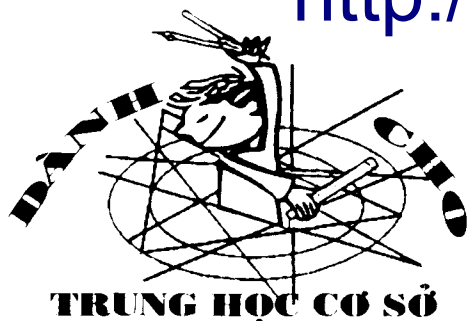




Vận dụng bất đẳng thức để giải PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LÊ XUÂN DƯƠNG

(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bất đẳng thức (BĐT) là một công cụ để giải nhiều dạng toán khác nhau, đặc biệt là giải phương trình và hệ phương trình. Trong phạm vi bài viết này chúng tôi xin giới thiệu cách vận dụng BĐT để giải phương trình (PT) và hệ phương trình (HPT).

DẠNG 1. Sử dụng BĐT để tạo ra tính đối nghịch của hai vế trong phương trình

Phương pháp. Dùng BĐT để đánh giá hai vế (vế trái (VT) và vế phải (VP)) của PT, giả sử thu được

$$\begin{cases} VP \geq A \\ VT \leq A \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} VP = A \\ VT \leq A \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} VP = A \\ VT \geq A. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } VP = VT \Leftrightarrow \begin{cases} VP = A \\ VT = A. \end{cases}$$

★ **Thí dụ 1.** Giải phương trình

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27.$$

Lời giải. ĐK $4 \leq x \leq 6$.

$$\text{Xét } VT^2 = 2 + 2\sqrt{(x-4)(6-x)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$$2\sqrt{(x-4)(6-x)} \leq x-4+6-x=2.$$

$$\text{Suy ra } VT^2 \leq 4 \text{ hay } VT \leq 2 \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=5$. Lại có

$$VP = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2 \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=5$.

Từ (1), (2) đối chiếu với điều kiện, suy ra PT có nghiệm duy nhất $x=5$. □

★ **Thí dụ 2.** Giải phương trình

$$4+4x-x^2=|x-1|+|x-2|+|2x-3|+|4x-14|.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} VP &= |x-1|+|x-2|+|2x-3|+|4x-14| \\ &\geq |x-1+x-2+2x-3+14-4x| = 8 \end{aligned} \quad (3)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

$$\text{Mặt khác } VT = 8 - (x-2)^2 \leq 8 \quad (4)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Từ (3) và (4) suy ra PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. □

★ **Thí dụ 3.** Giải phương trình

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3.$$

Lời giải. ĐK $-1 \leq x \leq 1$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \leq \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{2} \quad (5)$$

$$\sqrt[4]{1-x} = \sqrt{\sqrt{1-x} \cdot 1} \leq \frac{\sqrt{1-x} + 1}{2} \quad (6)$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \sqrt{\sqrt{1+x} \cdot 1} \leq \frac{\sqrt{1+x} + 1}{2} \quad (7)$$

Cộng theo vế của (5), (6), (7) thu được

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq 1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \quad (8)$$

Lại theo BĐT Cauchy ta có

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{(1-x) \cdot 1} \leq \frac{(1-x)+1}{2} = \frac{2-x}{2};$$

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{(1+x) \cdot 1} \leq \frac{(1+x)+1}{2} = \frac{2+x}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{2-x}{2} + \frac{2+x}{2} \quad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=3$. Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=3$. □

DẠNG 2. Sử dụng BĐT Cauchy để đưa về một bất phương trình có nghiệm duy nhất

★ **Thí dụ 4.** Giải phương trình

$$2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x-4} \quad (10)$$

Lời giải. Ta có

$$2x^2 - 11x + 21 = \left(\sqrt{2}x - \frac{11}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{47}{8} > 0$$

nên $4x-4 > 0$ hay $x > 1$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta được $3\sqrt[3]{4x-4} = 3\sqrt[3]{2.2(x-1)} \leq 2+2+(x-1) = x+3$ (11)

Từ (10) và (11) suy ra $2x^2 - 11x + 21 \leq x+3$.

Hay $2x^2 - 12x + 18 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow x = 3$. Thử lại ta được $x = 3$ là nghiệm duy nhất của PT (10). □

DẠNG 3. Sử dụng điều kiện phương trình bậc hai có nghiệm để giải hệ phương trình

a) Đối với hệ phương trình hai ẩn

★ **Thí dụ 5.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 + y^3 = 0 \\ x^2 y^3 - 2x + y = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$(13)$$

Lời giải. Nếu $y = 0$ thì từ PT (13) ta có $x = 0$. Thay vào PT (12) ta được $2 = 0$ vô lí.

Vậy $y \neq 0$, khi đó coi PT (12) là PT bậc hai ẩn x , PT này có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = -1 - y^3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -1 \quad (14)$$

Tương tự, coi PT (13) là PT bậc hai ẩn x , có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 1 - y^4 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq y \geq -1$. Kết hợp với (14) suy ra $y = -1$.

Thay vào PT (12) ta được $x = 1$. Các giá trị này thỏa mãn PT (13). Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -1)$. □

b) Đối với hệ phương trình ba ẩn

★ **Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x + 4y - 2xy + z^2 = 4. \end{cases}$$

Lời giải. Coi z là tham số. Viết HPT trên dưới

$$\text{dạng sau } \begin{cases} x + y = 2 - z \\ xy = \frac{4 - 4z + z^2}{2}. \end{cases}$$

Khi đó x, y là nghiệm của PT bậc hai ẩn X

$$X^2 - (2-z)X + \frac{(z-2)^2}{2} = 0 \quad (14)$$

PT (14) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = (z-2)^2 - 4 \cdot \frac{(z-2)^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -(z-2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2. \text{ Với } z = 2, \text{ ta có } \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 0. \end{cases}$$

Suy ra $x = y = 0$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (0; 0; 2)$. □

DẠNG 4. Sử dụng BĐT để tạo ra sự sắp thứ tự vòng quanh

★ **Thí dụ 7.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x. \end{cases}$$

Lời giải. Vì $y = \frac{2x^2}{x^2+1} \geq 0, \forall x$ nên xảy ra hai trường hợp sau:

1) Với $y = 0$, khi đó $x = z = 0$.

Vậy $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ là một nghiệm của HPT.

2) Với $y > 0$, suy ra $z > 0$ và $x > 0$. Để thấy

$$x^2 + 1 \geq 2x \text{ nên } \frac{2x^2}{x^2+1} \leq x \text{ hay } y \leq x.$$

Theo BĐT Cauchy ta có

$$y^4 + y^2 + 1 \geq 3\sqrt[3]{y^4 \cdot y^2 \cdot 1} = 3y^2.$$

$$\text{Suy ra } \frac{3y^3}{y^4 + y^2 + 1} \leq y \text{ hay } z \leq y.$$

Từ PT thứ ba của hệ suy ra $x \leq z$. Vậy $x \leq y \leq z \leq x$, điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z$. Thay vào PT đầu ta được $x = y = z = 1$. Để thử được $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ thỏa mãn HPT đã cho. Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y; z)$ là $(1; 1; 1); (0; 0; 0)$. □

DẠNG 5. Sử dụng BĐT Bunyakovsky

★ **Thí dụ 8.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = 6 \\ x + y + z = 9. \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x, y, z \geq -1$. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} (1 \cdot \sqrt{x+1} + 1 \cdot \sqrt{y+1} + 1 \cdot \sqrt{z+1})^2 \\ \leq (1+1+1)(x+1+y+1+z+1) = 36. \end{aligned}$$

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2,5 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = (x+8)(x^2+2) \\ 16x-8y+16 = 5x^2+4xy-y^2 \end{cases}$$

Câu 2. (2 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất với mỗi số nguyên lẻ a mà $a^2 \leq n$ thì n chia hết cho a .

Câu 3. (3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . AD, BE, CF là ba đường cao ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$). Đường thẳng EF cắt BC tại G , đường thẳng AG cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai M .

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi N là trung điểm cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng $GH \perp AN$.

Câu 4. (1,5 điểm)

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad \text{với mọi } a, b, c > 0.$$

Câu 5. (1 điểm)

Mỗi ô vuông đơn vị của bảng kích thước 10×10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kì hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

TẠ MINH HIẾU

(GV Trường THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc) giới thiệu

Suy ra $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} \leq 6$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$, thỏa mãn PT thứ hai của HPT. Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (3; 3; 3)$. $\square$

DẠNG 6. Dự đoán nghiệm và chứng minh đó là nghiệm duy nhất

★ **Thí dụ 9. Giải phương trình**

$$\sqrt{\frac{6}{2-x}} + \sqrt{\frac{10}{3-x}} = 4.$$

Lời giải. ĐK $x < 2$. Nhận thấy $x = \frac{1}{2}$ là một nghiệm của PT. Ta chứng minh nghiệm này là duy nhất.

• Nếu $\frac{1}{2} < x < 2$ thì $\sqrt{\frac{6}{2-x}} > 2; \sqrt{\frac{10}{3-x}} > 2$.

Suy ra VT > 4 .

• Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $\sqrt{\frac{6}{2-x}} < 2; \sqrt{\frac{10}{3-x}} < 2$.

Suy ra VT < 4 .

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$. $\square$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1. $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12 + 40$ (ĐS. $x = 6$).

2. $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$ (ĐS. $x = 2$).

3. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{8x^3-1} = 1$ (ĐS. $x = 0,5$).

4. $\begin{cases} (x-1)\sqrt{y} + (y-1)\sqrt{x} = \sqrt{2xy} \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy \end{cases}$ (ĐS. $(x; y) = (2; 2)$).

5. $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases}$ (ĐS. $(x; y) = (1; -1)$).

6. $\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \frac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases}$ (ĐS. $(x; y; z) = \{(1; 1; 1); (0; 0; 0)\}$).

7. $\begin{cases} \sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} = 9 \\ x+y+z = 6 \end{cases}$ (ĐS. $(x; y; z) = (2; 2; 2)$).

TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NĂM HỌC 2010 - 2011

(Đề thi đã đăng trên THPT số 401, tháng 11 năm 2010)

VÒNG 1

(Dành cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Câu 1. 1) ĐK $x \neq -26; -6; -3; -1; 1; 2$.

$$\text{ĐS. } A = \frac{3x-6}{2x+6}.$$

2) Biến đổi $2A = 3 - \frac{15}{x+3}$. Vậy A nguyên khi

$\frac{15}{x+3}$ nguyên. ĐS. $x \in \{-2; -4; 0; -8; 12; -18\}$.

Câu 2. 1) PT hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(2m^2+1)x + 2m - 1 = m^2x + m - 2$.

$$\text{Tìm được } I\left(-\frac{m+1}{m^2+1}; \frac{-3m^2+m-2}{m^2+1}\right).$$

2) Giả sử $I(x_I; y_I)$, ta có

$$\begin{cases} y_I = (2m^2+1)x_I + 2m - 1 \\ y_I = m^2x_I + m - 2 \end{cases} \Rightarrow y_I = -x_I - 3.$$

Suy ra I thuộc đường thẳng cố định có phương trình $y = -x - 3$.

$$\text{Câu 3. 1) HPT (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = z - 1 \\ xy = -z^2 + 7z - 10. \end{cases}$$

Suy ra

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy = (z-1)^2 + 2(-z^2 + 7z - 10) = -z^2 + 12z - 19 \text{ (đpcm)}.$$

2) Từ $x^2 + y^2 = 17 \Rightarrow z = 6$. Thay vào HPT (I) tính được $(x; y) = (4; -1); (x; y) = (1; -4)$.

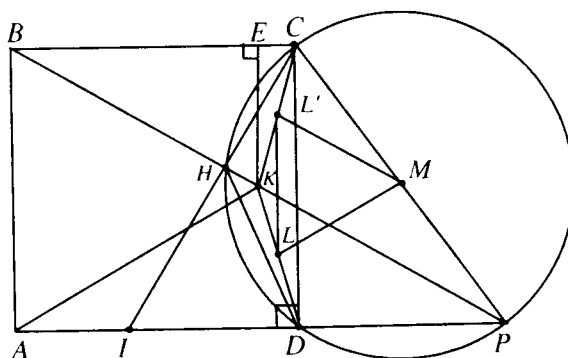
ĐS. $(x; y; z) = (4; -1; 6); (x; y; z) = (1; -4; 6)$.

Câu 4. (h. 1)

1) Kẻ KE vuông góc với BC , khi đó

$$KE = \frac{a}{2}, BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, EC = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Từ đó $KC = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.



Hình 1

2) Trong tam giác vuông CDI có

$$CI = \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2DI \text{ nên } \widehat{DCI} = 30^\circ. \text{ Mặt khác}$$

$\widehat{HPD} = 90^\circ - \widehat{ABP} = 30^\circ$. Suy ra tứ giác $CHDP$ nội tiếp (đpcm).

3) Lấy trung điểm L' của đoạn KC . Do tam giác CKD cân tại K và M là trung điểm của CP suy ra L và L' đối xứng nhau qua $KM \Rightarrow LM = L'M$. Do $L'M$ là đường trung bình của tam giác CKP nên $L'M = \frac{KP}{2} = \frac{a}{2}$ (đpcm).

Câu 5. Biến đổi PT đã cho về dạng

$$(x^2 - 4)^2 - 5(x^2 - 4)(x - 1) - 6(x - 1)^2 = 0.$$

Vì $x=1$ không là nghiệm của PT, nên $x \neq 1$. Khi đó PT đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x^2-4}{x-1}\right)^2 - 5\left(\frac{x^2-4}{x-1}\right) - 6 = 0. \text{ Đặt } t = \frac{x^2-4}{x-1}$$

$$\text{PT trên trở thành } t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 6. \end{cases}$$

ĐS. PT đã cho có bốn nghiệm là

$$3 + \sqrt{7}; 3 - \sqrt{7}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Câu 1. 1) Từ giả thiết, ta có

$$a + \sqrt{1-a^2} = b + \sqrt{1-b^2} \Rightarrow a\sqrt{1-a^2} = b\sqrt{1-b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 - a^4 = b^2 - b^4 \Rightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 1) = 0.$$

Vì $a^2 - b^2 \neq 0$ (giả thiết $a \neq b$) nên $a^2 + b^2 = 1$.

2) Đặt $a = 2009$, ta có

$$2009^2 + 2009^2 \cdot 2010^2 + 2010^2$$

$$= a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 = (a^2 + a + 1)^2.$$

Suy ra đpcm.

Câu 2. 1) Theo định lý Viète, ta có

$$\begin{cases} a + b = 2c & (1) \\ ab = -5d & (2) \\ c + d = 2a & (3) \\ cd = -5b & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) suy ra $a - c = c - b = d - a$ (đpcm).

2) Đặt $a - c = c - b = d - a = m$, thì
 $c = a - m$; $b = c - m = a - 2m$; $d = a + m$.

Do đó $a + b + c + d = 4a - 2m = 2(2a - m)$.

Từ (2), (4) suy ra

$$a^2 - 2am = -5a - 5m; a^2 - m^2 = -5a + 10m.$$

Từ đó, thu được $m^2 - 2am = -15m$.

Do $a \neq c$ nên $m \neq 0$, suy ra $m - 2a = -15$.

Suy ra $a + b + c + d = 30$ (đpcm).

