

## ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 5-SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

### CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP DẪY SỐ ĐỂ TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

#### PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### 1. SỐ NGUYÊN TỐ

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.
- Số nguyên tố nhỏ nhất vừa là số nguyên tố chẵn duy nhất là số 2.
- Không thể giới hạn số nguyên tố cũng như tập hợp số nguyên tố. Hay nói cách khác, số nguyên tố là vô hạn.
- Khi 2 số nguyên tố nhân với nhau thì tích của chúng không bao giờ là một số chính phương.
- Ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên được coi là số nguyên tố.
- Để kết luận số tự nhiên  $a$  là một số nguyên tố ( $a > 1$ ), chỉ cần chứng minh  $a$  không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá  $a$ .

-Nếu tích  $ab : p \Rightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases} \quad (p \text{ là số nguyên tố})$

-Đặc biệt nếu  $a^n : p \Rightarrow a : p \quad (p \text{ là số nguyên tố})$

-Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng:  $4n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

-Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng:  $6n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

-Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị.

#### PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

**Dạng 1: Tìm số nguyên tố để một hay nhiều biểu thức đồng thời là số nguyên tố.**

##### I. Phương pháp giải

- Dựa vào các dấu hiệu chia hết và các tính chất về số nguyên tố, hợp số, để giải các bài toán về chứng minh hoặc giải thích.
- Trong  $n$  số tự nhiên liên tiếp chỉ có một và chỉ một số chia hết cho  $n$ .
- Nhớ chắc các tính chất đặc trưng của số nguyên tố để giải bài toán.

##### II. Bài toán

**Bài 1:** Tìm số nguyên tố  $p$  sao cho các số sau cũng là số nguyên tố.

a,  $p+10, p+14$

b,  $p+2, p+6, p+8, p+12, p+14$

##### Lời giải:

a,

- Với  $p=2 \Rightarrow p+2=4$  là hợp số, nên  $p=2$  không thỏa mãn đề bài.

- Với  $p=3 \Rightarrow p+10=13, p+14=17$  đều là số nguyên tố. Do đó  $p=3$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p > 3$ ,  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  có dạng  $p = 3k + 1$  hoặc  $p = 3k + 2, (k \in \mathbb{N})$

+ Nếu  $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5) : 3$  là hợp số  $\Rightarrow p = 3k + 1$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 10 = 3k + 12 = 3(k + 4) : 3$  là hợp số  $\Rightarrow p = 3k + 2$  không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p = 3$  thì  $p + 10, p + 14$  là số nguyên tố.

b,

- Với  $p = 2 \Rightarrow p + 6 = 8$  là hợp số, nên  $p = 2$  không thỏa mãn đề bài.

- Với  $p = 3 \Rightarrow p + 6 = 9$  là hợp số, nên  $p = 3$  không thỏa mãn đề bài.

- Với  $p = 5 \Rightarrow p + 2 = 7, p + 6 = 11, p + 8 = 13, p + 12 = 17, p + 14 = 19$  đều là số nguyên tố, nên  $p = 5$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p > 5$  và  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  có dạng  $5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4, (k \in \mathbb{N}^*)$

+ Nếu  $p = 5k + 1 \Rightarrow p + 14 = 5k + 15 : 5$  là hợp số  $\Rightarrow p = 5k + 1$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 5k + 2 \Rightarrow p + 8 = 5k + 10 : 5$  là hợp số  $\Rightarrow p = 5k + 2$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 5k + 3 \Rightarrow p + 12 = 5k + 15 : 5$  là hợp số  $\Rightarrow p = 5k + 3$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 5k + 4 \Rightarrow p + 6 = 5k + 10 : 5$  là hợp số  $\Rightarrow p = 5k + 4$  không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p = 5$  thì  $p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$  là số nguyên tố.

**Bài 2:** Tìm 3 số lẻ liên tiếp đều là các số nguyên tố.

Lời giải:

Gọi 3 số lẻ liên tiếp là:  $2k + 1, 2k + 3, 2k + 5 (k \in \mathbb{N}^*)$

Trong 3 số lẻ liên tiếp luôn có 1 số chia hết cho 3.

- Nếu  $2k + 3 : 3 \Rightarrow 2k : 3 \Rightarrow k : 3$  mà  $2k + 3$  là số nguyên tố. Mà 1 không là số nguyên tố nên .

- Nếu  $2k + 5 : 3 \Rightarrow 2k + 2 : 3 \Rightarrow 2(k + 1) : 3 \Rightarrow (k + 1) : 3$  . Mà  $2k + 5$  là số nguyên tố  $\Rightarrow k = -1$  trái với điều kiện.

- Nếu  $2k + 1 : 3 \Rightarrow 2k + 1 = 3$  (vì  $2k + 1$  là số nguyên tố)  $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow 2k + 3 = 5; 2k + 5 = 7$  đều là các số nguyên tố  $\Rightarrow k = 1$  thỏa mãn đề bài.

Vậy 3 số tự nhiên lẻ cần tìm là  $3, 5, 7$ .

**Bài 3:** Tìm các số nguyên tố  $P$  sao cho  $P$  vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố.

Lời giải:

Giả sử  $P$  là số nguyên tố cần tìm thì ta có  $P = p_1 + p_2 = p_3 - p_4$  ( $p_1, p_2, p_3, p_4$  đều là các số nguyên tố và  $p_3 > p_4$ )

Để  $p$  là số nguyên tố thì  $p_1, p_2$  có một trong hai số là số chẵn và  $p_3, p_4$  cũng có một trong hai số là số chẵn.

Giả sử  $p_1 > p_2$  thì  $p_2 = p_4 = 2$

Ta có:  $p = p_1 + 2 = p_3 - 2 \Rightarrow p_3 = p_1 + 4$

Ta thấy  $p_1, p_1 + 2, p_1 + 4$  là 3 số nguyên tố lẻ liên tiếp.

Theo câu 2  $\Rightarrow p_1 = 3 \Rightarrow p = p_1 + 2 = 5$

Thử lại:  $p = 5 \Rightarrow 5 = 2 + 3 = 7 - 2$ .

