PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN VĨNH TƯỜNG

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
Môn: Toán 9
Thời gian làm bài: 150 phút
Đề gồm 01 trang

Câu 1. a) Tính: $\sqrt{5-2\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

b) Cho *a, b, c* là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+\sqrt{abc}=4$. Tính giá trị của biểu thức:
$A=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}-\sqrt{abc}$

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$

b) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

Câu 3. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x;y;z)$ thỏa mãn $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỉ, đồng thời $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố.

Câu 4. Cho tam giác ABC nhọn (AB<AC) nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Tia AO cắt đường tròn (O) tại D.

a) Chứng minh các điểm B, C, E, F thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành.
c) Gọi M là trung điểm của BC, tia AM cắt HO tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu 5. a) Cho a, b, c là các số thực; x, y, z là các số thực dương.

Chứng minh : $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

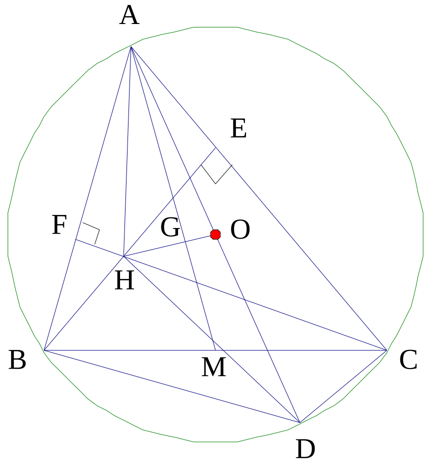
b) Cho x, y, z là các số thực lớn hơn -1.

Chứng minh : $\dfrac{1+x^2}{1+y+z^2}+\dfrac{1+y^2}{1+z+x^2}+\dfrac{1+z^2}{1+x+y^2}\ge 2$

Câu 6. Cho bảng vuông 13x13. Người ta tô màu đỏ ở S ô vuông của bảng sao cho không có 4 ô đỏ nào nằm ở 4 góc của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị lớn nhất của S có thể là bao nhiêu?

PHÒNG GD&ĐT VT **HƯỚNG DẪN CHÁM ĐỀ THI HSG 9**

Câu	Ý	Nội Dung
Câu 1		$\sqrt{5-2\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=\sqrt{5-2\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)^2}}=\sqrt{5-2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ $=\sqrt{5-2\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$
		$A=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}-\sqrt{abc}$
Câu 2		$a+b+c+\sqrt{abc}=4\Leftrightarrow 4a+4b+4c+4\sqrt{abc}=16$ $\Rightarrow \sqrt{a(4-b)(4-c)}=\sqrt{a(16-4b-4c+bc)}$
		$=\sqrt{a(2\sqrt{a}+\sqrt{bc})^2}=\sqrt{a}(2\sqrt{a}+\sqrt{bc})=2a+\sqrt{abc}$
		Tương tự $\sqrt{b(4-c)(4-a)}=2b+\sqrt{abc}$, $\sqrt{c(4-a)(4-b)}=2c+\sqrt{abc}$ $\Rightarrow A=2(a+b+c)+3\sqrt{abc}-\sqrt{abc}=2(a+b+c+\sqrt{abc})=8$
		a) ĐK: $x\ge 0$. Pt $\Leftrightarrow \sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}=5(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$ (2) Từ (1),(2) suy ra: $\sqrt{x+9}=3\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}\ge 3\sqrt{x+1}=\sqrt{9x+9}\ge\sqrt{x+9}$,dấu "=" xảy ra khi x=0. Thử lại x=0 là nghiệm pt. Vậy pt đã cho có nghiệm x=0.
		b) ĐK: $x\ge -1$. Đặt a = $\sqrt{x+1}$, b = $\sqrt{x^2-x+1}$ với $a\ge 0$, b>0. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $2(a^2+b^2)=5ab \Leftrightarrow (2a-b)(a-2b)=0$ $\Leftrightarrow$ 2a=b hoặc a=2b Với a=2b $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2\sqrt{x^2-x+1}$ $\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$, vô nghiệm. Với b=2a $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn đk $x\ge -1$.)