Câu 3. 1) Ta có $(mn^2 - 2)^2 < n^2 S \Leftrightarrow n^3 > 1$
 $\Leftrightarrow n > 1$ (đúng).

$n^2 S < m^2 n^4 \Leftrightarrow m > n$ (đúng theo giả thiết).

2) Giả sử $m \neq n$, xét hai trường hợp

• Với $m > n$, theo 1) và do S là số chính phương suy ra

$$n^2 S = (mn^2 - 1)^2 \Rightarrow 4n^3 = 2mn^2 + 1 \text{ (sai)}$$

• Với $m < n$, khi đó

*) Nếu $m \geq 2$ thì $n > 2 \Rightarrow 2mn > 4m$

$\Rightarrow (mn)^2 < S < (mn+1)^2$ (mâu thuẫn với S là số chính phương).

*) Nếu $m = 1$ thì

Với $n > 2$ thì $(n+1)^2 < S < (n+2)^2$ (mâu thuẫn với S là số chính phương).

Với $n = 2$ thì $S = 8$ không phải là số chính phương. Vậy phải có $m = n$.

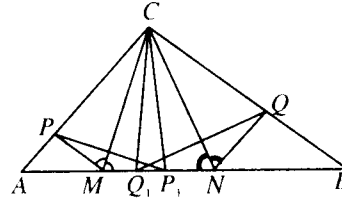
Câu 4. 1) Từ $CA + CB > AB$

$$\Rightarrow AN + BM > AN + BN \Rightarrow BM > BN \text{ (đpcm)}.$$

2) (h. 2). Do tam giác CBM cân tại B nên

$$\widehat{BCM} = \widehat{BMC}.$$

Mà $\widehat{PMC} = \widehat{BCM}$
 (so le trong)



Hình 2

nên $\widehat{PMC} = \widehat{BMC}$. Tương tự $\widehat{QNC} = \widehat{ANC}$, suy ra các điểm P_1, Q_1 đối xứng với các điểm P, Q qua các đường thẳng CM và CN đều thuộc AB và $CP = CP_1, CQ = CQ_1$. Từ $\triangle CPM = \triangle CP_1M$; $\triangle CQN = \triangle CQ_1N \Rightarrow \widehat{CP_1M} = \widehat{CPM}, \widehat{CQ_1N} = \widehat{CQN}$.

Mặt khác $\widehat{CPM} = \widehat{CQN}$ (cùng bù với góc $\widehat{ACB}$)

$$\Rightarrow \widehat{CP_1M} = \widehat{CQ_1N} \text{ nên } CP_1 = CQ_1 \Rightarrow CP = CQ.$$

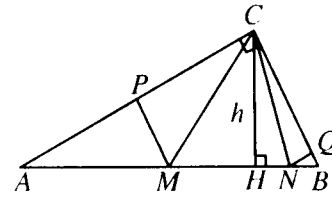
3) (h. 3) Ta có

$$CB = BM = \frac{a}{2},$$

$$CA = AN = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\Rightarrow MN = BM - BN$$

$$= \frac{a}{2} - \left(a - \frac{\sqrt{3}a}{2} \right) = \frac{(\sqrt{3}-1)a}{2}.$$



Hình 3

Gọi h là khoảng cách từ C đến AB thì

$$h = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{MCN} = \frac{(3-\sqrt{3})}{16} a^2.$$

$$\text{Câu 5. Do } a^2 + b^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{|a-b|}{\sqrt{2}} \right)^2$$

nên tổng bình phương ba số không thay đổi sau mỗi lần chơi.

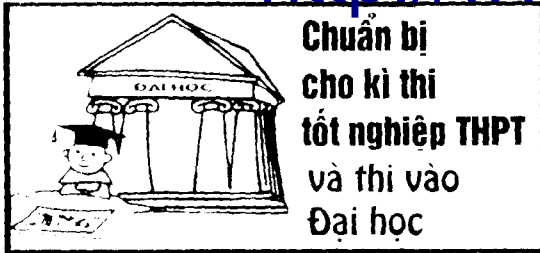
Tổng bình phương ba số ban đầu là $\frac{13}{2}$.

Tổng bình phương ba số đòi hỏi là $\frac{41}{8} + 2\sqrt{2}$.

Như vậy, ta không bao giờ có thể nhận được trạng thái đòi hỏi.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV Trường THPT chuyên ĐHSPhà Nội) giới thiệu



VỀ BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

PHAN CUNG ĐỨC
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài toán tính thể tích của một khối đa diện xuất hiện khá phổ biến trong các kì thi Đại học và Cao đẳng hiện nay. Để giải bài toán này thì sinh phải tính được diện tích mặt đáy và chiều cao của khối. Việc tính diện tích đáy thường được thực hiện khá dễ dàng. Vấn đề khó khăn hơn đối với các thí sinh là việc xác định đường cao và tính chiều cao. Dưới đây chúng ta xem xét một số trường hợp thường gặp khi xác định đường cao của một khối đa diện có đỉnh S và mặt phẳng (mp) chứa đáy là $mp(P)$.

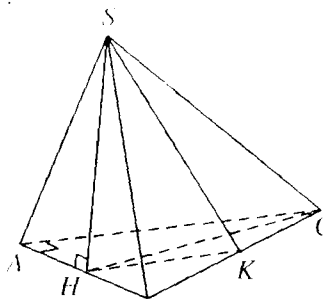
❖ **TRƯỜNG HỢP 1.** Xác định được mặt phẳng (P_1) qua đỉnh S và vuông góc (P) . Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (P_1) và H là hình chiếu vuông góc của điểm S lên Δ . Khi đó SH chính là đường cao của khối đa diện.

★ **Thí dụ 1.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = \alpha$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác SAB cân tại S và tam giác góc SBC vuông. Tính thể tích của chóp $S.ABC$.

Lời giải. (h. 1).

Tam giác ABC có
 $AB = 2a \sin \alpha$,
 $AC = 2a \cos \alpha$ nên
 $S_{ABC} = a^2 \sin 2\alpha$.

Vì $(SAB) \perp (ABC)$
và $SA = SB$ nên
 $SH \perp (ABC)$ với
 H là trung điểm
cạnh AB . Tam giác



Hình 1

SBC vuông ở đỉnh nào? Nếu ΔSBC vuông ở B thì $CB \perp BA$ (theo định lí ba đường vuông góc) điều này vô lí vì ΔABC vuông ở A . Tương tự nếu ΔSBC vuông ở C thì $\widehat{HCB} = 90^\circ$ (vô lí). Từ đó tam giác SBC vuông tại S .

Gọi K là trung điểm cạnh BC thì

$$SK = \frac{1}{2}BC = a, HK \parallel AC \text{ và } HK = \frac{1}{2}AC = a \cos \alpha$$

$$\Rightarrow SH^2 = SK^2 - HK^2 = a^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow SH = a \sin \alpha.$$

$$\text{Từ đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \sin 2\alpha \cdot a \sin \alpha = \frac{1}{3} a^3 \sin 2\alpha \sin \alpha. \quad \square$$

★ **Thí dụ 2.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC và O_1, O_2 thứ tự là tâm các mặt $A_1B_1C_1D_1, ADD_1A_1$. Tính thể tích khối tứ diện MNO_1O_2 .

Lời giải. (h. 2).

Ta có

$$mp(NO_1O_2)$$

$$\perp mp(ABCD)$$

và chúng cắt nhau
theo giao tuyến
 NE (E là trung
điểm cạnh AD).
Gọi O là tâm của
hình vuông $ABCD$
thì $MO \perp NE$. Suy

ra MO là đường cao của hình chóp $M.NO_1O_2$.

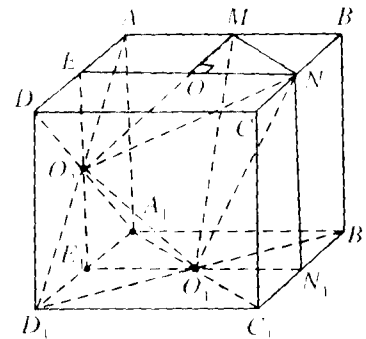
Ta có

$$S_{NO_1O_2} = S_{NEE_1N_1} - (S_{NN_1O_1} + S_{E_1O_1O_2} + S_{ENO_2})$$

$$= a^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{3a^2}{8}.$$

$$\text{nên } V_{M.NO_1O_2} = \frac{1}{3} S_{NO_1O_2} \cdot MO$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{16}. \quad \square$$



Hình 2

❖ TRƯỜNG HỢP 2. Xác định được hai mặt phẳng (P_1) , (P_2) qua đỉnh S của khối đa diện và vuông góc với mặt phẳng đáy (P) . Gọi Δ là giao tuyến của (P_1) và (P_2) thì Δ chứa đường cao của khối đa diện đó.

★ **Thí dụ 3.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Giả sử H là trung điểm cạnh AB và hai mặt phẳng (SHC) , (SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp nếu hình chóp có ba mặt bên là tam giác vuông.

Lời giải. (h. 3)

Vì (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên SH là đường cao của chóp. Hai tam giác SAD và SBC lần lượt vuông tại A và B (theo định lý ba đường vuông góc). Tam giác SCD có $SC = SD$ (vì $HC = HD$) nên nó không thể vuông tại C hoặc D . Nếu ΔSCD vuông tại S thì $SC < CD = a$. Nhưng do ΔSBC vuông tại B nên $SC > BC = a$. Từ đó ΔSCD không là tam giác vuông. Từ giả thiết suy ra ΔSAB phải là tam giác vuông. Do $SA = SB$, (vì $HA = HB$) nên ΔSAB vuông tại S , suy ra $SH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$. Vậy

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 4.** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hai mặt chéo (ACC_1A_1) và (BDD_1B_1) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, B_1C_1 và $MN \perp BD_1$. Tính thể tích của hình hộp.

Lời giải. (h. 4). Từ giả thiết ta có

$$S_{ABCD} = a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vì hai mặt chéo (ACC_1A_1) và (BDD_1B_1) cùng vuông góc với đáy nên giao tuyến là OO_1 vuông góc với mặt phẳng đáy.

Do OO_1 song song và bằng cạnh bên nên hình hộp đã cho là hình hộp đứng. Để thấy MN song song và bằng OB_1 nên trong hình chữ nhật BDD_1B_1 có $BD_1 \perp B_1O$. Theo một kết quả quen

thuộc $BD_1 \perp OB_1 \Leftrightarrow BD = \sqrt{2}BB_1$ (bạn đọc tự chứng minh) $\Leftrightarrow BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy

$$V_{\text{hộp}} = S_{ABCD} \cdot BB_1 = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}. \quad \square$$

❖ TRƯỜNG HỢP 3. Xét khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$). Sử dụng mối liên hệ giữa đường xiên, hình chiếu và góc nghiêng, ta có ba mệnh đề sau tương đương:

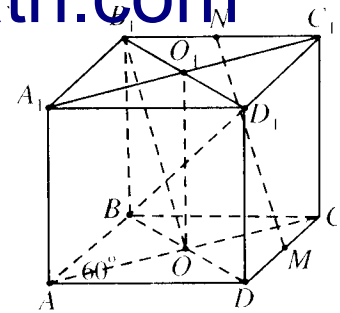
- 1) Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau.
- 2) Các cạnh bên hình chóp nghiêng đều trên đáy.
- 3) Đáy hình chóp nội tiếp được và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

★ **Thí dụ 5.** Xét các khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AB = a$. $SA = SB = SC = SD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Khối chóp nào có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

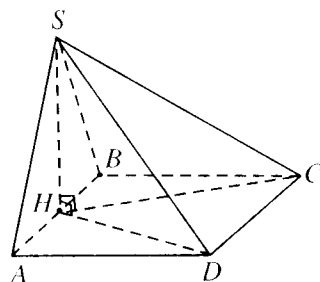
Lời giải. (h. 5)

Vì khối chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau nên đáy phải nội tiếp. Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $H = AC \cap BD$ thì $SH \perp (ABCD)$. Đặt $BC = x$ ($x > 0$) thì $S_{ABCD} = ax$,

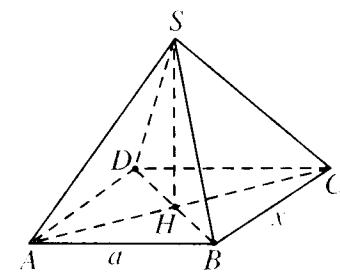
$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = \frac{4a^2 - x^2}{4} \quad (\text{ĐK } x < 2a)$$



Hình 4



Hình 3



Hình 5

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \alpha x \sqrt{\frac{4a^2 - x^2}{4}} = \frac{a}{6} \sqrt{x^2(4a^2 - x^2)}.$$

Vì $x^2 + 4a^2 - x^2 = 4a^2$ nên theo Hệ quả của BĐT Cauchy $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 = 4a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{2}$. Lúc đó

$$\text{Max } V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 6.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 1$, $SB = 2$, $SC = 3$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp đó.

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình). Để sử dụng tính chất của hình chóp có các cạnh bên bằng nhau, trên các cạnh SB , SC đặt $SB_1 = SC_1 = SA = 1$ thì $AB_1 = 1$, $AC_1 = \sqrt{2}$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$. Suy ra $\triangle AB_1C_1$ vuông tại A nên $SH_1 \perp (AB_1C_1)$ với H_1 là trung điểm cạnh B_1C_1 . Từ đó

$$V_{S.AB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{AB_1C_1} \cdot SH_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{V_{S.AB_1C_1}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = 6 \cdot V_{S.AB_1C_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt)}. \quad \square$$

❖ **TRƯỜNG HỢP 4.** Xét khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$). Sử dụng cách xác định góc giữa hai mặt phẳng, ta có ba mệnh đề sau tương đương:

- 1) Các mặt bên nghiêng đều trên đáy.
- 2) Đường cao các mặt bên kẻ từ đỉnh S xuống các cạnh đáy bằng nhau.
- 3) Chân đường cao H của hình chóp cách đều các cạnh đáy. Từ đó, nếu H nằm trong đa giác $A_1A_2...A_n$, thì đáy có đường tròn nội tiếp và H là tâm đường tròn đó.

★ **Thí dụ 7.** Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Các mặt phẳng (SAB) , (SBD) , (SAD) nghiêng đều với đáy $(ABCD)$ một góc α . Tính thể tích của khối chóp đó.

Lời giải. Hình chóp $SABCD$ có các mặt bên nghiêng đều trên đáy và đường cao của nó cũng là đường cao của chóp $SABCD$. Có hai trường hợp xảy ra:

1) Nếu chân đường cao H kẻ từ S xuống mặt phẳng đáy (ABD) nằm trong $\triangle ABD$ thì H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABD$ (h. 6). Theo giả thiết

$\triangle ABD$ đều, cạnh a nên H là tâm của nó. Suy

$$\text{ra } HO = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \widehat{SOH} = \alpha, \text{ với } O = AC \cap BD$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \alpha. \text{ Từ đó}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \alpha = \frac{a^3 \tan \alpha}{12}.$$

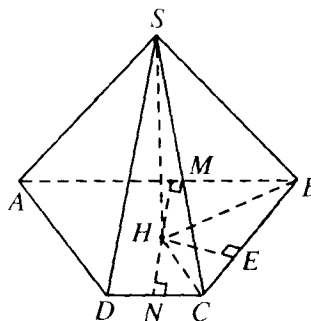
2) Nếu H nằm ngoài $\triangle ABD$ thì nó phải là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác đều ABD . Do ba đường tròn bàng tiếp của tam giác đều có bán kính bằng nhau nên chỉ cần xét một trường hợp H là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A .