Vậy số cần tìm là 5.

**Bài 4:** Tìm  $k \in \mathbb{N}$  để dãy số  $k+1, k+2, \dots, k+10$  chứa nhiều số nguyên tố nhất.

Lời giải:

-Nếu  $k=0 \Rightarrow$  Ta có dãy số  $1; 2; 3; \dots; 10$  có các số nguyên tố là  $2; 3; 5; 7 \Rightarrow$  Có 4 số nguyên tố.

-Nếu  $k=1 \Rightarrow$  Ta có dãy số  $2; 3; 4; \dots; 11$  có các số nguyên tố là  $2; 3; 5; 7; 11 \Rightarrow$  Có 5 số nguyên tố.

-Nếu  $k=2 \Rightarrow$  Ta có dãy số  $3; 4; 5; \dots; 12$  có các số nguyên tố là  $3; 5; 7; 11 \Rightarrow$  Có 4 số nguyên tố.

-Nếu  $k \geq 3 \Rightarrow$  Dãy số  $k+1, k+2, \dots, k+10$  đều gồm các số lớn hơn 3 và bao gồm 5 số lẻ liên tiếp và 5 số chẵn liên tiếp.

Vì các số trong dãy đều lớn hơn 3 nên suy ra 5 số chẵn liên tiếp đều là hợp số và trong 5 số lẻ liên tiếp tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3 và số này cũng là hợp số.

Vậy  $k=1$  là giá trị cần tìm.

**Bài 5:** Tìm số nguyên tố  $p$  sao cho:  $p+94, p+1994$  cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

- Với  $p=2$  là số nguyên tố nên  $p+94=96$  là hợp số. Do đó  $p=2$  không thỏa mãn đề bài.

- Với  $p=3$  là số nguyên tố  $\Rightarrow p+94=97, p+1994=1997$  đều là số nguyên tố. Do đó  $p=3$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p > 3$ ,  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  có dạng  $p=3k+1$  hoặc  $p=3k+2, (k \in \mathbb{N}, k > 0)$

+ Nếu  $p=3k+1 \Rightarrow p+1994=3k+1+1994; 3$  là hợp số  $\Rightarrow p=3k+1$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p=3k+2 \Rightarrow p+94=3k+2+94; 3$  là hợp số  $\Rightarrow p=3k+2$  không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p=3$  là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 6:** Tìm số nguyên tố  $p$  sao cho  $p+18, p+24, p+26, p+32$  cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

- Với  $p=2$  ta có  $p+94=96$  là hợp số  $\Rightarrow p=2$  không thỏa mãn đề bài.

- Với  $p=3$  ta có  $p+94=97, p+1994=1997$  đều là số nguyên tố, do đó  $p=3$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p > 3$ ,  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  có dạng  $p = 3k + 1$  hoặc  $p = 3k + 2, (k \in \mathbb{N}, k > 0)$

+ Nếu  $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 1994 = 3k + 1 + 1994 : 3$  là hợp số  $\Rightarrow p = 3k + 1$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 94 = 3k + 2 + 94 : 3$  là hợp số, do đó  $\Rightarrow p = 3k + 2$  không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p = 3$  là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 7:** Tìm số nguyên tố  $P$  sao cho:  $p + 2, p + 8, p + 16$  đều là số nguyên tố.

Lời giải:

- Với  $p = 2$  là số nguyên tố  $\Rightarrow p + 94 = 96$  là hợp số  $\Rightarrow p = 2$  không thỏa mãn đề bài.

- Với  $p = 3$  là số nguyên tố  $\Rightarrow p + 94 = 97, p + 1994 = 1997$  đều là số nguyên tố  $\Rightarrow p = 3$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p > 3$ ,  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  có dạng  $p = 3k + 1$  hoặc  $p = 3k + 2, (k \in \mathbb{N}^*)$

+ Nếu  $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 1994 = 3k + 1 + 1994 : 3$  là hợp số  $\Rightarrow p = 3k + 1$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 94 = 3k + 2 + 94 : 3$  là hợp số, do đó  $\Rightarrow p = 3k + 2$  không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p = 3$  là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 8:** Tìm số nguyên tố  $P$  sao cho:

a,  $2p - 1, 4p - 1$  cũng là số nguyên tố.

b,  $2p + 1, 4p + 1$  cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

a,

- Với  $p = 2 \Rightarrow 2p - 1 = 3, 4p - 1 = 7$  là số nguyên tố  $\Rightarrow p = 2$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p = 3 \Rightarrow 2p - 1 = 5, 4p - 1 = 11$  đều là số nguyên tố  $\Rightarrow p = 3$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p > 3$ ,  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  có dạng  $p = 3k + 1$  hoặc  $p = 3k + 2, (k \in \mathbb{N}^*)$

+ Nếu  $p = 3k + 1 \Rightarrow 4p - 1 = 4(3k + 1) - 1 = 12k + 3 : 3$  là hợp số  $\Rightarrow p = 3k + 1$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 3k + 2 \Rightarrow 2p - 1 = 2(3k + 2) - 1 = 6k + 3 : 3$  là hợp số nên  $\Rightarrow p = 3k + 2$  không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p = 3$  và  $p = 2$  là số nguyên tố cần tìm.

b,

- Với  $p = 2$  là số nguyên tố  $\Rightarrow 4p + 1 = 9$  là hợp số  $\Rightarrow p = 2$  không thỏa mãn đề bài.

