1}{2} + 2 + \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{25}{4}$ (Theo BĐT Cauchy) nên BĐT (*) đúng do đó bất được CM. | 0.5  |
|                   | Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$                                                                                                                                                                                                                  | 0.25 |

**Lưu ý khi chấm bài:**

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.
- Với bài 4, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.