Dễ thấy C là tâm đường tròn bàng tiếp phải tìm (h. 7) và bán kính của nó là

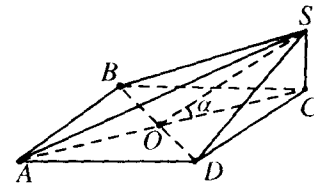
$$CO \text{ và } CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Từ đó } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha = \frac{a^3 \tan \alpha}{4}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 8.** Cho khối chóp $SABCD$ có đáy là hình thang cân, đáy lớn AB bằng 4 lần đáy nhỏ CD , chiều cao của đáy bằng a . Bốn đường cao của bốn mặt bên ứng với đỉnh S có độ dài bằng nhau và bằng b . Tính thể tích của hình chóp.



Hình 6



Hình 7

Lời giải. (h. 8) Gọi H là chân đường cao của chóp thì H phải cách đều các cạnh của đáy và trong trường hợp này ta chứng minh được H nằm trong đáy.

(Xem tiếp trang 11)

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$.

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.
- 2) Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Câu II. (2 điểm)

- 1) Giải phương trình

$$2\cos^2 2x + \cos 2x \cdot \sin 3x + 3\sin^2 2x = 3.$$

- 2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Câu III. (1 điểm)

Cho hàm số $f(x) = A \cdot 3^x + B$. Tìm các số A, B

sao cho $f'(0) = 2$ và $\int_1^2 f(x) dx = 12$.

Câu IV. (1 điểm)

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . S là một điểm bất kì nằm trên đường thẳng At vuông góc với mặt phẳng (P) tại A . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi $SA = 2a$.

Câu V. (1 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

hàm số $f(x) = \frac{\sin x + 2\cos \frac{x}{2}}{\cos x + 2\sin \frac{x}{2}}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $4x + 3y - 12 = 0$.

Gọi B, C lần lượt là giao điểm của d với các trục Ox, Oy . Xác định tọa độ trực tâm của tam giác ABC .

- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, từ điểm $P(2; 3; -5)$ hạ các đường thẳng vuông góc với các mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình mặt phẳng đi qua chân các đường vuông góc đó.

Câu VIIa. (1 điểm)

Chứng minh rằng số phức

$$z = \left(1 + \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)^{24}$$

có phần ảo bằng 0.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 điểm)

- 1) Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $x - 2y - 4 = 0$ và cắt (C) theo một dây cung có độ dài bằng 4.

- 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + y - 2z + 3 = 0$ sao cho (P) cắt d_1, d_2 theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất.

Câu VIIb. (1 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ x + 3y = 2 - \log_4 3. \end{cases}$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Tiếp tuyến (Δ) với (C) tại $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) có PT $y = (6x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1$
Vì (Δ) qua $P(0; 8)$ nên có duy nhất điểm $M(-1; -4)$ thỏa mãn.

Câu II. 1) Từ PT thứ nhất của hệ có

$$12 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2\sqrt{3}.$$

Từ PT thứ hai có $|x||y| \geq 2\sqrt{3}y \Rightarrow |x| \geq 2\sqrt{3}.$

$$\text{Suy ra } |x| = 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = 18.$$

Đáp số. $(x; y) \in \{(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}), (2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})\}.$

2) PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 11 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2^x + x - 11 = 0 (*) \end{cases}$$

Khảo sát hàm $f(x) = 2^x + x - 11$, ta thấy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của PT (*).

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Câu III. Gọi O là tâm tam giác đều ABC thì $SO = h$ là đường cao hình chóp. Giả sử $M = AO \cap BC$. Trong ΔSAM kẻ $MN \perp SA$ thì $MN = m$. Sử dụng hệ thức $SA \cdot MN = SO \cdot AM$,

$$\text{ta tìm được } h = \frac{2am}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a^2 - 4m^2}}.$$

Từ đó

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{a^3 m}{6\sqrt{3a^2 - 4m^2}} \quad \left(\text{ĐK } m < \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

Câu IV. Ta có

$$I = \int_0^{\pi} x \cos x dx + \int_0^{\pi} x \sin^5 x dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = -2 \quad (\text{sử dụng phương pháp tích phân từng phần}).$$

Đối với I_2 , ta đặt $t = \pi - x$, khi đó

$$I_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x)^2 d(-\cos x) = \frac{8\pi}{15}.$$

$$\text{Do đó } I = \frac{8\pi}{15} - 2.$$

Câu V

Từ $a(a+c) = b^2$ có $\sin^2 A + \sin A \sin C = \sin^2 B$

$$\Rightarrow \sin A \sin C = \frac{1}{2} (\cos 2A - \cos 2B) \\ = \sin(A+B) \sin(B-A)$$

$$\Rightarrow \sin A = \sin(B-A) \Rightarrow B = 2A.$$

Tương tự, từ $b(a+b) = c^2 \Rightarrow C = 2B$.

$$\text{Vì } A+B+C = \pi \text{ nên } A = \frac{\pi}{7}, B = \frac{2\pi}{7}, C = \frac{4\pi}{7}.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7}} \\ = \frac{2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin A} \Rightarrow (\text{đpcm}).$$

Câu VIa. 1) Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R = 1$. Vì $d(I; d) = 2$ nên (d) không cắt (C) . Gọi N_0 là hình chiếu vuông góc của I trên (d) . Vì N_0 là giao điểm của đường thẳng (Δ) qua $I(-1; 3)$ vuông góc với (d) và (d') nên tìm được $N_0 \left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5} \right)$.

Giả sử M_1, M_2 là giao điểm của (Δ) và (C) thì $M_1 \left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5} \right); M_2 \left(-\frac{8}{5}; \frac{19}{5} \right)$.

Để MN ngắn nhất thì $M \equiv M_1; N \equiv N_0$ và

$$MN = 1. \text{ Đáp số. } M \left(-\frac{2}{5}; \frac{11}{5} \right); N \left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5} \right).$$

2) **Đáp số.** PT hai mặt cầu cần tìm

$$(S_1): (x-11)^2 + (y-26)^2 + (z+35)^2 = 38^2,$$

$$(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4.$$

Câu VIIa. Để ý

$$(1-x+x^2-x^3)^4 = (1-x)^4(1+x^2)^4$$

$$= \left(\sum_{k=0}^4 (-1)^k C_4^k x^k \right) \left(\sum_{i=0}^4 C_4^i x^{2i} \right).$$

Từ giả thiết có $k+2i=7 (k, i \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$,

suy ra $(k; i) \in \{(1; 3), (3; 2)\}$.

$$\text{Vậy } a_7 = -C_4^1 C_4^3 - C_4^3 C_4^2 = -40.$$

Câu VIb. 1) Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 3)$ bán kính $R=1$. Tìm được $MI=2$. Ta có $MN \leq MI+IN=3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi N là giao điểm của tia đối của tia IM với (C). **Đáp số.** $N\left(-\frac{8}{5}; \frac{19}{5}\right)$.

2) Sử dụng cách giải tương tự như câu VIa.

Tìm được $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$ và $N\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Câu VIIb. Ta có

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - (1+x) + (1+x) - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(3+x)}{\sqrt[3]{(1+3x)^2} + (1+x)\sqrt[3]{1+3x} + (1+x)^2}$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x) + \sqrt{1+2x}} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

VỀ BÀI TOÁN... (Tiếp trang 8)

Suy ra hình thang cân ABCD có đường tròn nội tiếp tâm H là trung điểm đoạn MN với M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD và $MN=a$. Đường tròn đó tiếp xúc với

BC tại E thì $HM=HN=HE=\frac{a}{2}$ là bán kính

đường tròn và $SE=SM=SN=b \left(b > \frac{a}{2}\right) \Rightarrow$

$$SH = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Đặt $CN=x$ thì $BM=4x$, $CE=x$, $BE=4x$. Tam giác HBC vuông ở H nên $HE^2=EB \cdot EC$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \Rightarrow CD = \frac{a}{2}, AB = 2a,$$

suy ra $S_{ABCD} = \frac{5a^2}{4}$. Vậy

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5a^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2} = \frac{5a^2}{24} \sqrt{4b^2 - a^2}. \square$$

BÀI TẬP

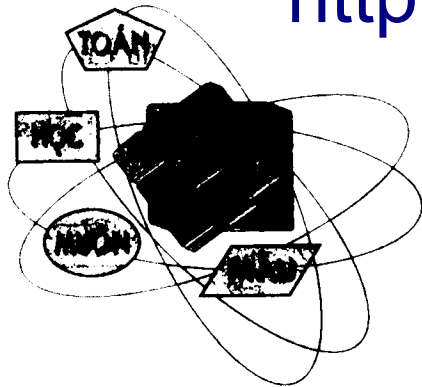
1. Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Giả sử E là trung điểm SC và hai mặt phẳng (ABE), (SCD) vuông góc với nhau. Tính thể tích của khối chóp đó.

2. Hình chóp S.ABC có $SA=a$, SA tạo với đáy một góc α , $\widehat{ABC}=90^\circ$, $\widehat{ACB}=\varphi$. G là trọng tâm $\triangle ABC$. Hai mặt phẳng (SGB), (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích của hình chóp đó.

3. Hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Các cạnh A_1A , A_1B , A_1C nghiêng đều trên đáy một góc α . Tính diện tích xung quanh và thể tích của lăng trụ.

4. Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) có diện tích đáy bằng D, chu vi đáy bằng P. Các mặt bên nghiêng đều trên đáy một góc α . Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy nằm trong đa giác $A_1A_2...A_n$. Tính thể tích của hình chóp đó.

Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ cho quý I năm 2011 và CÁC SẢN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các bưu điện trên cả nước



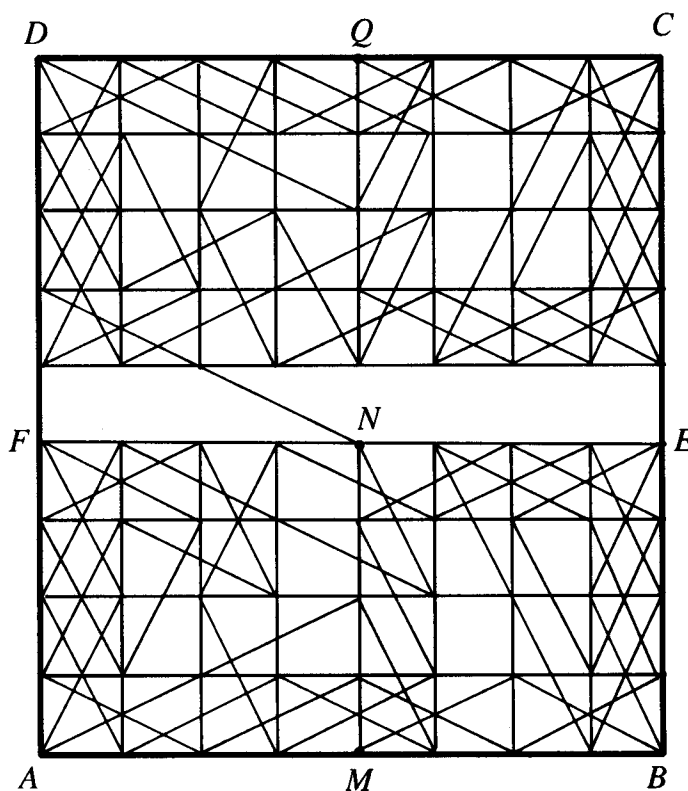
(Đề đăng trên THPT số 393 tháng 3 năm 2010)

1) Có nhiều cách giải, ở hình 1 trình bày một đường đi của quân Mã trên bàn cờ.

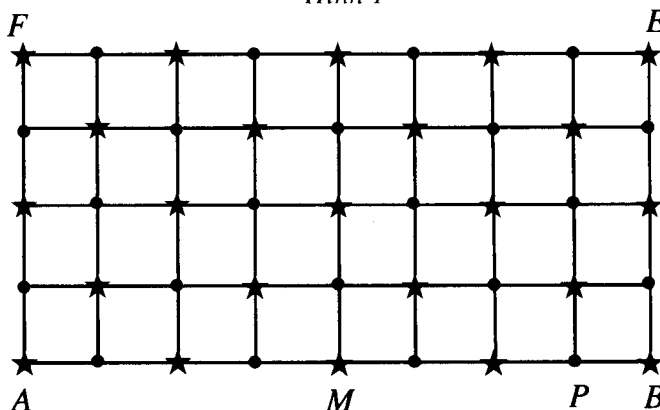
Lấy hình đối xứng qua trục thẳng đứng MQ của hình chữ nhật $ABCD$ ta được cách giải khác

2) Ghi dấu tất cả các giao điểm của hình chữ nhật $ABEF$ bởi điểm Tròn và điểm Sao như ở hình 2. Với cách ghi dấu như thế mỗi bước đi của quân Mã sẽ chuyển từ điểm có hình này sang điểm có hình khác. Lúc đầu quân mã ở điểm P Tròn thì sau số lẻ bước sẽ đứng ở điểm Sao, còn sau số chẵn bước sẽ đứng ở điểm Tròn. Giả sử quân Mã đi đến được tất cả các giao điểm của hình chữ nhật $ABEF$, mỗi giao điểm đứng đúng một lần, thì sau 45 bước đi với điểm xuất phát là điểm Tròn thì trong quá trình đi quân Mã đứng ở 23 điểm Tròn và 22 điểm Sao, điều này không xảy ra vì trái với cách ghi dấu trên bàn cờ có 22 điểm Tròn và 23 điểm Sao.

PHI PHI



Hình 1



Hình 2



TRỊNH ĐÌNH HẢI
(GV THPT chuyên Hạ Long, Quảng Ninh)

Trong chương trình SGK mỗi học sinh lớp 10 đã được giới thiệu tương đối đầy đủ các định nghĩa và công thức biến đổi lượng giác. Từ thực tế giảng dạy, nếu biết khai thác kiến thức này với vai trò là một công cụ giúp học sinh giải toán trong các lĩnh vực quen thuộc: Đại số và Hình học thì trong nhiều tình huống với bản chất "mềm dẻo" của kiến thức, phương pháp lượng giác hóa sẽ đem lại lời giải đẹp, ngắn gọn, sáng sủa và không kém tính bất ngờ và gây được nhiều hứng thú.

I. Lượng giác hóa bài toán đại số

Việc lượng giác hóa được tiến hành thông qua các dấu hiệu đặc biệt của các tham biến trong bài toán và sự nắm bắt các dấu hiệu đó thông qua miền giá trị và hình thức các công thức lượng giác thông dụng. Chẳng hạn:

1. Nếu $|x| \leq k$ với $k > 0$ thì luôn tồn tại

$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $x = k \sin \varphi$; hoặc tồn tại $\varphi \in [0; \pi]$ sao cho $x = k \cos \varphi$.

2. Nếu $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$ ($a, b, c > 0$) thì luôn

tồn tại $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $x = \frac{c}{a} \sin \varphi$;
 $y = \frac{c}{b} \cos \varphi$.