- Với  $p = 3$  là số nguyên tố  $\Rightarrow 2p + 1 = 7, 4p + 1 = 13$  đều là số nguyên tố  $\Rightarrow p = 3$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $p > 3$ ,  $p$  là số nguyên tố nên  $p$  có dạng  $p = 3k + 1$  hoặc  $p = 3k + 2, (k \in \mathbb{N}^*)$

+ Nếu  $p = 3k + 1 \Rightarrow 2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 : 3$  là hợp số  $\Rightarrow p = 3k + 1$  không thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $p = 3k + 2 \Rightarrow 4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 12k + 9 : 3$  là hợp số nên  $\Rightarrow p = 3k + 2$  không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p = 3$  là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 9:** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để  $n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 13, n + 15$  đều là số nguyên tố

Lời giải:

- Với  $n=0$  thì  $n+9=9$  là hợp số. Do đó  $n=0$  không thỏa mãn đề bài.
- Với  $n=1$  thì  $n+3=4$  là hợp số. Do đó  $n=1$  không thỏa mãn đề bài.
- Với  $n=2$  thì  $n+13=15$  là hợp số. Do đó  $n=2$  không thỏa mãn đề bài.
- Với  $n=3$  thì  $n+3=6$  là hợp số. Do đó  $n=3$  không thỏa mãn đề bài.
- Với  $n=4$  thì  $n+1=5, n+3=7, n+7=11, n+9=13, n+13=17, n+15=19$  đều là các số nguyên tố. Do đó  $n=4$  thỏa mãn đề bài.

- Với  $n > 4$  thì  $n$  có dạng  $n=4k+1, n=4k+2, n=4k+3, (k \in \mathbb{N}^*)$ .

+ Với  $n=4k+1$  thì  $n+1=4k+2$  là hợp số. Do đó  $n=4k+1$  không thỏa mãn.

+ Với  $n=4k+3$  thì  $n+1=4k+4$  là hợp số. Do đó  $n=4k+3$  không thỏa mãn.

+ Với  $n=4k+2$  thì  $n+13=4k+2+13=4k+15$  là hợp số. Do đó  $n=4k+2$  không thỏa mãn.

Do đó  $n=4$  thỏa mãn đề bài.

**Bài 10:** Tìm tất cả các số nguyên tố  $p, q$  sao cho  $7p+q$  và  $pq+11$  cũng là số nguyên tố

Lời giải:

Nếu  $pq+11$  là số nguyên tố thì nó phải là số lẻ vì nó là số nguyên tố lớn hơn 2

Suy ra  $pq$  là số chẵn, khi đó ít nhất 1 trong 2 số  $p$  hoặc  $q$  bằng 2

Giả sử  $p=2 \Rightarrow 7p+q=14+q$  là số nguyên tố

+ Nếu  $q=2 \Rightarrow 7p+q=7.2+2=16$  là hợp số,  $\Rightarrow p=2, q=2$  không thỏa mãn.

+ Nếu  $q=3 \Rightarrow pq+11=2.3+11=17$  và  $7p+q=7.2+3=17$  đều là các số nguyên tố,  $\Rightarrow p=2, q=3$  thỏa mãn đề bài.

+ Nếu  $q > 3$ ,  $q$  là số nguyên tố nên có dạng  $q=3k+1$  hoặc  $q=3k+2, (k \in \mathbb{N}^*)$

+ Với  $q=3k+1 \Rightarrow 7p+q=14+3k+1=3$  là hợp số  $\Rightarrow q=3k+1$  không thỏa mãn.

+ Với  $q=3k+2 \Rightarrow pq+11=2q+11=2(3k+2)+11=6k+15=3$  là hợp số  $\Rightarrow q=3k+2$  không thỏa mãn.

Vậy  $p=2, q=3$ .

Xét tiếp TH  $q=2$  làm tương tự ta được  $p=3$ .

Vậy  $p=2, q=3$  hoặc  $p=3, q=2$ .

**Bài 11:** Tìm số nguyên tố  $p$  sao cho  $5p+7$  là số nguyên tố.

Lời giải:

- Nhận thấy  $p=2$  là số nguyên tố, và  $5p+7=17$  cũng là số nguyên tố

- Với  $p > 2$  và  $p$  là số nguyên tố thì  $p$  có dạng  $p=2k+1, (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu  $p=2k+1 \Rightarrow 5p+7=5(2k+1)+7=10k+12=2$  là hợp số, nên  $p=2k+1$  không thỏa mãn.

Vậy  $p=2$  là số nguyên tố cần tìm.

**Bài 12:** Ta gọi  $p, q$  là hai số tự nhiên liên tiếp, nếu giữa  $p$  và  $q$  không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp  $p, q, r$  sao cho  $p^2+q^2+r^2$  cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

Nếu 3 số nguyên tố  $p, q, r$  đều khác 3 thì  $p, q, r$  đều có dạng  $3k \pm 1$  suy ra  $p^2 + q^2 + r^2$  chia cho 3 đều dư 1. Khi đó  $p^2 + q^2 + r^2 \div 3$  và  $p^2 + q^2 + r^2 > 3$  nên  $p^2 + q^2 + r^2$  là hợp số. Vậy  $p=3, q=5, r=7$ , khi đó  $p^2 + q^2 + r^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$  là số nguyên tố.

**Bài 13:** Tìm các số nguyên tố  $a$  sao cho  $6a + 13$  là số nguyên tố và  $25 \leq 6a + 13 \leq 45$

Lời giải:

Ta có : Từ 25 đến 45 có 5 số nguyên tố là : 29; 31; 37; 41; 43

Nên ta có bảng sau :

|           |               |    |    |                |    |
|-----------|---------------|----|----|----------------|----|
| $6a + 13$ | 29            | 31 | 37 | 41             | 43 |
| $a$       | $\frac{8}{3}$ | 3  | 4  | $\frac{14}{3}$ | 5  |

Mà  $a$  là số nguyên tố nên  $a=3$  hoặc  $a=5$ .

Vậy  $a=3$  hoặc  $a=5$ .

**Bài 14:** Tìm các số nguyên tố  $a, b, c$  sao cho  $a.b.c = 3(a+b+c)$ .

Lời giải:

Vì  $a.b.c = 3(a+b+c) \Rightarrow abc \div 3$

Giả sử  $a \div 3$ , vì  $a$  là số nguyên tố  $\Rightarrow a=3$ .