Câu 3		Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N}^*,(m,n)=1\right)$. $\Leftrightarrow nx-my=(mz-ny)\sqrt{2013}$ $\Rightarrow \begin{cases} nx-my=0 \\ mz-ny=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{m}{n} \Rightarrow xz=y^2$.
		$x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2=(x+z)^2-y^2=(x+y+z)(x+z-y)$.
		Vì $x+y+z>1$ và $x^2+y^2+z^2$ là số nguyên tố nên $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=x+y+z \\ x-y+z=1 \end{cases}$
		Từ đó suy ra $x=y=z=1$ (thỏa mãn).
Câu 4		
		$BFC=BEC=90^0$ (cùng nhìn cạnh BC)
		Suy ra B, C, E, F thuộc đường tròn đường kính BC.
		Ta có $ACD=90^0$ $\Rightarrow$ DC$\perp$AC Mà HE$\perp$AC; suy ra BH//DC (1) Chứng minh tương tự: CH//BD (2) Từ (1) và (2) suy ra BHCD là hình bình hành
		Ta có M trung điểm của BC suy ra M trung điểm của HD. Do đó AM, HO trung tuyến của ΔAHD $\Rightarrow$ G trọng tâm của ΔAHD $\Rightarrow \dfrac{GM}{AM}=\dfrac{1}{3}$ Xét tam giác ABC có M trung điểm của BC, $\dfrac{GM}{AM}=\dfrac{1}{3}$ Suy ra G là trong tâm của ΔABC
Câu 5		**a)** (0,5điểm) Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có: $\left(\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\right).(x+y+z)\geq\left(\sqrt{\dfrac{a^2}{x}}.\sqrt{x}+\sqrt{\dfrac{b^2}{y}}.\sqrt{y}+\sqrt{\dfrac{c^2}{z}}.\sqrt{z}\right)^2=$ $(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert+\lvert c\rvert)^2\geq(a+b+c)^2$ $\Rightarrow$ đpcm

b) (1 điểm) Vế trái

$$\geq \frac{2(1+x^2)}{2(1+z^2)+(1+y^2)} + \frac{2(1+y^2)}{2(1+x^2)+(1+z^2)} + \frac{2(1+z^2)}{2(1+y^2)+(1+x^2)} = M$$

Đặt $1+x^2 = a, 1+y^2 = b, 1+z^2 = c.$ với a, b,c >0

Khi đó $M = \frac{2a}{2c+b} + \frac{2b}{2a+c} + \frac{2c}{2b+a} = \frac{2a^2}{2ac+ab} + \frac{2b^2}{2ab+bc} + \frac{2c^2}{2bc+ac}$

Sau đó áp dụng bđt ở phần a) và bđt

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow M \geq 2$.

Từ đó có đpcm

Câu 6

Gọi x_i là số ô được tô đỏ ở dòng thứ i.

Ta có: $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{13}$; ở hàng thứ i số các cặp ô đỏ là $C^2_{x_i} = \frac{x_i(x_i-1)}{2}$ Vậy tổng số các cặp ô đỏ là A= $\frac{x_1(x_1-1)}{2} + \frac{x_2(x_2-1)}{2} + \ldots + \frac{x_{13}(x_{13}-1)}{2}$

Chiếu các cặp ô đỏ xuống một hàng ngang nào đó, theo giả thiết thì không có cặp ô đỏ nào có hình chiếu trùng nhau.

Vậy $C^2_{13} = 78 \geq A = \frac{x_1(x_1-1)}{2} + \frac{x_2(x_2-1)}{2} + \ldots + \frac{x_{13}(x_{13}-1)}{2}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{13} x_i^2 - \sum_{i=1}^{13} x_i \leq 156$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$(\sum_{i=1}^{13} x_i)^2 \leq 13(\sum_{i=1}^{13} x_i^2) \Rightarrow \frac{s^2}{13} - s \leq 156$

$\Leftrightarrow s^2 - 13s - 2028 \leq 0 \Leftrightarrow S \leq 52$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_{13} = 4$ (mỗi dòng có 4 ô được tô đỏ).

(Học sinh lập luận chỉ ra S ≤52 được 0,25đ)

Vẽ hình minh họa: (0,25đ)

X	X	X	X									
X				X	X	X						
	X			X			X	X				
		X		X					X	X		
			X	X							X	X
X							X		X		X	
	X				X				X			X
			X		X		X			X		
		X			X			X			X	
X								X		X		X
	X					X				X	X	
		X				X	X					X

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Vậy giá trị lớn nhất của S=52
</td>
</tr>
</table>

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa./.