3. Nếu $t \in \mathbb{R}$ thì luôn tồn tại $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $t = \tan \varphi$.

★ **Thí dụ 1.1.** Cho $|x| \geq |y|$. Chứng minh rằng
 $|x+y| + |x-y| = |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}|$ (1)

Lời giải

• Nếu $x = 0$ thì (1) hiển nhiên đúng.

• Nếu $x \neq 0$, chia hai vế của (1) cho $|x|$, ta có

$$\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \left|1 - \frac{y}{x}\right| = \left|1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| + \left|1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| \quad (2)$$

Do $|x| \geq |y|$ nên $\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1$. Đặt $\frac{y}{x} = \cos \varphi$, $\varphi \in [0; \pi]$,

thì (2) có dạng

$$|1 + \cos \varphi| + |1 - \cos \varphi| = |1 + \sin \varphi| + |1 - \sin \varphi|$$

(luôn đúng). (Vì mỗi vế đều bằng 2). □

★ **Thí dụ 1.2.** Tìm $x \in (0, 6; 1)$ là nghiệm của phương trình

$$6x + 8\sqrt{1-x^2} = 5(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}).$$

Lời giải. Điều kiện $|x| \leq 1$. Đặt $x = \cos \varphi$,
với $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 6\cos \varphi + 8\sin \varphi &= 5(\sqrt{1+\cos \varphi} + \sqrt{1-\cos \varphi}) \\ \Leftrightarrow 10(0,6\cos \varphi + 0,8\sin \varphi) &= 5\sqrt{2}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \cos(\varphi_0 - \varphi) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned}$$

$$(\cos \varphi_0 = 0,6; \sin \varphi_0 = 0,8).$$

$$\text{Do } \cos \frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \varphi_0}{2}} = \sqrt{0,8} > \cos \frac{\pi}{4},$$

suy ra $\frac{\varphi_0}{2} < \frac{\pi}{4}$. Từ đó

$$0 < \varphi_0 - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 - \varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \text{ Vậy}$$

$$\begin{aligned} x = \cos \varphi &= \cos\left(2\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\varphi_0 \\ &= 2\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = 0,96. \quad \square \end{aligned}$$

★ **Thí dụ 1.3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = -\frac{x^2 - (x-4y)^2}{x^2 + 4y^2}.$$

Lời giải. • Với $y = 0$ thì $P = 0$.

• Với $y \neq 0$, chia cả tử và mẫu cho $4y^2$, rồi đặt

$$\frac{x}{2y} = \tan \varphi, \text{ với } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}. \text{ Khi đó}$$

$$P = -\frac{\tan^2 \varphi - (\tan \varphi - 2)^2}{\tan^2 \varphi + 1}$$

$$= 2(\cos 2\varphi - \sin 2\varphi) + 2 = 2\sqrt{2} \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

Từ đó $2 - 2\sqrt{2} \leq P \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

Ta có khi $\varphi = -\frac{\pi}{8}$ thì $P = 2 - 2\sqrt{2}$ và khi

$$\varphi = \frac{3\pi}{8} \text{ thì } P = 2 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \min P = 2 - 2\sqrt{2} \text{ khi } \frac{x}{2y} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}},$$

$$\max P = 2 + 2\sqrt{2} \text{ khi } \frac{x}{2y} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}. \square$$

★ **Thí dụ 1.4.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{3x-y}{x-3y} = x^2 \\ \frac{3y-z}{y-3z} = y^2 \\ \frac{3z-x}{z-3x} = z^2. \end{cases}$$

Lời giải. Rõ ràng $xyz \neq 0$, ta có

$$\begin{cases} y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \\ z = \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \\ x = \frac{3z-z^3}{1-3z^2}. \end{cases}$$

Đặt $x = \tan \varphi$ với $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\varphi \neq 0$ thì

$$y = \tan 3\varphi; \quad z = \tan 9\varphi; \quad x = \tan 27\varphi.$$

Suy ra $\tan \varphi = \tan 27\varphi$. Do đó $27\varphi = \varphi + k\pi$,

$$(k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \varphi = \frac{k\pi}{26}. \text{ Do } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ và } \varphi \neq 0$$

nên $k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12\}$.

Ta có nghiệm của hệ đã cho là

$$(x; y; z) = \left(\tan \frac{k\pi}{26}; \tan \frac{3k\pi}{26}; \tan \frac{9k\pi}{26} \right).$$

★ **Thí dụ 1.5.** Các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực

thỏa mãn $-2 \leq a_i \leq 2; \forall i = 1, 2, \dots, n$ và $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

Chứng minh rằng $|a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3| \leq 2n$.

Lời giải. Với mỗi $k = 1, 2, \dots, n$ ta đặt $a_k = 2 \cos b_k$.

Theo công thức $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, ta có $2\cos 3b_k = a_k^3 - 3a_k; k = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Như vậy có } 2 \sum_{k=1}^n \cos 3b_k = \sum_{k=1}^n a_k^3.$$

Mặt khác do $|\cos a| \leq 1, \forall a$, nên $2 \sum_{k=1}^n \cos 3b_k \leq 2n$.

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

II. Lượng giác hóa bài toán Hình học

Để lượng giác hóa các bài toán hình học, ta cần đến các hệ thức lượng cơ bản trong tam giác đó là Định lý sin, Định lý cosin, các công thức tính độ dài và các công thức tính diện tích. Các công thức này đem lại cho ta mối quan hệ hay các ràng buộc giữa các yếu tố cơ bản trong tam giác. Đặc biệt là các hằng đẳng thức lượng giác của các góc trong tam giác.

★ **Thí dụ 2.1.** Trong tam giác ABC có $r; r_a; r_b; r_c$ theo thứ tự là độ dài bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C ; a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng nếu $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$ thì tam giác ABC vuông.

Lời giải. Với tư tưởng lượng giác hóa, sử dụng nhóm công thức diện tích ta có

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ (kết quả quen thuộc),}$$

$$\text{suy ra } \frac{r}{p} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

$$\text{Rõ ràng } \frac{r_a}{p} = \tan \frac{A}{2}; \quad \frac{r_b}{p} = \tan \frac{B}{2}; \quad \frac{r_c}{p} = \tan \frac{C}{2}$$

(p là nửa chu vi của tam giác ABC).

Khi đó giả thiết bài toán thực chất là

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 2,$$

$$\text{hay } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 2$$

$$= 1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Kết quả này tương đương với

$$\left(1 - \tan \frac{A}{2}\right) \left(1 - \tan \frac{B}{2}\right) \left(1 - \tan \frac{C}{2}\right) = 0.$$

Từ đây suy ra tam giác ABC hoặc vuông tại A hoặc vuông tại B hoặc vuông tại C. $\square$

★Thí dụ 2.2. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c và diện tích là S. Chứng minh rằng

$$1) ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S.$$

$$2) 2(ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S.$$

Lời giải. 1) Để lượng giác hóa, ta chia hai vế cho 2S và vận dụng công thức $2S = ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$, khi đó điều phải chứng minh

$$\text{trở thành } \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$$

BĐT này hiển nhiên đúng, vì

$$(\sin A + \sin B + \sin C) \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq 9$$

$$\text{và } 0 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2) Chia hai vế cho 4S và kết hợp với các kết quả

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S};$$

$$2S = ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B.$$

Khi đó điều cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq \cot A + \cot B + \cot C + \sqrt{3}.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \cot A \right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \cot B \right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \cot C \right) \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Điều này luôn đúng, bởi vì

$$\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)^2$$

$$\geq 3 \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \right) = 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$, tức là tam giác ABC đều. $\square$

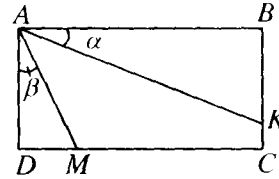
★Thí dụ 2.3. Lấy trên cạnh BC của hình chữ nhật ABCD điểm K sao cho $BK = 4KC$, và lấy trên cạnh CD điểm M sao cho $CM = 4MD$. Với tỉ số $\frac{AB}{BC}$ bằng bao nhiêu thì số đo góc KAM đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải. (hình vẽ).

Giả sử $AB:BC = 1:x$

và $\alpha = \widehat{BAK}$; $\beta = \widehat{MAD}$,

ta cần xác định x để $\alpha + \beta$ nhỏ nhất.



$$\text{Rõ ràng là } \tan \alpha = \frac{4x}{5} \text{ và } \tan \beta = \frac{1}{5x}.$$

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4x}{5} + \frac{1}{5x}}{1 - \frac{4}{25}}.$$

$$\text{Mà } \frac{4x}{5} + \frac{1}{5x} \geq 2\sqrt{\frac{4x}{5} \cdot \frac{1}{5x}} = \frac{4}{5} \text{ nên } \tan(\alpha + \beta) \geq \frac{20}{21}.$$

Dấu đẳng thức đạt được khi $x = \frac{1}{2}$. Do đó với

tỉ số $\frac{AB}{BC} = 2$ thì góc KAM có số đo lớn nhất. $\square$

BÀI TẬP

$$1. \text{ Giải phương trình } \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

2. Giải các hệ phương trình

$$a) \begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{4} \\ y\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \quad b) \begin{cases} 1-y^2 = |x| \\ 1-x^2 = |y| \end{cases}.$$

3. Chứng minh các bất đẳng thức sau

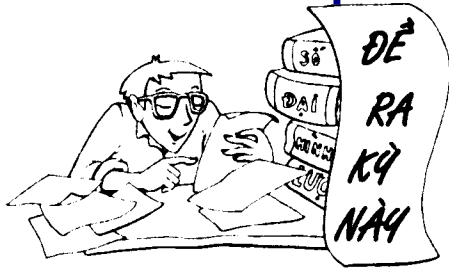
$$a) |1 + ab| \leq \sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{a^2 + 1}.$$

$$b) |a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}| \leq 1.$$

4. Tìm các bộ ba số (x; y; z) đồng thời thỏa mãn

$$3 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 4 \left(y + \frac{1}{y} \right) = 5 \left(z + \frac{1}{z} \right); \quad xy + yz + zx = 1.$$

(Xem tiếp trang 29)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/402. (Lớp 6). So sánh tổng

$$\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.5.7} + \frac{1}{3.8.10} + \dots + \frac{1}{1000.2999.3001}$$

với $\frac{5}{24}$.

TRẦN ĐỨC BIÊN

(Nam Tân, Trục Nội, Trục Ninh, Nam Định)

Bài T2/402. (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Giả sử D là điểm nằm bên trong tam giác sao cho $\triangle ABD$ cân và $\widehat{ADB} = 150^\circ$. Trên nửa mặt phẳng không chứa D có bờ là đường thẳng AC lấy điểm E sao cho tam giác ACE đều. Chứng minh rằng ba điểm B, D, E thẳng hàng.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/402. Tìm các giá trị nguyên dương m để phương trình

$$x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$$

có nghiệm nguyên dương.

MAI THỊ THƯ HƯỜNG

(SV lớp Y1H, K36, ĐHY Thái Bình)

Bài T4/402. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AH, BK, CL . Chứng minh rằng $AK.BL.CH = AL.BH.CK = HK.KL.LH$.

MINH TRẦN

(Phòng GD&ĐT Hương Thủy, Thừa Thiên-Huế)

Bài T5/402. Giải phương trình

$$\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2\sqrt{2}x(x+3)}{1+x^2} = 5 - \sqrt{2}.$$

BÙI ĐÌNH THÂN

(GV THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình)

Bài T6/402. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^5 - a^2 + 3ab + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^5 - b^2 + 3bc + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^5 - c^2 + 3ca + 6}} \leq 1.$$

LÊ VĂN QUÝ

(GV THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi)

Bài T7/402. Giải phương trình

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2^2 \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \dots + 2^{2010} \sin \left(x + \frac{2010\pi}{3} \right) = 0.$$

PHAN MẠNH HÀ

(GV THPT Nam Yên Thành, Nghệ An)

Bài T8/402. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. M là một điểm thuộc mặt phẳng chứa tam giác ABC . Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác OAB, OBC, OCA . Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$. Chứng minh bất đẳng thức

$$MG_1^2 + MG_2^2 + MG_3^2 \geq \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

HOÀNG SỸ LUYỆN

(GV THPT - DTNT Quỳnh Châu, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/402. Cho tam giác nhọn ABC , đường cao AD . Điểm M thuộc đoạn AD . Các đường thẳng BM, CM theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F . DE, DF theo thứ tự cắt lại các đường tròn đường kính AB, AC tại K, L . Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của các đoạn thẳng EF, KL đi qua điểm A .

NGUYỄN MINH HÀ

(GV ĐHSPT Hà Nội)

Bài T10/402. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho $ab + 1, bc + 1, ca + 1$ đều là số chính phương.

NGUYỄN ĐÌNH THÀNH CÔNG

(GV THPT TX. Quảng Trị)

Bài T11/402. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho phương trình

$$x + 3\sqrt{x} + \sqrt{4-x} + 3\sqrt{4-x} = a + b + c$$

có nghiệm và biểu thức $P = ab + 2ac + 3bc$ đạt giá trị lớn nhất.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/402. Tìm tất cả các số thực dương a sao cho tồn tại số thực dương k và hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + k \cdot |x-y|^a,$$

với mọi số thực x, y .

HÀN NGỌC ĐỨC

(Trung tâm CNTT EVNIT, Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/402. Một con lắc lò xo gồm một vật nhỏ khối lượng $0,02\text{kg}$ và lò xo có độ cứng $k = 1\text{N/m}$. Vật nhỏ được đặt trên giá đỡ cố định nằm ngang dọc theo trục lò xo. Hệ số ma sát trượt giữa giá đỡ và vật nhỏ là $0,1$. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị nén 10cm rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

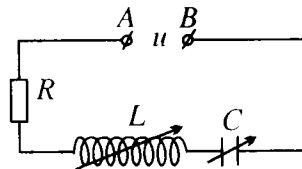
Tốc độ lớn nhất của vật nhỏ đạt được trong quá trình dao động là bao nhiêu?

NGUYỄN QUANG HẬU

(Hà Nội) sưu tầm

Bài L2/402. Đặt vào hai đầu mạch điện A và B một hiệu điện thế xoay chiều u có tần số góc ω biến thiên. Điện dung C của tụ điện và hệ số tự cảm L của ống dây có thể biến đổi, điện trở $R = 20\Omega$.

1) Khảo sát sự biến thiên của cường độ dòng điện hiệu dụng I theo ω (khi L và C có giá trị xác định).



2) Điều chỉnh L và C ta thấy khi $L = \frac{1}{\pi}H$ và

$C = \frac{1}{\pi} \cdot 10^{-3}F$ thì I trong mạch cực đại. Xác

định ω và $I_{\max}$. Biết hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu mạch điện là $U = 120V$.

3) Cho f biến thiên từ 20Hz đến 80Hz . Hãy xác định I theo cận dưới và trên của f , với L và C đã cho như câu 2).

NGUYỄN VĂN THUẬN

(GV ĐHSPT Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/402. (For 6th grade). Compare the sum

$$\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.5.7} + \frac{1}{3.8.10} + \dots + \frac{1}{1000.2999.3001}$$

with $\frac{5}{24}$.