Ta có  $3.b.c = 3(3+b+c) \Rightarrow bc = 3+b+c$

$$\Rightarrow bc - b = 3 + c$$

$$\Rightarrow b(c-1) = 3 + c$$

$$\Rightarrow b(c-1) = 4 + (c-1)$$

$$\Rightarrow (b-1)(c-1) = 4$$

$$\Rightarrow (b, c) \in \{(3, 3); (2, 5)\}$$

Vậy  $(a, b, c) \in \{(3, 3, 3); (2, 3, 5)\}$

**Bài 15:** Ta gọi  $p, q$  là 2 số nguyên tố liên tiếp nếu giữa  $p$  và  $q$  không có số nguyên tố nào khác. Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp  $p, q, r$  sao cho  $p^2 + q^2 + r^2$  cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

+Nếu  $p, q, r$  đều khác 3 mà  $p, q, r$  là các số nguyên tố.

$\Rightarrow p, q, r$  chia 3 dư 1 hoặc dư 2 (hay dư -1).

$\Rightarrow p^2, q^2, r^2$  chia 3 dư 1.

$\Rightarrow p^2 + q^2 + r^2$  chia hết cho 3.

Vậy tồn tại 1 số bằng 3.

+ TH1: Bộ 3 số  $p, q, r$  tương ứng là:  $2; 3; 5$ . Khi đó  $2^2 + 3^2 + 4^2 = 38$  là hợp số. Do đó bộ ba số này không thỏa mãn.

+ TH2: Bộ 3 số  $p, q, r$  tương ứng là:  $3; 5; 7$  Khi đó  $3^2 + 4^2 + 5^2 = 83$  là số nguyên tố. Do đó bộ ba số này thỏa mãn đề bài.

Vậy 3 số nguyên tố liên tiếp cần tìm là:  $3, 5, 7$ .

**Bài 16:** Tìm 3 số nguyên tố  $p, q, r$  sao cho:  $p^q + q^p = r$ .

Lời giải:

Vì  $p^q + q^p > 2 \Rightarrow r > 2 \Rightarrow r$  là số lẻ ( $r$  là số nguyên tố).

$\Rightarrow p^q, q^p$  có 1 số lẻ và 1 số chẵn.

Giả sử  $p^q$  là số chẵn  $\Rightarrow p$  chẵn  $\Rightarrow p = 2$  (vì  $p$  là số nguyên tố)  $\Rightarrow 2^q + q^2 = r$

+ Nếu  $q > 3 \Rightarrow q \equiv \pm 1 \pmod{3} \Rightarrow q^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Mặt khác  $q$  là số lẻ  $\Rightarrow 2^q \equiv (-1)^q \equiv -1 \pmod{3}$

$\Rightarrow 2^q + q^2 \equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow 2^q + q^2 : 3 \Rightarrow r : 3 \Rightarrow r = 3$  (Vì  $r$  là số nguyên tố).

$\Rightarrow 2^q + q^2 = 3$  (Loại vì  $q$  là số nguyên tố nên  $q^2 > 3 \Rightarrow r > 3$ )

+ Nếu  $q = 3$  thì  $r = 3^2 + 2^3 = 17$  là số nguyên tố (Thỏa mãn).

Vậy  $(p, q, r) \in \{(2, 3, 17); (3, 2, 17)\}$ .

**Bài 17:** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố liên tiếp sao cho tổng bình phương của ba số này cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

Gọi bộ ba số nguyên tố liên tiếp đó là  $p, s, r, (p < s < r)$

Nếu  $p, s, r$  đều không chia hết cho 3 thì  $p^2, s^2, r^2$  đều chia 3 dư 1  $\Rightarrow p^2 + s^2 + r^2 : 3$

Mà  $p^2 + s^2 + r^2 > 3$  nên  $p^2 + s^2 + r^2$  là hợp số (Trái với GT, loại)

Do đó có ít nhất một trong 3 số  $p, s, r$  chia hết cho 3.

+ Nếu  $p = 3$  thì  $s = 5, r = 7$

Khi đó  $p^2 + s^2 + r^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$  là số nguyên tố (Thỏa mãn)

+ Nếu  $s = 3$  thì  $p = 2, r = 5$

Khi đó  $p^2 + s^2 + r^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 28$  không là số nguyên tố ( Trái với GT, loại )

+Nếu  $r=3$  thì  $s=2; p < 2$  ( Vô lí vì  $p$  là số nguyên tố, loại )

Vậy 3 số nguyên tố cần tìm là : 3;5;7

**Bài 18:** Tìm tất cả các bộ ba số  $a, b, c$  sao cho  $abc < ab + bc + ac$

Lời giải:

Vì  $a, b, c$  có vai trò như nhau nên giả sử  $a \leq b \leq c$  khi đó

$$ab + bc + ac \leq 3bc$$

$$\Rightarrow abc < 3bc$$

$$\Rightarrow a < 3 \Rightarrow a = 2 \text{ vì } a \text{ là số nguyên tố.}$$

Với  $a = 2$  thì ta có  $2bc < 2b + 2c + bc \Rightarrow bc < 2(b + c) \leq 4c$

$$b \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = 3 \end{cases} \text{ ( vì } p \text{ là số nguyên tố )}$$

+ Nếu  $b = 2$  thì  $4c < 4 + 4c$  thỏa mãn với  $c$  là số nguyên tố bất kì

+ Nếu  $b = 3$  thì  $6c < 6 + 5c \Rightarrow c < 6 \Rightarrow c \in \{3; 5\}$

Vậy các cặp số  $(a, b, c)$  cần tìm là  $(2, 2, p); (2, 3, 3); (2, 3, 5)$  và các hoán vị của chúng, với  $p$  là số nguyên tố.

**Bài 19:** Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  để :

a,  $n^2 + 12n$  là số nguyên tố.

b,  $3^n + 6$  là số nguyên tố.

Lời giải:

a, Ta có :  $n^2 + 12n = n(n + 12)$ , Vì  $n + 12 > 1 \Rightarrow n(n + 12)$  có thêm 2 ước là  $n$  và  $n + 12$

Để  $n(n + 12)$  là số nguyên tố thì  $n = 1 \Rightarrow n^2 + 12n = 13$  là số nguyên tố  $\Rightarrow n = 1$  thỏa mãn đề bài.

b, Nếu  $n = 0 \Rightarrow 3^n + 6 = 7$  là số nguyên tố.

