**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYẾN SINH LỚP 10 – NĂM HỌC 2023-2024**

 **THỪA THIÊN HUẾ** **TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC – HUẾ**

 **Môn thi: TOÁN (CHUYÊN TOÁN)**

 **(ĐỀ THI CHÍNH THỨC)**Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

**Câu 1** ***(1,5 điểm)***

1. Chứng minh giá trị của biểu thức P = không phụ thuộc vào giá trị của a, với a > 0 và a 1.
2. Cho ba số a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn . Chứng minh Q = là một số chính phương.

**Câu 2** ***(1,5 điểm)***

1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): và đường thảng (d): . Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại A.
2. Giải hệ phương trình

**Câu 3** ***(2,0 điểm)***

1. Tìm m để phương trình (x là ẩn số) có hai nghiệm thỏa mãn .
2. Giải phương trình

**Câu 4** ***(3,0 điểm)***

 Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD và trực tâm H. Gọi E là điểm trên (O) sao cho hai dây AE và BC song song với nhau. Đường thảng EH cắt (O) tại điểm thứ hai là F và cắt đường trung trực của BC tại M.

1. Chứng minh M là trung điểm của EH và AMOF là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh
3. Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.

**Câu 5** ***(2,0 điểm)***

1. Tìm tất cả các số thực a sao cho và + đều là các số nguyên.
2. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

T =

---------- **HẾT** --------

***Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm***

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của Cán bộ coi thi 1: Chữ ký của Cán bộ coi thi 2:

**Đáp án tham khảo**

**Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Quốc Học**

**Ngày 04/06/2023**

**(Nguyễn Thái An & Nguyễn Duy Phước**

**Câu 1** ***(1,5 điểm)***

1. Chứng minh giá trị của biểu thức *P =*  không phụ thuộc vào giá trị của *a*, với *a* > 0 và *a*  1.

**Giải.** Với và , ta có

*P =*

 *=*

 *=*

 *=* 2.

Do đó, *P* không phụ thuộc vào *a.*

1. Cho ba số là ba số nguyên dương thỏa mãn . Chứng minh *Q =*  là một số chính phương.

**Giải.** Từ giải thiết , suy ra , thế vào, ta có

*Q* =

 =

 =

 **=**

Do nguyên nên là một số nguyên. Vậy *Q* là một số chính phương.

**Câu 2** ***(1,5 điểm)***

1. Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy,* cho parabol *(P):*  và đường thảng *(d):* . Tìm tất cả các giá trị của *m* để (*d*) cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho tam giác *OAB* vuông tại *A*.

**Giải.** Xét phương trình hoành độ giao điểm của (*d*) và (*P*):

(*d)* cắt (*P*) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

Gọi là hai nghiệm của PT (\*). Với , theo Vi-ét, ta có:

Gọi và là 2 giao điểm của (*d*) và (*P*). Tam giác *OAB* vuông tại *A* khi và chỉ khi . Điều này tương đương với

Kết hợp với , suy ra và . Thế vào . Ta có

Đối chiếu điều kiện, ta có là giá trị cần tìm.

1. Giải hệ phương trình

**Giải.** Giả sử là một nghiệm của hệ phương trình trên. Khi đó, là nghiệm của phương trình . Suy ra . Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình trên, ta có

Kết hợp với . Ta thu được . Do đó

Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ phương trình. Vậy là một bộ nghiệm của hệ phương trình đã cho.

**Câu 3** ***(2,0 điểm)***

1. Tìm m để phương trình ( là ẩn số) có hai nghiệm thỏa mãn *.*

**Giải.** Ta có , với mọi *m*. Do đó, PT luôn có 2 nghiệm phân biệt .

. (0.1)

 (0.2)

Từ (0.1) và (0.2), ta có . Theo Vi –ét, điều này tương đương với

Vậy,

1. Giải phương trình

**Giải.** Điều kiện . Đặt và . Suy ra

Suy ra, . Tương đương với

Để ý rằng, . Suy ra

Do đó, và .

Từ đó, ta có (thỏa mãn điều kiện).

Vậy, tập nghiệm của PT là

**Câu 4** ***(3,0 điểm)***

 Cho tam giác nhọn *ABC* (*AB* < *AC*) nội tiếp đường tròn (*O*), có đường cao *AD* và trực tâm *H*. Gọi *E* là điểm trên (*O*) sao cho hai dây *AE* và *BC* song song với nhau. Đường thảng *EH* cắt (*O*) tại điểm thứ hai là *F* và cắt đường trung trực của *BC* tại *M*.



1. Chứng minh *M* là trung điểm của *EH* và *AMOF* là tứ giác nội tiếp.

**Giải.** Vì , tứ giác *AECB* nội tiếp và *OM* là trung trực của *BC* nên *OM* là trung trực của *AE*. Ta có hay . Suy ra vuông tại *A*, nên *OM* là đường trung bình của . Vậy *M* là trung điểm của *EH*.

Kẻ đường kính *AK* của (*O*). Khi đó, . Suy ra (cùng vuông góc với *AE*). Nên Vậy tứ giác A*MOF* nội tiếp.

1. Chứng minh

**Giải.** Gọi *S* là giao điểm hứ hai của *AD* và (*O*). Ta có kết quả quen thuộc: *D* là trung điểm của *HS*. Ngoài ra, ta đã chứng minh được Do đó, *ES* là đường kính của (*O*). Nên *OD* là đường trung bình của . Suy ra (do *ES* là đường kính của (*O*)) hay . Vì vậy *OD* là đường trung trực của *FS*. Từ đó, Nên tứ giác *AODF* nội tiếp.

Vậy

1. Gọi *K* là điểm đối xứng với *A* qua *O*. Tiếp tuyến của (*O*) tại *A* cắt đường thẳng *FK* tại *T*. Chứng minh hai đường thẳng *TH* và *BC* song song với nhau.

**Giải.** Vì *AK* là đường kính của (*O*) nên và Suy ra

Ngoài ra, chú ý và . Do đó, . Vì vậy . Nên tứ giác *AHFT* nội tiếp. Suy ra . Mặt khác, . Vậy .

**Câu 5** ***(2,0 điểm)***

1. Tìm tất cả các số thực *a* sao cho và + đều là các số nguyên.

**Giải.** Giả sử a là số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt và

. Khi đó

.

Suy ra (1)

Ta có: nên . Kết hợp với (1), ta thu được và . Do đó và . Vì vậy hoặc . Nên hoặc

Thử lại, ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài taosn. Vậy là các số thực cần tìm.

1. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

T =

**Giải.** Đặt **.** Dự đoán điểm rơi . Ta có

Theo giải thiết . Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

Hơn nữa, khi và chỉ khi hay và .

Vậy dạt được khi và .

---------- **HẾT** --------