T2/402. (For 7th grade). Let ABC be an isosceles right triangle, with right angle at vertex A . Let D be a point inside the triangle such that $\triangle ABD$ is an isosceles triangle and $\widehat{ADB} = 150^\circ$. Let ACE be an equilateral triangle so that points D and E are on the different side of the half-plane AC . Prove that B, D, E are collinear.

T3/402. Find all positive integer numbers m such that the following equation

$$x^2 - mxy + y^2 + 1 = 0$$

has positive integer roots.

T4/402. Let ABC be an acute triangle and let AH, BK, CL be its three altitudes. Prove that $AK \cdot BL \cdot CH = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH$.

T5/402. Solve the equation

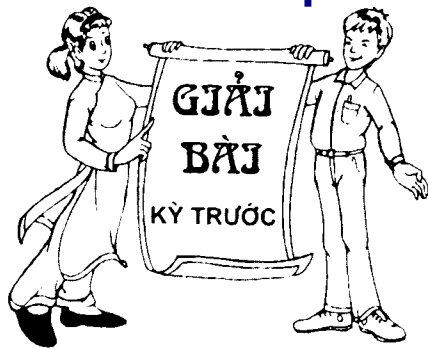
$$\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2\sqrt{2}x(x+3)}{1+x^2} = 5 - \sqrt{2}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/402. Let a, b, c be three positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{\sqrt{a^5 - a^2 + 3ab + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^5 - b^2 + 3bc + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^5 - c^2 + 3ca + 6}} \leq 1.$$

(Xem tiếp trang 27)



VIẾT HẢI

★ Bài T2/398. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$. Chứng minh rằng $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$.

Lời giải. Hạ AF và CG cùng vuông góc với BD , CH vuông góc với AE , ta có

$\triangle ABF = \triangle CAH$
(cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow AF = CH$.

$\triangle ADF = \triangle CDG$
(cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow AF = CG$,

suy ra $CH = CG \Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{CEG}$.

Vì vậy $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$ (tính chất góc ngoài của tam giác).

hay $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{EBA} + \widehat{ECA}$ (1)

Mặt khác, $\widehat{EBA} + \widehat{EBC} = \widehat{ECB} + \widehat{ECA}$ (2)

Lấy (1) trừ (2) theo từng vế, ta được

$\widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EBA} - \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{ECB}$.

Vậy $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$ (đpcm). $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn sử dụng kiến thức liên quan đến tam giác đồng dạng và tứ giác nội tiếp, không thuộc chương trình lớp 7.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Trương Thị Hoài Thu, 6A, THCS Yên Lạc;
Nghệ An: Nguyễn Hoàng Thảo Hiền, Hồ Hữu Hải, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Quảng Ngãi:** Trần Thị Mỹ Ninh, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Nguyễn Thủy Phương, Tống Thành Nguyên, 7A, THCS Hành Phước, Nguyễn Thị Kiều Duyên, 7A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành; **Bình Định:** Nguyễn Trọng Khiêm, 6A1, THCS Võ Hán, Tây Sơn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T1/398. Cho số nguyên dương n sao cho 2^n và 5^n có chữ số đầu tiên giống nhau. Chứng tỏ rằng số tạo bởi hai số 2^n và 5^n viết liền nhau có $n + 1$ chữ số, trong đó có ít nhất hai chữ số 3.

Lời giải. Giả sử khi viết trong hệ thập phân số 2^n có k chữ số, số 5^n có h chữ số và chữ số đầu tiên bên trái của hai số đó đều là a ($k \geq 1$, $h \geq 2$, $n \geq 2$). Vì 2^n và 5^n đều không chia hết cho 10 nên ta có

$$a \cdot 10^{k-1} < 2^n < (a+1) \cdot 10^{k-1};$$

$$a \cdot 10^{h-1} < 5^n < (a+1) \cdot 10^{h-1}.$$

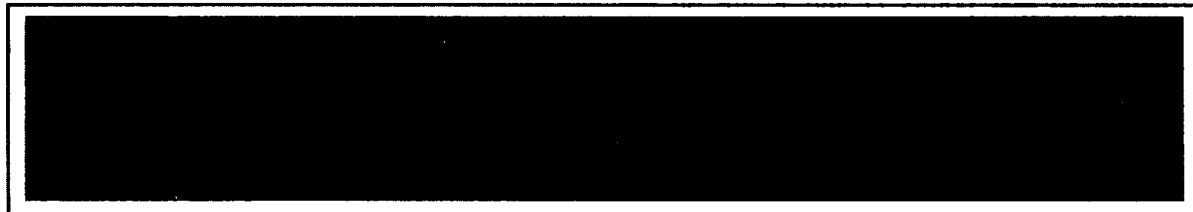
Từ đó $a^2 \cdot 10^{k+h-2} < 10^n < (a+1)^2 \cdot 10^{k+h-2}$ (*)

Vì $1 \leq a < 10$ nên từ (*) có $10^{k+h-2} < 10^n < 10^{k+h}$.

Suy ra $n = k + h - 1$ hay $k + h = n + 1$, do đó số tạo bởi hai số 2^n và 5^n viết liền nhau có $n + 1$ chữ số. Thay $k + h = n + 1$ vào (*) ta thu được $a^2 < 10 < (a+1)^2$. Từ đó chỉ có thể xảy ra $a = 3$. Chẳng hạn với $n = 5$ thì $2^5 = 32$ và $5^5 = 3125$. Như vậy khi viết hai số 2^n và 5^n liền nhau thì phải có ít nhất hai chữ số 3. $\square$

➤ **Nhận xét.** Một số bạn chưa chỉ ra sự tồn tại chữ số $a = 3$ ứng với ít nhất một chữ số n . Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Phạm Minh Đức, Nguyễn Phương Hoa, Nguyễn Minh Hoàng, 6A4, THCS Đống Đa, **Nghệ An:**



★ Bài T3/398. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x(x+2y)^3 - y(y+2x)^3 = 27 \quad (1)$$

Lời giải. Biến đổi phương trình (1) ta có

$$\begin{aligned} x(x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3) \\ - y(y^3 + 6xy^2 + 12x^2y + 8x^3) &= 27 \\ \Leftrightarrow x^4 - y^4 + 6xy(x^2 - y^2) - 8xy(x^2 - y^2) &= 27 \\ \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 6xy - 8xy) &= 27 \\ \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^3 &= 27 \quad (2) \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x+y > 1$, kết hợp với (2) suy ra $0 < (x-y)^3 < 27$ và $(x-y)^3 \in U(27)$. Do đó

$$\begin{cases} (x-y)^3 = 1 \\ x+y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = 13 \end{cases}$$

Vậy nghiệm nguyên dương của PT (1) là (14; 13). □

► **Nhận xét.** Nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Vinh Phúc: Nguyễn Minh Tuấn, Đại Thị Hoàng Yến, Nguyễn Thị Hằng, 8A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Nguyễn Hữu Dũng, 9A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Phạm Đức Hiếu, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Nguyễn Minh Hoàng, Nguyễn Thị Bích Ngọc, Phạm Minh Đức, Nguyễn Nhật Minh, Nguyễn Phương Hoa, 6A4, THCS Đống Đa; **Nghệ An:** Phạm Thị Thảo Nguyên, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa:** Lê Thị Khanh, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Hà Tĩnh:** Phạm Hoàng, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/398. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt{12\sqrt{2}-15} + 2\sqrt{3\sqrt{4}-3}$$

Lời giải. Cách 1. Ta có $(\sqrt[3]{2}+1).P$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(12\sqrt{2}-15)(\sqrt{2}+1)^2} + 2\sqrt{3(\sqrt{4}-1)(\sqrt{2}+1)^2} \\ &= \sqrt{(12\sqrt{2}-15)(\sqrt{4}+2\sqrt{2}+1)} \\ &\quad + 2\sqrt{3(\sqrt{4}-1)(\sqrt{16}+\sqrt{4}+1)} \\ &= \sqrt{9+9\sqrt{4}-18\sqrt{2}+2\sqrt{3.3}} = 3\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 6 \\ &= 3(\sqrt{2}-1)+6=3(\sqrt{2}+1). \text{ Vậy } P = 3. \end{aligned}$$

Cách 2. Đặt $\sqrt[3]{2}=a$ thì $a^2=\sqrt[3]{4}$; $a^3=2$; $a^4=2a$.

Khi đó $P = \sqrt{12a-15} + 2\sqrt{3a^2-3}$.

Suy ra $P^2 = 12a^2 + 12a - 27 + 12\sqrt{(4a-5)(a^2-1)}$.

Nhận thấy

$$\begin{aligned} (4a-5)(a^2-1) &= 4a^3 - 5a^2 - 4a + 5 \\ &= a^4 + a^2 + 9 + 2a^3 - 6a^2 - 6a = (a^2 + a - 3)^2 \end{aligned}$$

và $a^2 + a - 3 < 0$ nên $\sqrt{(4a-5)(a^2-1)} = 3 - a - a^2$.

Vậy $P^2 = 12a^2 + 12a - 27 + 12(3 - a - a^2) = 9$.

Do $P > 0$ nên $P = 3$. □

► **Nhận xét.** Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn có lời giải ngắn gọn và chặt chẽ là:

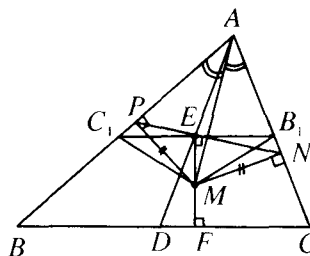
Nghệ An: Hồ Hữu Hải, Hoàng Hồ Khánh Linh, 8A, Nguyễn Thị Phương Thảo, Phạm Thị Thảo Nguyên, Vũ Đức Hạnh, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nguyễn Tất Khánh, Nguyễn Văn Tiến, 9B, THCS Lý Nhật Quang; **Thanh Hóa:** Nguyễn Chiến Công, 9A, THCS Tổ Như, Hoàng Lộc, Hoàng Hóa; **Bắc Ninh:** Lê Thị Hải Linh, 8C, THCS Yên Phong; **Bắc Giang:** Giáp Thị Dương, 9A, THCS Tân Trung, Tân Yên; **Hà Tĩnh:** Phạm Hoàng, Nguyễn Thị Khánh Linh, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Hà Nội:** Dương Tú Anh, 9C, THCS Đa Tốn, Gia Lâm.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ Bài T5/398. Cho tam giác ABC với $\widehat{ACB} = 70^\circ$,

$\widehat{ABC} = 50^\circ$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC và AD. Dựng EF vuông góc với BC (F thuộc BC). M là một điểm trên đoạn EF; N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các cạnh AC và AB. Biết rằng ba điểm N, E, P thẳng hàng. Hãy tìm số đo góc MAB.

Lời giải. Gọi B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AC và AB. Do E là trung điểm của AD nên ba điểm B_1, E, C_1 thẳng hàng và E là trung điểm của B_1C_1 .



Theo giả thiết $EF \perp BC$ mà $B_1C_1 \parallel BC$ nên $EF \perp B_1C_1$, hay $ME \perp B_1C_1$.

Tam giác MB_1C_1 có ME là đường trung tuyến đồng thời là đường cao ứng với cạnh B_1C_1 nên nó là tam giác cân tại M. Dẫn đến

$$\widehat{MC_1E} = \widehat{MB_1E} \quad (1)$$

Mặt khác $\widehat{MNB_1} = \widehat{MEB_1} = 90^\circ$, nên bốn điểm M, N, B_1, E cùng nằm trên một đường tròn, suy ra

$$\widehat{MB_1E} = \widehat{MNE} \quad (2)$$

Lại vì $\widehat{MEC_1} = \widehat{MPC_1} = 90^\circ$, nên bốn điểm M, E, P, C_1 cùng nằm trên một đường tròn, dẫn tới

$$\widehat{MC_1E} = \widehat{MPE} \quad (3)$$

TOÁN HỌC

Số 402 (12-2010)

Tuổi trẻ 19

Từ (1), (2), (3), kết hợp với giả thiết ba điểm N, E, P thẳng hàng, ta được tam giác MNP cân tại M , suy ra $MN = MP$. Do đó M nằm trên đường phân giác trong của góc BAC . Với giả thiết $\widehat{ACB} = 70^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$, chúng ta tìm được

$$\widehat{MAB} = \frac{180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})}{2} = 30^\circ. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Để đi đến kết quả bài toán, điều mấu chốt là chỉ ra điểm M cách đều hai cạnh AC và AB của tam giác ABC ($MN = MP$). Nghĩa là M nằm trên đường phân giác của góc BAC .

2) Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Những bạn sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: Đỗ Quang Long, 9A, THCS Yên Phong;
Nghe An: Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, Nguyễn Thị Huyền, 7A2, THCS Thuận Trung, Trung Sơn, Lê Hồng Đức, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T6/398.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2},$$

trong đó x, y là hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$.

Lời giải. Cách 1 (Theo đa số các bạn). Sử dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ số không âm

$$\text{ta có } (1+2x^2)\left(1+\frac{2}{9}\right) \geq \left(1+\frac{2}{3}x\right)^2.$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{1+2x^2} \geq \frac{3\sqrt{11}}{11}(3+2x).$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Tương tự có } (40+9y^2)(40+4) \geq (40+6y)^2.$$

$$\text{Suy ra } 2\sqrt{40+9y^2} \geq \frac{\sqrt{11}}{11}(40+6y).$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } y = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có } T \geq \frac{\sqrt{11}}{11}(49+6(x+y)) = 5\sqrt{11}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}.$$

Cách 2. (Theo bạn Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy, Thái Bình).

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giả sử $\vec{u}(a; b; c), \vec{v}(d; e; f)$. Khi đó $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$,

$$\text{hay là } \sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{d^2+e^2+f^2}$$

$$\geq \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2} \quad (*)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c}.$$

Sử dụng BĐT (*) ta có

$$T = \sqrt{9+9x^2+9x^2} + \sqrt{144+16+36y^2}$$

$$\geq \sqrt{225 + (3x+4)^2 + (3x+6y)^2}$$

$$\geq \sqrt{225 + \frac{(6x+6y+4)^2}{2}} = 5\sqrt{11} \text{ (do } x+y=1).$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $5\sqrt{11}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\frac{3x}{4} = \frac{3x}{6y} = \frac{1}{4}; \quad 3x+4 = 3x+6y \text{ và } x+y=1.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết đều cho lời giải đúng. Bằng lời giải theo cách 2, các bạn đã chỉ ra điều kiện hai số không âm là không cần thiết. Một số bạn suy từ giả thiết $y = 1 - x$, từ đó khảo sát sự biến thiên của $T(x)$ để được tìm giá trị nhỏ nhất.

2) Một số bạn viết T dưới dạng

$$T = \sqrt{(a^2+b^2)(1+2x^2)} + \sqrt{(c^2+d^2)(40+9y^2)}$$

$$\geq a + \sqrt{2bx} + 2\sqrt{10c} + 3dy,$$

trong đó a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện $a^2 + b^2 = 9, c^2 + d^2 = 4$, từ đó lí giải cho việc chọn “điểm rơi” trong cách 1.