Nếu  $n \neq 0 \Rightarrow 3^n + 6 : 3$  là hợp số.

Vậy  $n = 0$ .

**Bài 20:** Một số nguyên tố chia cho 30 có số dư là  $r$ . Tìm  $r$  biết rằng  $r$  không là số nguyên tố.

Lời giải:

Gọi số nguyên tố là  $p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ).

Ta có:  $p = 30k + r = 2.3.5.k + r$  ( $k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*, 0 < r < 30$ )

Vì  $p$  là số nguyên tố nên  $r$  không chia hết cho  $2, 3, 5$ .

Số nguyên dương không là số nguyên tố nhỏ hơn 30 và không chia hết cho  $2, 3, 5$  chỉ có số 1.

Vậy  $r = 1$ .

**Bài 21:** Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là  $r$ . Tìm  $r$  biết rằng  $r$  là hợp số.

Lời giải:

Gọi số nguyên tố là  $p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ )

Ta có:  $p = 42k + r = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot k + r$  ( $k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*, 0 < r < 42$ )

Vì  $p$  là số nguyên tố nên  $r$  không chia hết cho  $2, 3, 7$ .

Số nguyên dương là hợp số nhỏ hơn 42 và không chia hết cho  $2, 3, 7$  chỉ có số 25.

Vậy  $r = 25$ .

**Bài 22:** Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100. Tổng của 25 số này là số chẵn hay số lẻ?

Lời giải:

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 có chứa một số nguyên tố chẵn là 2, còn 24 số nguyên tố còn lại là số nguyên tố lẻ. Do đó tổng 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100 là số chẵn.

**Bài 23:** Tìm tất cả các số nguyên tố  $p$  để  $2^p + p^2$  cũng là số nguyên tố.

Lời giải:

Với  $p = 2$  ta có  $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$  không là số nguyên tố.

Với  $p = 3$  ta có  $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$  là số nguyên tố.

Với  $p > 3$  ta có  $p^2 + 2^p = (p^2 - 1) + (2^p + 1)$ . Vì  $p$  lẻ và  $p$  không chia hết cho 3 nên  $(p^2 - 1):3$  và  $(2^p + 1):3$ , do đó  $2^p + p^2$  là hợp số. Vậy với  $p = 3$  thì  $2^p + p^2$  là số nguyên tố.

**Dạng 2 : Các bài toán chứng minh về số nguyên tố.**

**Bài 24:** Chứng minh rằng với  $n \in \mathbb{N}, n > 2$  thì  $2^n - 1, 2^n + 1$  không thể đồng thời là số nguyên tố.

Lời giải:

Xét dãy số:  $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$  là 3 số tự nhiên liên tiếp.

Vì  $(2, 3) = 1 \Rightarrow (2^n, 3) = 1$

Vì dãy số:  $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$  là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.

Mà  $(2^n, 3) = 1$  nên một trong hai số  $2^n - 1; 2^n + 1$  chia hết cho 3.

Suy ra  $n \in \mathbb{N}, n > 2$  thì  $2^n - 1, 2^n + 1$  không thể đồng thời là số nguyên tố.

**Bài 25:** Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên  $n, (n > 1)$  luôn tìm được  $n$  số tự nhiên liên tiếp đều là hợp số.

Lời giải:

Chọn số tự nhiên  $a = 2.3.4 \dots n.(n+1)$

Khi đó ta có  $n$  số tự nhiên liên tiếp là  $a+2, a+3, a+4, \dots, a+n, a+(n+1)$  đều là hợp số vì  $n$  số trên lần lượt chia hết cho  $2, 3, 4, \dots, n, n+1$  ( điều phải chứng minh).

**Bài 26:** Chứng minh rằng nếu  $a, a+m, a+2m$  đều là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì  $m$  chia hết cho 6.

Lời giải:

Các số nguyên tố lớn hơn 3 đều là số lẻ.

Nếu  $m$  là số lẻ thì  $a+m$  là số chẵn lớn hơn 3 nên không là số nguyên tố. Suy ra  $m$  là số chẵn.

Đặt  $m = 2p, (p \in \mathbb{N}^*)$ .

Nếu  $p = 3k+1, (k \in \mathbb{N})$  thì ba số đã cho là:  $a, a+6k+2, a+12k+4$

Nếu  $a$  chia cho 3 dư 1 thì  $a+6k+2 \equiv 3$ , không thỏa mãn đề bài.

Nếu  $a$  chia cho 3 dư 2 thì  $a+12k+4 \equiv 3$ , không thỏa mãn đề bài.

Vậy  $p$  không có dạng  $p = 3k+1, (k \in \mathbb{N})$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được  $p$  không có dạng  $p = 3k+2, (k \in \mathbb{N})$

Do đó  $p = 3k, (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow m = 6k \Rightarrow m \vdots 6$

Vậy  $m$  chia hết cho 6.

**Bài 27:**

a) Chứng minh rằng số dư trong phép chia của một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố. Khi chia cho 60 thì kết quả ra sao?

b) Chứng minh rằng nếu tổng của  $n$  lũy thừa bậc 4 của các số nguyên tố lớn hơn 5 là một số nguyên tố thì  $(n, 30) = 1$

Lời giải:

a) Giả sử  $p$  là số nguyên tố và  $p = 30 + r$  với  $0 < r < 30$ . Nếu  $r$  là hợp số thì  $r$  có ước nguyên tố  $q \leq \sqrt{30} \Rightarrow q = 2; 3; 5$ . Nhưng với  $q = 2; 3; 5$  thì  $r$  lần lượt chia hết cho 2; 3; 5 (vô lí). Vậy  $r = 1$  hoặc  $r$  là số nguyên tố.

Khi chia cho 60 thì kết quả không còn đúng nữa, chẳng hạn  $p = 109 = 60.1 + 49$  mà 49 là hợp số.

b) Số nguyên tố  $p$  khi chia cho 30 chỉ có thể dư là 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Với  $r = 1, 11, 19, 29$  thì  $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$ .

Với  $r = 7, 13, 17, 23$  thì  $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$ .

Suy ra  $p^4 \equiv 1 \pmod{30}$ .

Giả sử  $p_1, p_2, \dots, p_n$  là các số nguyên tố lớn hơn 5.

Khi đó  $q = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_n^4 \equiv n \pmod{30} \Rightarrow q = 30k + n$  là số nguyên tố nên  $(n, 30) = 1$ .

**Bài 28:** Hai số  $2^n + 1, 2^n - 1 (n \in \mathbb{N}, n > 2)$  có thể cùng là số nguyên tố hay không? Vì sao?

Lời giải:

Vì  $2^n + 1, 2^n, 2^n - 1$  là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3. Mà  $(2, 3) = 1$  và 3 là số nguyên tố nên  $2^n$  không chia hết cho 3. (1)

Mà  $n > 2$  nên  $2^n + 1 > 3, 2^n - 1 > 3$  (2)

Từ (1), (2) suy ra 1 trong 2 số  $2^n + 1, 2^n - 1$  phải chia hết cho 3.

$\Rightarrow$  Hai số  $2^n + 1, 2^n - 1 (n \in \mathbb{N}, n > 2)$  không thể cùng là số nguyên tố.

**Bài 29:** Cho 3 số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là  $d$  đơn vị. Chứng minh rằng  $d \vdots 6$

Lời giải:

Các số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $p$  có dạng  $3k + 1$  hoặc  $3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Có 3 số mà chỉ có 2 dạng nên tồn tại hai số thuộc cùng một dạng, hiệu của chúng (là  $d$  hoặc  $2d$ ) chia hết cho 3. Mặt khác  $d$  chia hết cho 2 vì  $d$  là hiệu của hai số lẻ. Vậy  $d$  chia hết cho 6.

**Bài 30:** Hai số nguyên tố gọi là sinh đôi nếu chúng là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 3 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

Lời giải:

Gọi  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 và  $p$  lẻ nên  $p + 1 \vdots 2$  (1)

Mà  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $p$  có dạng  $3k + 1, 3k + 2 (k \in \mathbb{N})$ .

Dạng  $p = 3k + 1$  không xảy ra vì nếu  $p = 3k + 1$  thì  $p + 2 = 3k + 3 \vdots 3$  là hợp số (Loại)

$\Rightarrow p = 3k + 2 \Rightarrow p + 1 = 3k + 3 \vdots 3$  (2)

Từ (1), (2)  $\Rightarrow p + 1 \vdots 6 \Rightarrow \text{ĐPCM}$

**Bài 31:** Chứng minh rằng số dư trong phép chia một số nguyên tố cho 30 chỉ có thể là 1 hoặc là số nguyên tố.

Lời giải:

Giả sử  $P$  là số nguyên tố và  $P$  có dạng  $P = 30k + r = 2.3.5.k + r (k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*, 0 < r < 30)$

Nếu  $r$  là hợp số thì  $r$  có ước nguyên tố  $q$  sao cho  $q^2 < 30 \Rightarrow q \in \{2, 3, 5\}$

Nhưng với  $q \in \{2, 3, 5\}$  thì  $P$  lần lượt chia hết cho  $2, 3, 5$  ( Vô lý )

Vậy  $r = 1$  hoặc  $r$  là số nguyên tố.

**Bài 32:** Cho dãy số nguyên dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  được xác định như sau:

$a_1 = 2, a_n$  là ước nguyên tố của  $a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} + 1$  với  $n \geq 2$ . Chứng minh rằng  $a_k \neq 5, \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Lời giải:

Ta có  $a_1 = 2, a_2 = 3$ , giả sử với  $n \geq 3$  nào đó mà có số 5 là ước nguyên tố lớn nhất của số  $A = 2.3.a_3 \dots a_{n-1} + 1$  thì  $A$  không thể chia hết cho 2, cho 3. Vậy chỉ có thể xảy ra  $A = 5^m$  với  $m \geq 2$ .

Suy ra  $A - 1 = 5^m - 1 \vdots 4$ .

Mà  $A - 1 = 2.3.a_3 \dots a_{n-1}$  không chia hết cho 4 do  $a_3 \dots a_{n-1}$  là các số lẻ (vô lý).

Vậy  $A$  không có ước nguyên tố của 5, tức là  $a \neq 5, \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

**Bài 33:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được 1997 số liên tiếp nhau mà không có số nguyên tố nào hay không ?

Lời giải:

Chọn dãy số:

|                           |                        |
|---------------------------|------------------------|
| $a_1 = 1998! + 2$         | $a_1 \vdots 2$         |
| $a_2 = 1998! + 3$         | $a_2 \vdots 3$         |
| $a_3 = 1998! + 4$         | $a_3 \vdots 4$         |
| .....                     | .....                  |
| $a_{1997} = 1998! + 1998$ | $a_{1997} \vdots 1998$ |

Như vậy: Dãy số  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{1997}$  gồm có 1997 số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

**Bài 34:** Trong dãy số tự nhiên có thể tìm được  $n$  số liên tiếp nhau ( $n > 1$ ) mà không có số nguyên tố nào hay không ?

Lời giải:

Chọn dãy số:

$a_1 = (n + 1)! + 2$   $a_1 \vdots 2, a_1 > 2$  nên  $a_1$  là hợp số

$$a_2 = (n+1)! + 3 \quad a_2 : 3, a_2 > 3 \text{ nên } a_2 \text{ là hợp số}$$

$$a_3 = (n+1)! + 4 \quad a_3 : 4, a_3 > 4 \text{ nên } a_3 \text{ là hợp số}$$

.....

$$a_n = (n+1)! + (n+1) \quad a_n : (n+1), a_n > n+1 \text{ nên } a_n \text{ là hợp số}$$

Như vậy: Dãy số  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$  gồm có  $n$  số tự nhiên liên tiếp không có số nào là số nguyên tố.

### PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

**Bài 1:** Cho  $p$  và  $2p+1$  là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng  $4p+1$  là hợp số.

(Trích đề HSG lớp 6 Trục Ninh năm học 2017-2018)

Lời giải:

Do  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng  $p = 3k+1; p = 3k-1$  với  $k > 1, k \in \mathbb{N}$ .

+ Nếu  $p = 3k+1$  thì  $2p+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$ .

Suy ra  $2p+1$  là hợp số (vô lí).

+ Nếu  $p = 3k-1, k > 1$  thì  $4p+1 = 12k-3 = 3(4k-1)$ .

Do  $k > 1$  nên  $(4k-1) > 3$ . Do đó  $4p+1$  là hợp số.

**Bài 2:** Biết  $\overline{abcd}$  là nguyên tố có bốn chữ số thỏa mãn  $\overline{ab}; \overline{cd}$  cũng là số nguyên tố và  $b^2 = \overline{cd} + b - c$ . Hãy tìm  $\overline{abcd}$ .

(Trích đề HSG lớp 6 Sông Lô năm học 2018-2019)

Lời giải:

Vì  $\overline{ab}; \overline{cd}$  là các số nguyên tố nên  $b, d$  lẻ và khác 5.

Ta lại có  $b^2 = \overline{cd} + b - c \Leftrightarrow b^2 - b = \overline{cd} - c \Leftrightarrow b(b-1) = 9c + d$

Nếu  $b=1$  (Không thỏa mãn)

Nếu  $b=3$  nên  $9c+d=6 \Rightarrow c=0, d=6$  (Không thỏa mãn).

Nếu  $b=7 \Rightarrow 9c+d=42 \Rightarrow d=42-9c \Rightarrow c=4; d=6$  (Loại)

Nếu  $b=9 \Rightarrow 9c+d=72 \Rightarrow d=72-9c \Rightarrow c=7; d=9$  (thỏa mãn)

Suy ra  $a \in \{1; 2; 7\}$ .

Vậy  $\overline{abcd} \in \{1979; 2979; 7979\}$ .

**Bài 3:** Cho các số  $p = b^c + a, q = a^b + c, r = c^a + b$  là các số nguyên tố. Chứng minh trong 3 số  $p, q, r$  có ít nhất 2 số bằng nhau.

( Trích đề HSG lớp 6 TP Bắc Ninh năm học 2018-2019)

Lời giải:

Trong 3 số  $a, b, c$  có ít nhất 2 số cùng tính chẵn lẻ.

Giả sử hai số cùng tính chẵn lẻ là  $a$  và  $b$ .

Suy ra  $p = b^c + a$  là số nguyên tố chẵn nên  $p = 2$ .

Suy ra  $a = b = 1$ . Khi đó  $q = c + 1$  và  $r = c + 1$  nên  $q = r$ .

Vậy trong ba số  $p, q, r$  có ít nhất 2 số bằng nhau.

**Bài 4:** Giả sử  $p$  và  $p + 2$  là các số nguyên tố. Chứng tỏ  $p^3 + p^2 + 1$  cũng là số nguyên tố.

( Trích đề HSG lớp 6 Gia Bình năm học 2018-2019)

Lời giải:

+) Với  $p = 2$  thì  $p^2 + 2 = 8$  không là số nguyên tố.

+) Với  $p = 3$  thì  $p^2 + 2 = 11$  và  $p^3 + p^2 + 1 = 37$  đều là số nguyên tố.

+) Với  $p > 3 \Rightarrow p = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$

$\Rightarrow p^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1) : 3$  nên  $p^2 + 2$  là hợp số.

Vậy chỉ có  $p = 3$  thì  $p^2 + 2$  và  $p^3 + p^2 + 1$  đều là số nguyên tố.

**Bài 5:** Cho  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh  $p^{20} - 1$  chia hết cho 100.

( Trích đề HSG lớp 9 huyện Lục Nam năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có  $p^{20} - 1 = (p^4 - 1)(p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1)$ .

Do  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 5 nên  $p$  là một số lẻ.

$\Rightarrow p^2 + 1$  và  $p^2 - 1$  là các số chẵn.

$\Rightarrow p^4 - 1$  chia hết cho 4.

$\Rightarrow p^{20} - 1$  chia hết cho 4.

Vì  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 5  $\Rightarrow p$  là một số không chia hết cho 5.

Lập luận ta được  $p^4 - 1$  chia hết cho 5.

Lập luận ta được  $p^{16} + p^{12} + p^8 + p^4 + 1$  chia hết cho 5.

Suy ra  $p^{20} - 1$  chia hết cho 5.

Mà  $(4; 25) = 1$  nên  $(p^{20} - 1) : 100$  (đpcm).

**Bài 6:** Chứng minh rằng hai số  $2n+1$  và  $10n+7$  là 2 số nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên  $n$ .

(Trích đề HSG lớp 6 Như Thanh năm học 2018-2019)

Lời giải:

Đặt  $d = \text{UCLN}(2n+1, 10n+7)$

$\Rightarrow (2n+1) : d$ . Vì vậy  $(10n+7) : d \Rightarrow 2 : d$

Do đó  $d = 2$  hoặc  $d = 1$

+) Nếu  $d = 2$  thì  $(2n+1) : 2$  ( Vô lý)  $\Rightarrow d = 1$

$1 = \text{UCLN}(2n+1, 10n+7)$ .

Vậy  $2n+1$  và  $10n+7$  là hai nguyên tố cùng nhau với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Bài 7:** Cho  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng  $p^2 - 1 : 24$ .

(Trích đề HSG lớp 9 huyện Kim Thành năm học 2018-2019)

Lời giải:

Ta có  $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ .

Vì  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $p$  lẻ. Do đó  $p-1$  và  $p+1$  là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó suy ra  $(p-1)(p+1) : 8$  (1).

Xét ba số tự nhiên liên tiếp  $p-1; p; p+1$ . Ta có  $(p-1)p(p+1) : 3$ .