3) Ngoài bạn Hoàng, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Đỗ Quang Long, 9A, THCS Yên Phong;
Phú Thọ: Phạm Minh Tuấn, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Xuân Việt, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Phạm Đức Vương, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Hà Nội:** Phạm Huy Hoàng, 10A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** Nguyễn Việt Trinh, 8C, THCS 14-10, Tiền Hải; **Nam Định:** Trần Quang Huy, 10A1, THPT Hải Hậu; **Nghe An:** Trần Trung Hiếu, Lê Hoàng Hiệp, 10A1, THPT Thái Hoà; **Kiên Giang:** Nguyễn Bích Y Linh, 10T1, Nguyễn Ngọc Hà, Trương Hữu Vạn Lộc, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Rạch Giá; **Quảng Trị:** Võ Thị Hồng Hạnh, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Ong Thế Phương, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T7/398. Cho tam giác nhọn ABC .

Chứng minh rằng

$$\frac{\cos A}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\cos B}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\cos C}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \geq 2.$$

Lời giải. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\cos A \cos \frac{A}{2} + \cos B \cos \frac{B}{2} + \cos C \cos \frac{C}{2} \geq 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (1)$$

Vì $\cos \frac{A}{2} > 0$; $\cos \frac{B-C}{2} \leq 1$ nên

$$\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \geq \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2}(\sin B + \sin C).$$

Do $\cos A > 0$ suy ra

$$\cos A \cos \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \cos A (\sin B + \sin C).$$

Tương tự

$$\cos B \cos \frac{B}{2} \geq \frac{1}{2} \cos B (\sin C + \sin A);$$

$$\cos C \cos \frac{C}{2} \geq \frac{1}{2} \cos C (\sin A + \sin B).$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} \text{VT}(1) &\geq \frac{1}{2}(\cos A \sin B + \cos B \sin A + \cos A \sin C \\ &\quad + \cos C \sin A + \cos B \sin C + \cos C \sin B) \\ &\geq \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(B+C) + \sin(C+A)). \end{aligned}$$

$$\text{Hay VT}(1) \geq \frac{1}{2}(\sin A + \sin B + \sin C) \quad (2)$$

Ta có hệ thức quen thuộc trong tam giác

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} \cos A \cos \frac{A}{2} + \cos B \cos \frac{B}{2} + \cos C \cos \frac{C}{2} \\ \geq 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

BĐT (1) được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

➤ **Nhận xét.** 1) Đây là bài toán tương đối khó nên có ít bạn tham gia gửi lời giải. Một số bạn đã giải bài toán bằng phương pháp đại số hoá, chẳng hạn như đặt

$$x = \tan \frac{A}{2}; y = \tan \frac{B}{2}; z = \tan \frac{C}{2} \text{ hoặc biến đổi bất đẳng}$$

thức phải chứng minh theo a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác... Tuy nhiên lời giải này dài và phức tạp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Phùng Thị Hương, 11A2, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường; **Phú Thọ:** Đỗ Quốc Tiến, 11A1, THPT Thanh Thủy; **Hải Dương:** Phạm Đức Vương, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Hà Tĩnh:** Trần Võ Hoàng, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** Võ Văn Cường, 11B1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** Trần Hoàng Ân, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T8/398. Cho tam giác ABC . Một đường thẳng cắt các đường thẳng BC, CA và AB theo thứ tự tại ba điểm A', B' và C' . Gọi A'', B'' và C'' cũng theo thứ tự là điểm đối xứng của A' qua A , của B' qua B và của C' qua C . Chứng minh rằng diện tích tam giác $A''B''C''$ bằng 6 lần diện tích tam giác ABC .

Lời giải. Ta chứng minh bài toán tổng quát sau đây

Cho tam giác ABC . Trên đường thẳng BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A', B', C' . Trên đường thẳng AA', BB', CC' cũng lần lượt lấy các điểm A'', B'', C'' sao cho

$$\overline{AA'} = k \overline{AA''}; \overline{BB'} = k \overline{BB''}; \overline{CC'} = k \overline{CC''}$$

(k là số thực khác 0). Khi đó

$$\begin{aligned} &k^2 [\overline{A''B''}, \overline{A''C''}] \\ &= [\overline{A'B'}, \overline{A'C'}] + (k-1)(k-2) [\overline{AB}, \overline{AC}] \quad (1) \end{aligned}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} k \overline{A''B''} &= k(\overline{A'A} + \overline{AB} + \overline{BB''}) = k \overline{AB} + \overline{BB''} - \overline{AA'} \\ &= k \overline{AB} + \overline{A'B'} - \overline{AB} = \overline{A'B'} + (k-1) \overline{AB}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $k \overline{A''C''} = \overline{A'C'} + (k-1) \overline{AC}$.

$$\begin{aligned} &\text{Từ đó } k^2 [\overline{A''B''}, \overline{A''C''}] \\ &= [\overline{A'B'} + (k-1) \overline{AB}, \overline{A'C'} + (k-1) \overline{AC}] \\ &= [\overline{A'B'}, \overline{A'C'}] + (k-1) ([\overline{AB}, \overline{A'C'}] + [\overline{A'B'}, \overline{AC}]) \\ &\quad + (k-1)^2 [\overline{AB}, \overline{AC}] \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & [\overline{AB}, \overline{A'C'}] + [\overline{A'B'}, \overline{AC}] \\ &= [\overline{AB}, \overline{A'B}] + [\overline{A'C}, \overline{AC}] \\ &= \frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}} [\overline{AB}, \overline{BC}] + \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}} [\overline{BC}, \overline{AC}] \\ &= \frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}} [\overline{AB}, \overline{AC}] - \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}} [\overline{AB}, \overline{AC}] \\ &= -[\overline{AB}, \overline{AC}]. \end{aligned}$$

Thay vào (2) ta được công thức (1).

Áp dụng (1) vào bài toán cụ thể đã cho, khi đó $k = -1$; A', B', C' thẳng hàng nên

$$[\overline{A'B'}, \overline{A'C'}] = 0, \text{ suy ra}$$

$$[\overline{A'B''}, \overline{A'C''}] = 6[\overline{AB}, \overline{AC}] \Rightarrow S_{A'B''C''} = 6S_{ABC}. \quad \square$$

► **Nhận xét.** 1) Từ công thức (1), ta có thể chứng minh hoặc sáng tạo nhiều bài toán khác bằng cách chú ý các tính chất của tích có hướng, mối liên hệ giữa tích có hướng và diện tích tam giác. Chẳng hạn

Bài 1. Một đường thẳng cắt các cạnh BC, CA, AB (hoặc cạnh kéo dài) của tam giác ABC theo thứ tự tại ba điểm A', B', C' . Gọi A'', B'', C'' theo thứ tự là các điểm thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' sao cho

$$\overline{AA''} = k\overline{AA'}, \overline{BB''} = k\overline{BB'}, \overline{CC''} = k\overline{CC'}.$$

Xác định số thực k để ba điểm A'', B'', C'' cùng nằm trên một đường thẳng. (ĐS. $k = 1$ hoặc $k = \frac{1}{2}$. Khi $k = \frac{1}{2}$, ta có một tính chất của tứ giác toàn phần, đường thẳng $A''B''C''$ là đường thẳng Gauss).

Bài 2. Cho P là một điểm nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Đường thẳng PA_i cắt cạnh đối diện tại B_i . Gọi C_i là trung điểm của A_iB_i và D_i là trung điểm của PB_i . Hãy so sánh diện tích của hai tam giác $C_1C_2C_3$ và $D_1D_2D_3$. (VMO 1980). (Hướng dẫn: Áp dụng công thức (1) với $k = 2$ và dùng phép vị tự).

2) Nếu định hướng cho mặt phẳng và sử dụng diện tích đại số của tam giác định hướng, ta có thể chứng minh công thức (1) gọn hơn một chút và cũng có thể sử dụng công thức (1) để đi đến nhiều bài toán thú vị.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghe An: Phạm Nhật Anh, 11A₁, THPT chuyên Đại học Vinh, TP. Vinh. **Hà Nam:** Nguyễn Chí Linh, 10A₁, THPT chuyên Biên Hòa. **Quảng Ninh:** Phạm Trung Kiên, 11T, THPT chuyên Hạ Long. **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Nhung, Trần Võ Hoàng, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Nam Định:** Nguyễn Quang Nhân, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Hải Dương:**

Phạm Đức Vương, 10A₁, THPT Thanh Miện 1. **Phú Thọ:** Nguyễn Xuân Thanh, 11A₁, THPT Thanh Ba. **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 11A₁, THPT Phù Cát II.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T9/398.** Người ta tô màu tất cả các số nguyên dương bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng của hai số khác màu là một số được tô màu đen và có vô hạn các số được tô màu trắng. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô màu đen là q . Chứng minh rằng q là số nguyên tố.

Lời giải. (Theo bạn Lê Văn Tú, 10A₁, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

• Giả sử số 1 được tô màu trắng: Nếu q được tô màu đen thì $q+1$ cũng được tô màu đen, suy ra $q+2 = (q+1)+1$ được tô màu đen. Cứ tiếp tục như vậy thì mọi số $n > q$ đều được tô màu đen. Thành thử chỉ có một số hữu hạn số được tô màu trắng. Điều này trái giả thiết. Vậy số 1 phải được tô màu đen.

• Nếu $q = 2$ hoặc $q = 3$ thì q là số nguyên tố (đpcm). Giả sử $q > 3$. Khi đó $q-2 \in \mathbb{N}^*$, $q-2 < q$ do đó $q-2$ được tô màu trắng $\Rightarrow (q-2)+1 = q-1$ được tô màu đen. Nhưng $q-1 < q$, do đó ta có mâu thuẫn. $\square$

► **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên có một số lời giải dài dòng và cũng có một số lời giải lại quá vắn tắt.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hải Dương: Nguyễn Ngọc Thiện, 10A₁, THPT Thanh Miện I; **Nam Định:** Phùng Mạnh Linh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** Nguyễn Anh Thắng, 12A, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghe An:** Đào Khánh Chi, 10A₂, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nguyễn Thế Tiến, 10A₁, THPT chuyên ĐH Vinh; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, Trần Hoàng An, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 12A₁, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/398.** Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f^2(m) + 2f^2(n)) = m^2 + 2n^2,$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Giả sử $f(n)$ là hàm số thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Nếu $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$, $f(m_1) = f(m_2)$, lấy $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý ta có

$$\begin{aligned} m_1^2 + 2n^2 &= f(f^2(m_1) + 2f^2(n)) \\ &= f(f^2(m_2) + 2f^2(n)) = m_2^2 + 2n^2 \end{aligned}$$

suy ra $m_1 = m_2$. Tức là $f(n)$ là hàm số đơn ánh.

• Với $m = n = 1$, kí hiệu $a = f(1)$, ta nhận được $f(3a^2) = 3$.

Ta lại có

$$\begin{aligned} (5a^2)^2 + 2(a^2)^2 &= 27a^4 = (3a^2)^2 + 2(3a^2)^2 \\ \Rightarrow f(f^2(5a^2) + 2f^2(a^2)) &= 27a^4 \\ &= f(f^2(3a^2) + 2f^2(3a^2)) = f(27) \\ \Rightarrow f^2(5a^2) + 2f^2(a^2) &= 27. \end{aligned}$$

Vì chỉ có hai cặp các số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 2y^2 = 27$ là $(x; y) = (3; 3)$ và $(x; y) = (5; 1)$ và do $f(5a^2) \neq f(a^2)$ ta suy ra $f(5a^2) = 5$, $f(a^2) = 1$.

Tương tự

$$\begin{aligned} (5a^2)^2 + 2(2a^2)^2 &= 33a^4 = (a^2)^2 + 2(4a^2)^2 \\ \Rightarrow f^2(5a^2) + 2f^2(2a^2) &= f^2(a^2) + 2f^2(4a^2) \\ \Rightarrow 2(f^2(4a^2) - f^2(2a^2)) &= f^2(5a^2) - f^2(a^2) \\ &= 5^2 - 1 = 24 \\ \Rightarrow f^2(4a^2) - f^2(2a^2) &= 12. \end{aligned}$$

Cũng như vậy, vì phương trình $x^2 - y^2 = 12$
 $\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 12 \Leftrightarrow x - y = 2, x + y = 6$
 $\Leftrightarrow x = 4, y = 2$. Suy ra $f(4a^2) = 4$, $f(2a^2) = 2$.

• Với số nguyên dương m tùy ý, vì
 $(m + 4)^2 + 2(m + 1)^2 = m^2 + 2(m + 3)^2$
 nên $f^2((m + 4)a^2) + 2f^2((m + 1)a^2)$
 $= f^2(ma^2) + 2f^2((m + 3)a^2)$.

Do đó, nếu ta đã kết luận được $f(ka^2) = k$ với $k = 1, 2, \dots, m + 3$ (ở trên chúng ta đã chứng minh với $k = 1, 2, 3, 4, 5$) thì ta suy ra khẳng định đó cũng đúng với $k = m + 4$.

Bởi vậy, bằng phương pháp quy nạp ta có $f(ka^2) = k$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$f(a^3) = f(a \cdot a^2) = a = f(1) \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1.$$

Như vậy $f(k) = k$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và rõ ràng hàm số này thỏa mãn điều kiện của bài toán. $\square$

► **Nhận xét.** Đây là bài toán tìm hàm số thuộc loại khó, nhưng hay. Kiểu bài toán này đã từng có trong các tạp chí, đề thi của các nước. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Hải Phòng: Phan Đức Minh, 12A15, THPT Thái Phiên; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Hiền, Lê Văn Trọng, 11A2, THPT Đội Cấn; **Hà Nam:** Nguyễn Chí Linh, 10A1, THPT chuyên Biên Hòa; **Thanh Hóa:** Nguyễn Anh Thắng, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Cao Quốc Việt, 11A2, Khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Bình Định:** Trần Đoàn Tấn, Lê Anh Tú, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** Khổng Hữu Hiệp, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T11/398.** Xét dãy số thực (x_n) ($n \geq 1$) được xác định bởi $x_1 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) và

$$x_{n+1} = 2x_n^3 - 5x_n^2 + 4x_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t$. Khi đó dãy đã cho có dạng $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 10x + 4 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1) \text{ và} \\ f(x) - x &= x(x - 1)(2x - 3). \end{aligned}$$

Từ đó $f(x) = x$ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = \frac{3}{2}$ và khi $x < 0$

thì $f(x) < x$, khi $x > \frac{3}{2}$ thì $f(x) > x$.

Bằng cách lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có khi $0 < x < \frac{3}{2}$ thì $0 < f(x) < \frac{3}{2}$.

Từ các nhận xét trên, ta thu được

(i) Với $x \in (-\infty; 0)$ luôn luôn có $f(x) \in (-\infty; 0)$.

(ii) Với $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ luôn luôn có $f(x) \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

(iii) Với $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ luôn luôn có $f(x) \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Ta xét các trường hợp cụ thể của a .

Trường hợp 1. $a < 0$. Theo (i) thì mọi $x_n < 0$ và $x_{n+1} - x_n = x_n(x_n - 1)(2x_n - 3) < 0$, do đó (x_n) là dãy giảm nên có giới hạn $\lim x_n = b$. Khi

đó $b \in \left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$ và $b < a$, mâu thuẫn vì $a < 0$.

Suy ra dãy (x_n) không có giới hạn hữu hạn ứng với $a < 0$.

Trường hợp 2. $a = 0$. Khi đó (x_n) là dãy hằng và $\lim x_n = 0$.

Trường hợp 3. $a > \frac{3}{2}$. Từ (ii) suy ra

$x_n \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ và $x_{n+1} - x_n > 0$ nên (x_n) là dãy tăng. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn của dãy là b thì $b \in \left\{0; 1; \frac{3}{2}\right\}$ và $b > a$, điều này là vô lí.

Trường hợp 4. $a = \frac{3}{2}$ Khi đó (x_n) là dãy hằng và $\lim x_n = \frac{3}{2}$.

Trường hợp 5. $0 < a < \frac{3}{2}$. Từ (ii) suy ra mọi

$x_n \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ và $|x_{n+1} - 1| = (x_n - 1)^2 |2x_n - 1| < |x_n - 1|$
(do $x_n \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ nên $|(x_n - 1)(2x_n - 1)| < 1$).

Bằng phương pháp quy nạp toán học, từ $|x_{n+1} - 1| < |x_n - 1|$ ta thu được $|x_{n+1} - 1| < |a - 1|$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do $0 < a < \frac{3}{2}$ nên $|a - 1| < \frac{1}{2}$.

Suy ra (x_n) là dãy có giới hạn là 1.

Kết luận. Dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $a \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Khi $a = 0$ thì $\lim x_n = 0$.

Khi $0 < a \leq 1$ thì $\lim x_n = 1$.

Khi $1 < a \leq \frac{3}{2}$ thì $\lim x_n = \frac{3}{2}$. $\square$

► **Nhận xét.** Bài này là sự tương tự như đề thi học sinh giỏi Quốc gia năm 2005 đối với dãy số (x_n) được cho như sau

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 3x^3 - 7x_n^2 + 5x_n. \end{cases}$$

Có rất nhiều bạn gửi lời giải (trên 50 bài) đều giải đúng theo cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★ **Bài T12/398.** Cho tứ diện $ABCD$. Tìm tập hợp điểm P nằm trong tứ diện sao cho $xd_A + yd_B + zd_C + td_D = c$, với x, y, z, t, c là các hằng số dương cho trước và d_A, d_B, d_C, d_D lần lượt là các khoảng cách từ P đến các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng của tứ diện.

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho điểm O , vectơ $\vec{u}$ và số k . Tập hợp các điểm P sao cho $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = k$ là một mặt phẳng.

Chứng minh bổ đề.

Lấy điểm P_0 sao cho $\overrightarrow{OP_0} // \vec{u}$ và $\overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{u} = k$ (dễ dàng kiểm tra rằng P_0 tồn tại và duy nhất). Gọi (α) là mặt phẳng đi qua P_0 và vuông góc với $\vec{u}$. Ta thấy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = k &\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{u} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow P \in (\alpha). \end{aligned}$$

Trở lại giải Bài toán T12.

Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp của tứ diện $ABCD$. Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của I trên các mặt phẳng $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$.

Với mỗi điểm P nằm trong tứ diện, gọi P_A, P_B, P_C, P_D theo thứ tự là hình chiếu của P trên mặt phẳng $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$.

Gọi (α) mặt phẳng gồm các điểm P thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{PI}(x\overrightarrow{IX} + y\overrightarrow{IY} + z\overrightarrow{IZ} + t\overrightarrow{IT}) = r(k - (x + y + z + t)r)$$

(xem Bổ đề trên).

Gọi (H) là giao của (α) và miền trong của tứ diện $ABCD$.

Chú ý rằng các vectơ $\overrightarrow{IX}, \overrightarrow{IY}, \overrightarrow{IZ}, \overrightarrow{IT}$ theo thứ tự cùng hướng với các vectơ $\overrightarrow{PP_A}, \overrightarrow{PP_B}, \overrightarrow{PP_C}, \overrightarrow{PP_D}$, theo định lí hình chiếu, ta thấy

$$\begin{aligned}
 & xd_A + yd_B + zd_C + td_D \\
 &= xPP_A + yPP_B + zPP_C + tPP_D \\
 &= \frac{1}{r} (xIX \cdot PP_A + yIY \cdot PP_B + zIZ \cdot PP_C + tIT \cdot PP_D) \\
 &= \frac{1}{r} (xIX \cdot \overrightarrow{PP_A} + yIY \cdot \overrightarrow{PP_B} + zIZ \cdot \overrightarrow{PP_C} + tIT \cdot \overrightarrow{PP_D}) \\
 &= \frac{1}{r} (xIX \cdot (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IP_A}) + yIY \cdot (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IP_B}) \\
 &\quad + zIZ \cdot (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IP_C}) + tIT \cdot (\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IP_D})) \\
 &= \frac{1}{r} (\overrightarrow{PI} (xIX + yIY + zIZ + tIT) + (x + y + z + t)r^2).
 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$xd_A + yd_B + zd_C + td_D = k$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IP} (xIX + yIY + zIZ + tIT) = r((x + y + z + t)r - k)$$

$$\Leftrightarrow P \in (H). \quad \square$$

► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải tốt là:

Phú Yên: Võ Văn Huy, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

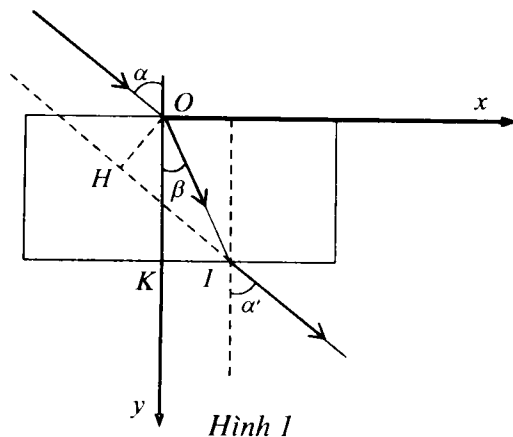
NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/398.** Một tia sáng chiếu lên bản mặt song song có bề dày $a = 2\text{cm}$. Góc tới $\alpha = 30^\circ$. Xác định góc ló và độ dịch chuyển ngang của tia sáng sau khi qua bản mặt nếu

a) Chiết suất của bản mặt không đổi $n = 1,5$.

b) Chiết suất thay đổi theo hướng pháp tuyến theo quy luật $n = 1 + \frac{y}{a}$.

Lời giải



Hình 1

a) Áp dụng định luật khúc xạ tại điểm O và điểm I, ta có

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad (1)$$

$$n \sin \beta = \sin \alpha' \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\alpha' = \alpha$, tức là tia ló ra song song với tia tới.

Cũng vẫn từ (1), ta có

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{1,5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta \approx 19^\circ 47'.$$

Từ hình 1 ta thấy độ dịch chuyển ngang của tia sáng sau khi qua bản mặt là

$$OH = OI \sin(\alpha - \beta), \text{ với } OI = \frac{OK}{\cos \beta} = \frac{a}{\cos \beta}.$$

$$\text{Do đó } OH = a \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}. \text{ Thay số vào biểu}$$

thức này ta tính được $OH \approx 0,38\text{cm}$.

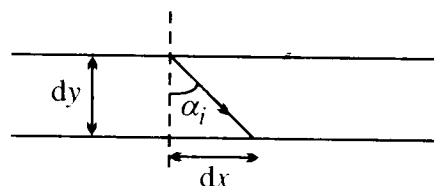
b) Chia bản mặt song song thành k lớp mỏng song song với trục Ox (k đủ lớn) sao cho mỗi lớp có bề dày rất nhỏ dy , chiết suất trong mỗi lớp xem như không thay đổi và lần lượt bằng $n_1, n_2, \dots, n_k$. Gọi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ lần lượt là góc khúc xạ trong các lớp thứ 1, 2, ..., k và α' là góc ló ra khỏi bản mặt. Để thấy góc khúc xạ ở lớp này bằng góc tới ở lớp kế tiếp. Theo định luật khúc xạ ta có

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots \\
 &= n_k \sin \alpha_k = \sin \alpha' \quad (3)
 \end{aligned}$$

Ta thấy góc ló ra vẫn bằng góc tới ban đầu, tức là tia ló ra khỏi bản mặt vẫn song song với tia tới ban đầu.

Xét một lớp thứ i bất kì có tọa độ y , có chiết suất n_i ($n_i = 1 + \frac{y}{a}$). Góc khúc xạ tại lớp này bằng α_i . Theo (3) ta có

$$\sin \alpha_i = \frac{\sin \alpha}{n_i} \text{ hay } \sin \alpha_i = \frac{a \sin \alpha}{a + y}.$$



Hình 2

Hình chiếu dọc trục Ox của tia sáng trong lớp đang xét là (h. 2)

$$dx = \tan \alpha_i dy = \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha_i} - 1}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a+y}{a \sin \alpha}\right)^2 - 1}}$$

$$\text{hay } dx = a \sin \alpha \frac{d\left(\frac{a+y}{a \sin \alpha}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a+y}{a \sin \alpha}\right)^2 - 1}}$$

Hình chiếu dọc trục Ox của tia sáng đi trong cả bản mặt là

$$KI = x_I = \int_0^a a \sin \alpha \frac{d\left(\frac{a+y}{a \sin \alpha}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a+y}{a \sin \alpha}\right)^2 - 1}}$$

$$= a \sin \alpha \left[\ln \left(\frac{a+y}{a \sin \alpha} + \sqrt{\left(\frac{a+y}{a \sin \alpha}\right)^2 - 1} \right) \right]_0^a$$

Thay số ta tính được $KI \approx 0,75\text{cm}$.

Tương tự như phần a , kí hiệu I là điểm tia sáng ra khỏi bản, β là góc lập bởi OI và Oy , ta có độ dịch chuyển ngang của tia sáng là $OH = a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$, trong đó góc β tính được

$$\text{từ } \tan \beta = \frac{IK}{a} = \frac{0,75}{2} = \frac{3}{8}$$

Thay số ta tính được $OH \approx 0,35\text{cm}$. $\square$

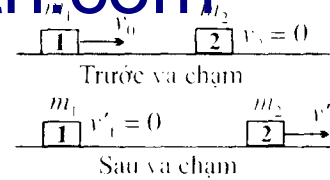
► **Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Văn Mạnh, Mai Văn Tùng, 12A1, THPT Hậu Lộc 4.

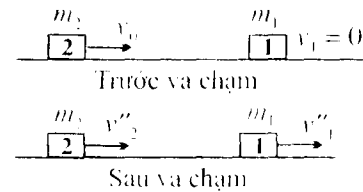
NGUYỄN XUÂN QUANG

★ **Bài 1.2/398.** Hình vẽ cho biết kết quả của hai thí nghiệm với hai trái banh của môn khúc côn cầu (hockey). Mặt băng nằm ngang và nhẵn. Các phép đo cho thấy $v'_2 = v''_2$. Hãy tìm tỉ số hai khối lượng.

Thí nghiệm 1



Thí nghiệm 2



Lời giải. Va chạm giữa hai vật là va chạm đàn hồi. Chọn chiều dương là chiều của vectơ $\vec{v}_0$. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và động năng, ta có:

• Đối với thí nghiệm 1

$$m_1 v_0 = m_2 v'_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \quad (2)$$

• Đối với thí nghiệm 2

$$m_2 v_0 = m_2 v''_2 + m_1 v''_1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{1}{2} m_2 v''^2_2 + \frac{1}{2} m_1 v''^2_1 \quad (4)$$

Chú ý rằng $v'_2 = v''_2$, nên từ (1) và (3) suy ra

$$v''_1 = \frac{(m_2 - m_1) v_0}{m_1} \quad (5)$$

Cũng như vậy, từ (2) và (4) suy ra:

$$v''^2_1 = \frac{(m_2 - m_1) v_0^2}{m_1} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta tìm được

$$m_2 = 2m_1 \text{ hay } \frac{m_2}{m_1} = 2. \quad \square$$

► **Nhận xét:** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Bắc Ninh:** Vũ Thị Hình, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** Lê Nguyễn Hải Anh, 11 Lí, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 11 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Nghe An:** Phan Nguyễn Thanh Sơn, 11A1, THPT Diễn Châu 3, Nguyễn Văn Tiến, 11T1, THPT Anh Sơn I; **Cần Thơ:** Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Vào các ngày 27-28/11/2010, Hội Toán học Hà Nội, Trường Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội và Sở GD&ĐT Nam Định đã đồng tổ chức Hội thảo khoa học Các chuyên đề chuyên Toán bồi dưỡng học sinh giỏi THPT tại Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định do GS. TSKH. NGND Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội đồng Khoa học trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội kiêm Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội chủ trì. Hội thảo khoa học nhằm tổng kết các hoạt động chuyên môn của Semina liên trường – viện – hội và thông báo các kết quả mới của các thầy giáo, cô giáo về các chuyên đề bồi dưỡng Toán phổ thông.

Hội nghị hân hạnh được đón tiếp nhiều nhà khoa học, nhà giáo lão thành, các chuyên gia Toán học báo cáo tại các phiên toàn thể và các chuyên gia giáo dục, các cán bộ chỉ đạo chuyên môn từ các Sở GD&ĐT, các giáo viên trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi bộ môn Toán báo cáo tại các phiên chuyên đề.

Đặc biệt Hội nghị được đón tiếp những nhà khoa học của quê hương Nam Định như: GS. TSKH **Trần Văn Nhung**, Tổng Thư kí Hội đồng chức danh Giáo sư Nhà nước; TS. **Vũ Đình Chuẩn**, Vụ trưởng Vụ GDTH Bộ GD&ĐT, NGND **Đặng Huy Nhuận**, PGS. TS **Hoàng Chí Thành**, trường ĐHKHTN,...

Nhân dịp này, Hội nghị đã tổ chức cho các đại biểu giao lưu văn nghệ với Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong; thăm quan một vài danh thắng của Nam Định: Đền Trần, Phủ Dầy, Khu sinh thái Núi Ngâm. Với sự chuẩn bị chu đáo của Ban Tổ chức và Ban Chương trình, của Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Sở GD&ĐT Nam Định, Hội thảo đã thành công tốt đẹp và để lại ấn tượng sâu đậm với các đại biểu tham dự. Hi vọng rằng, phong trào giáo dục bồi dưỡng học sinh giỏi của Tỉnh Nam Định sẽ có bước phát triển mạnh mẽ và vững chắc hơn nữa.

PV

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T7/402. Solve the equation

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2^2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \dots + 2^{2010}\sin\left(x + \frac{2010\pi}{3}\right) = 0.$$

T8/402. Let $OABC$ be a tetrahedron where OA, OB, OC are pairwise orthogonal. Let M be a point on the plane containing the base ABC . Let G_1, G_2, G_3 be respectively the centroids of triangles OAB, OBC and OCA . Put $OA = a, OB = b, OC = c$. Prove the inequality

$$MG_1^2 + MG_2^2 + MG_3^2 \geq \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

When does equality occur?

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/402. Let ABC be an acute triangle with altitude AD . M is a point on AD . The lines BM, CM meets AC, AB at E, F respectively. DE, DF intersects with the circles whose

diameters AB, AC at K, L respectively. Prove that the line connecting the midpoints of EF, KL goes through A .

T10/402. Prove that there exist infinitely many triples of positive integers (a, b, c) such that $ab+1, bc+1, ca+1$ are all square numbers.

T11/402. Find all positive integers a, b, c so that the equation

$$x + 3\sqrt[4]{x} + \sqrt{4-x} + 3\sqrt[4]{4-x} = a + b + c$$

has solution and the expression $P = ab + 2ac + 3bc$ is greatest possible.

T12/402. Find all positive real numbers a such that there exists a positive real number k and a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + k \cdot |x-y|^a,$$

for all real numbers x, y .

Translated by LE MINH HA

NGUYỄN HẢI CHÂU - VŨ ANH CƯỜNG
(Vụ Giáo dục Trung học, Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Trên thế giới, việc phát hiện và bồi dưỡng tài năng trẻ đã được chú trọng, quan tâm từ rất sớm. Thời nhà Đường, Trung Quốc (năm 618 trước Công nguyên) những trẻ em có tài năng đặc biệt được mời đến sân rồng để học tập và được giáo dục bằng những hình thức đặc biệt. Ở châu Âu, trong suốt thời kì Phục hưng, những người có tài năng về nghệ thuật, kiến trúc, văn học... đều được nhà nước và các tổ chức cá nhân bảo trợ, giúp đỡ. Ở Hoa Kỳ, năm 1920 đã có 2/3 các thành phố lớn thực hiện chương trình giáo dục học sinh giỏi, phát triển tài năng. Ở Châu Á, trong giáo dục phổ thông của Hàn Quốc có chương trình đặc biệt dành cho học sinh giỏi; chương trình đào tạo học sinh năng khiếu của Singapore được triển khai lần đầu tiên vào năm 1984, khởi đầu với 2 trung tâm chính và 2 trung tâm nhỏ, đến tháng 3/2004 đã mở rộng ra thành 9 trung tâm với cam kết sẽ bồi dưỡng và tạo điều kiện cho học sinh phát triển tối đa năng khiếu cá nhân, năng lực lãnh đạo, đóng góp vào sự phát triển của xã hội... Có thể nói, những nước có nền giáo dục phát triển đều rất coi trọng vấn đề đào tạo học sinh năng khiếu trong chiến lược phát triển giáo dục phổ thông.

Ở nước ta, với quan điểm "*Hiện tài là nguyên khí quốc gia*", Đảng và Nhà nước rất mong muốn nền giáo dục nước nhà phải chăm lo, khuyến khích những học sinh có năng khiếu, say mê trong học tập đào tạo lực lượng khoa học kỹ thuật tài năng cho đất nước. Cách đây 45 năm (14/9/1965) Thủ tướng Chính phủ Phạm Văn Đồng đã ra quyết định thành lập "Lớp Toán đặc biệt" đặt tại Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội do các nhà khoa học hàng đầu đất nước trực tiếp giảng dạy. Đây là mốc đầu tiên của hệ thống các khối trường THPT chuyên của các tỉnh, thành phố và một số trường đại học.

Đến nay, số học sinh THPT chuyên chiếm khoảng 1,74% số học sinh THPT với tỉ

lệ đổ vào đại học rất cao và góp phần chủ yếu vào thành tích trong các Kỳ thi Olympic Quốc gia, Khu vực, Quốc tế. Việc hòa nhập với giáo dục phổ thông tiên tiến trên thế giới đã được một số trường THPT chuyên đi đầu: Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng đã liên kết với hơn 10 trường đại học của các nước Úc, Anh, Singapore, New Zealand, Pháp, đã gửi hơn 80 học sinh đi đào tạo tại nước ngoài theo chương trình hợp tác giữa thành phố Đà Nẵng và một số trường đại học ở Nhật Bản, Anh, Úc, Pháp, Hoa Kỳ; Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam hợp tác với các trường của Pháp, Hàn Quốc, Trung Quốc, đã đưa học sinh sang học theo chương trình học bổng tại các nước Anh, Hoa Kỳ, Singapore,

Về định hướng phát triển hệ thống trường THPT chuyên, tại Thông báo số 242-TB/TW ngày 15/4/2009 của Bộ Chính trị về tiếp tục thực hiện Nghị quyết Trung ương 2 khóa II và phương hướng phát triển giáo dục và đào tạo đến năm 2020 đã nêu: "*Rà soát và bổ sung cơ chế, chính sách, tổ chức phát hiện, bồi dưỡng nhân tài ngay từ bậc học phổ thông, đặc biệt ở bậc đại học. Khuyến khích phát triển nâng cao chất lượng các trường THPT năng khiếu, các lớp đào tạo cử nhân khoa học tài năng*". Tháng 6/2010 Thủ tướng Chính phủ đã phê duyệt **Đề án Phát triển hệ thống trường THPT chuyên giai đoạn 2010–2020** với mục tiêu: *Xây dựng và phát triển các trường THPT chuyên thành một hệ thống cơ sở giáo dục trung học có chất lượng giáo dục cao, đạt chuẩn quốc gia, có trang thiết bị dạy học đồng bộ, hiện đại đảm bảo thực hiện nhiệm vụ phát hiện những học sinh có tư chất thông minh, đạt kết quả xuất sắc trong học tập để bồi dưỡng thành những người có lòng yêu đất nước, tinh thần tự hào, tự tôn dân tộc; có nền tảng kiến thức vững vàng; có phương pháp tự học, tự nghiên cứu và sáng tạo; có sức khỏe tốt để tạo nguồn tiếp tục đào tạo thành nhân*

tài, đáp ứng yêu cầu phát triển đất nước trong thời kì công nghiệp hoá, hiện đại hoá, hội nhập quốc tế.

Đề án tập trung vào các giải pháp cụ thể, cần thiết nhằm đảm bảo hệ thống trường THPT chuyên phát triển bền vững, chất lượng giáo dục cao. Giải pháp ưu tiên tập trung vào phát triển đội ngũ cán bộ quản lí, giáo viên đảm bảo đủ về số lượng, hợp lí về cơ cấu, đạt mức cao của chuẩn nghề nghiệp; nâng tỉ lệ giáo viên, cán bộ quản lí có trình độ tiến sĩ, thạc sĩ đồng thời với việc nâng cao trình độ chuyên môn, nghiệp vụ, ngoại ngữ, tin học và khả năng nghiên cứu khoa học sư phạm ứng dụng; mở các khóa đào tạo trình độ thạc sĩ, bồi dưỡng về quản lí giáo dục, giảng dạy tiếng Anh, giảng dạy các môn Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Tin học bằng tiếng Anh và các khóa bồi dưỡng nâng cao trình độ ngoại ngữ, tin học, năng lực phát triển chương trình, tài liệu dạy học; xây dựng chính sách ưu tiên đối với giáo viên trực tiếp giảng dạy các môn chuyên, giáo viên có học sinh đoạt giải trong các kì thi Quốc gia, Quốc tế; xây dựng cơ chế thu hút giáo viên chất lượng cao tham gia giảng dạy trong các trường THPT chuyên, đặc biệt là giáo viên nước ngoài tham gia giảng dạy ngoại ngữ.

Chương trình giáo dục trong các trường THPT chuyên được đổi mới, xây dựng theo hướng hiện đại, tiếp cận với trình độ tiên tiến của khu vực và thế giới; nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện, chú trọng giáo dục thể chất và bồi dưỡng nhân cách người học; tạo điều kiện để học sinh phát triển toàn diện, chuyên sâu một lĩnh vực, giỏi tin học, ngoại ngữ; phát triển năng lực tư duy độc lập, sáng tạo, kĩ năng thực hành, tăng khả năng hoạt động thực tiễn. Đồng thời nghiên cứu thí điểm áp dụng một số chương trình dạy học tiên tiến của thế giới tại một số trường THPT chuyên và từng bước áp dụng việc giảng dạy môn Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Tin học bằng tiếng Anh trong các trường THPT chuyên.

Có sự liên kết giữa việc phát hiện, bồi dưỡng học sinh năng khiếu ở trường THPT chuyên với đào tạo tại bậc đại học, đặc biệt với các trường đại học trong nước có lớp cử nhân năng, kĩ sư chất lượng cao, đào tạo theo chương trình

tiên tiến và các cơ sở giáo dục đại học tiên tiến nước ngoài.

Tăng cường cơ sở vật chất, thiết bị dạy học cho các trường THPT chuyên từ các nguồn lực khác nhau đảm bảo trường đạt chuẩn quốc gia mức cao có trang thiết bị dạy học hiện đại phục vụ cho việc giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi.

Với xu thế hội nhập với thế giới, những giải pháp trên là những định hướng cơ bản cho việc đào tạo tài năng trẻ ở giáo dục phổ thông trong chiến lược phát triển nguồn nhân lực chất lượng cao cho đất nước, tạo điều kiện cho giáo dục phát triển, chất lượng nguồn nhân lực của quốc gia được nâng cao, đảm bảo cho đất nước phát triển nhanh chóng bền vững. Hệ thống trường THPT chuyên là cơ sở giáo dục quan trọng, chủ yếu cho việc thực hiện định hướng trên.

LUỢNG GIÁC HÓA... (Tiếp trang 15)

5. Chứng minh với mọi cặp số thực $(x; y)$ ta có

$$x^2 + (x - y)^2 \geq 4(x^2 + y^2) \sin^2 \frac{\pi}{10}.$$

6. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 40^\circ$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi D và E là các điểm tương ứng nằm trên hai cạnh AC và AB sao cho $\widehat{CBD} = 40^\circ$; $\widehat{BCE} = 70^\circ$. Giả sử BD cắt CE tại F . Chứng minh rằng AF vuông góc với BC .

7. Cho tam giác ABC không đều. Gọi I , O lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC .

8. Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa mãn $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm vòng tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Chứng minh rằng H, O, D thẳng hàng.

9. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC còn r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác $A'B'C'$ (A', B', C' lần lượt là chân các đường vuông góc của A, B, C lên các cạnh BC, CA, AB). Chứng minh rằng $r_1 \leq 1 - \frac{(1+r)^2}{3}$.



PGS. TS Trần Kiều

TRẦN ĐÌNH CHÂU (Bộ Giáo dục và Đào tạo)

ĐẶNG THU THỦY (Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam)

PGS.TS Trần Kiều là Thầy của chúng tôi và chúng tôi cũng theo nghiệp Thầy, dạy Toán, nghiên cứu Toán học nhà trường và một số lĩnh vực khác của khoa học giáo dục. Trong chúng tôi luôn đọng lại ấn tượng mạnh mẽ về Thầy, đó là sự sắc sảo, logic trong tư duy, có nhiều ý tưởng mới

cùng với cách diễn đạt rất thuyết phục. Và ở Thầy, chất của người làm toán và chất của nhà khoa học giáo dục hình như khó tách rời.

Năm nay tròn 70 tuổi, Thầy vẫn thường xuyên được mời tham gia và đóng góp tích cực trong nhiều hội thảo, hội nghị; trong các đề tài, dự án lớn về phát triển giáo dục. Có lẽ là do công việc được giao và niềm đam mê của Thầy mà cho đến tận bây giờ, người ta vẫn biết đến Thầy trong nhiều mảng nghiên cứu khoa học giáo dục, đặc biệt là giáo dục phổ thông với các vấn đề về mục tiêu, chương trình, phương pháp, đánh giá giáo dục. Thầy là một trong những người tham gia chỉ đạo việc đổi mới chương trình, sách giáo khoa phổ thông, từng là Phó chủ nhiệm chương trình nghiên cứu cấp Nhà nước KX05 về con người, văn hóa và nguồn nhân lực, chủ nhiệm của hàng chục đề tài cấp Nhà nước, cấp Bộ về những lĩnh vực của khoa học giáo dục.

Thầy đã từng nói với chúng tôi là không bao giờ rời bỏ Toán học cũng như Toán học trong nhà trường, vì vậy Thầy là tác giả của một số cuốn sách giáo khoa Toán, là chủ biên của một số tài liệu về đổi mới phương pháp dạy học, đánh giá trong trường phổ thông và vận dụng tư duy toán học vào các lĩnh vực quản lý giáo dục. Đến nay, Thầy đã hướng dẫn cho 13 nghiên cứu sinh bảo vệ thành công Luận án Tiến sĩ và 12 Thạc sĩ. Tiếp bước theo Thầy, các học trò của Thầy dù ở cương vị nào cũng là những người có tinh thần trách nhiệm cao, cố gắng để xuất và góp phần triển khai thành công các ý tưởng đóng góp cho ngành Giáo dục.

Một nét riêng, đặc biệt của Thầy là luôn luôn thể hiện sự mạnh mẽ và đầy tâm huyết qua các nhận xét, đánh giá và nhiều ý tưởng góp phần tạo nên những thay đổi tích cực cho nền giáo dục nước nhà mà trước hết là giáo dục phổ thông. Chẳng hạn, tại Hội

thảo "Phát triển giáo dục phổ thông Việt Nam" gần đây, PGS. TS Trần Kiều đã làm không khí của cuộc hội thảo sôi động hẳn lên bằng những đánh giá về mô hình nhà trường phổ thông Việt Nam hiện nay: "Nhà trường phổ thông Việt Nam về cơ bản vẫn là một nhà trường truyền thống với hoạt động cơ bản là thấy truyền thụ và trò tiếp nhận những điều đã được quy định sẵn trong sách giáo khoa. Với mục đích cuối cùng là hiểu được bài, làm được bài tập, bài kiểm tra, ứng phó được với các kì thi. Khuôn mẫu này được một số nước mô tả là "mô hình 2 - 4 - 8": 2 là muốn nói tới giới hạn trong hai bìa của cuốn sách giáo khoa, 4 là muốn ám chỉ bốn bức tường quây kín lớp học và 8 là liên tưởng tới lối làm việc trong tám giờ hành chính, còn thiếu linh hoạt". Thầy cũng đã đưa ra một số định hướng để góp phần xây dựng mô hình nhà trường phổ thông trong tương lai.

Tham luận khoa học, nhất là tham luận về khoa học giáo dục nhiều khi tạo nên các cuộc tranh luận để phân định đúng sai, nhưng điều mà những người nghiên cứu coi trọng nhiều hơn là cái tâm và cái tầm của tác giả. Các tham luận khoa học của PGS. TS Trần Kiều theo chúng tôi đều luôn thể hiện được hai yếu tố này.

Trải qua nhiều công việc khác nhau nhưng luôn gắn bó với ngành Giáo dục, từ giảng viên Toán ở trường Đại học, đến chuyên gia về phương pháp giảng dạy Toán, rồi đảm nhiệm các chức vụ quản lý khác nhau của ngành Giáo dục như Vụ trưởng Vụ Tổ chức cán bộ, Trưởng ban Thanh tra, Viện trưởng Viện Khoa học Giáo dục, Trợ lý Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo. Thầy từng là Phó Chủ tịch Hội đồng bộ môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo, hiện đang là Chủ tịch Hội Giảng dạy Toán học phổ thông. Trong cả quá trình hoạt động phong phú và đa dạng như vậy, Thầy luôn luôn sống với một quan niệm là "Hãy sống thân thiện với mọi người, sống với đầy đủ trách nhiệm, luôn bằng lòng với cái mình đã có và không phiền muộn vì những điều chưa có".

Chúng tôi, những học trò của Thầy từ gần hai chục năm về trước (và mãi mãi là học trò của Thầy) vẫn luôn học hỏi nhiều điều về những ý tưởng luôn mang tính thời sự của Thầy. Thầy là một nhà sư phạm, nhà giáo dục tâm huyết, không bao giờ cạn niềm say mê tìm tòi và giàu ý tưởng đóng góp vào thành công chung của sự nghiệp giáo dục nước nhà.