Mà  $p$  là số nguyên tố lớn hơn 3 nên  $p$  không chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên suy ra  $(p-1)(p+1) : 3$  (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với  $(3; 8) = 1$  và  $3 \cdot 8 = 24$  ta suy ra  $p^2 - 1 : 24$  (đpcm).

**Bài 8:** Tìm tất cả các cặp số nguyên tố  $(p; q)$  sao cho  $p^2 - 2q^2 = 1$

Lời giải:

Từ  $p^2 - 2q^2 = 1$  ta được  $p^2 = 2q^2 + 1$ .

Do đó ta suy ra được  $p$  là số nguyên tố lẻ.

Từ đó ta đặt  $p = 2k + 1$  với  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Khi đó ta được  $(2k + 1)^2 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 2q^2 + 1 \Leftrightarrow 2k(k + 1) = q^2$ .

Do đó  $q^2$  là số chẵn nên  $q$  là số chẵn. Mà  $q$  là số nguyên tố nên  $q = 2$ .

Thay vào  $p^2 - 2q^2 = 1$  ta suy ra được  $p = 3$ .

Vậy cặp số nguyên tố  $(p, q) = (3, 2)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 9:** Tìm số nguyên tố có hai chữ số khác nhau có dạng  $\overline{xy} (x > y > 0)$  sao cho hiệu của số đó với số viết theo thứ tự ngược lại của số đó là số chính phương.

(Trích đề HSG lớp 6 huyện Thái Thụy năm học 2018-2019)

Lời giải:

Theo đề bài ra ta có:  $\overline{xy} - \overline{yx}$  là số chính phương.

Khi đó  $10x + y - (10y + x) = 10(x - y) - (x - y) = 9(x - y)$  là số chính phương.

Suy ra  $x - y$  là số chính phương.

Vì  $x > y > 0$  nên  $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$ .

Ta xét các trường hợp sau:

+ TH1:  $x - y = 1$  và  $\overline{xy}$  là số nguyên tố nên  $\overline{xy} = 43$ .

+ TH2:  $x - y = 4$  và  $\overline{xy}$  là số nguyên tố nên  $\overline{xy} = 73$ .

+ TH3:  $x - y = 9$  và  $\overline{xy}$  là số nguyên tố nên không có số nào thỏa mãn.

Vậy  $\overline{xy} \in \{43; 73\}$

**Bài 10:** Tìm các số nguyên tố  $p, q$  và số nguyên  $x$  thỏa mãn  $x^5 + px + 3q = 0$ .

(Trích đề HSG lớp 6 huyện Kiến Xương năm học 2016-2017)

Lời giải:

Ta có  $x^5 + px + 3q = 0 \Leftrightarrow x(x^4 + p) = -3q$ .

Vì  $q$  là số nguyên tố và  $x$  là số nguyên nên từ phương trình trên ta suy ra  $x \in \{-1; -3; -q; -3q\}$ .

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu  $x = -1$ , khi đó từ phương trình trên ta được  $1 + p = 3q$ . Do  $q$  là số nguyên tố nên:

- Khi  $q = 2$  thì ta được  $p = 5$ .
- Khi  $q > 2$  thì  $3q$  là số lẻ nên  $p$  là số nguyên tố chẵn. Do đó  $p = 2$  nên  $q = 1$  không phải là số nguyên tố.

+ Nếu  $x = -3$ , khi đó từ phương trình trên ta được  $p + 81 = q$ . Do đó  $p$  là số nguyên tố chẵn và  $q$  là số nguyên tố lẻ. Từ đó ta được  $p = 2; q = 83$ .

+ Nếu  $x = -q$  khi đó từ phương trình trên ta được  $p + p^4 = 3$ . Trường hợp này không xảy ra do  $p$  và  $q$  là số nguyên tố nên  $p + p^4 > 3$ .

+ Nếu  $x = -3q$ , khi đó phương trình trên ta được  $p + 81p^4 = 1$ . Trường hợp này không xảy ra do  $p$  và  $q$  là số nguyên tố nên  $p + 81p^4 > 1$ .

Vậy các bộ số  $(x; p; q)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $(-1; 5; 2), (-3; 2; 83)$ .

**Bài 11:** Chứng minh rằng nếu  $2^n - 1$  là số nguyên tố ( $n > 2$ ) thì  $2^n + 1$  là hợp số.

(Trích đề HSG lớp 6 huyện Thanh Hà năm học 2015-2016)

Lời giải:

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp là  $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ .

Trong ba số tự nhiên liên tiếp trên có duy nhất một số chia hết cho 3.

Do  $n > 2$  nên  $2^n - 1 > 3$ , mà theo giả thiết thì  $2^n - 1$  là số nguyên tố, do đó  $2^n - 1$  không chia hết cho 3.

Lại có  $2^n$  không chia hết cho 3. Do đó suy ra  $2^n + 1$  chia hết cho 3.

Mà do  $n > 2$  nên  $2^n + 1 > 3$ . Từ đó ta được  $2^n + 1$  là hợp số.

**Bài 12:** Tìm các số nguyên tố  $p, q, r$  thỏa mãn các điều kiện sau.

$$5 \leq p < q < r; 49 \leq 2p^2 - r^2; 2q^2 - r^2 \leq 193$$

(Trích đề HSG lớp 6 huyện Nam Sách năm học 2012-2013)

Lời giải:

Từ  $49 \leq 2p^2 - r^2; 2p^2 - r^2 \leq 193$  ta có  $2q^2 - 193 \leq r^2 \leq 2p^2 - 49$  do đó  $q^2 - p^2 \leq 72$ .

Mặt khác từ điều kiện  $5 \leq p < q < r$  ta được  $r \geq 11$ , do đó  $2p^2 \geq 49 + 121 = 170$  hay  $p \geq 11$ .

Vì  $(q - p)(q + p) \leq 72$  nên  $q - p = 2$  hoặc  $q - p \geq 4$ .

Xét hai trường hợp sau:

+ Với  $q - p = 2$  và  $q + p \geq 36$ , khi đó ta được  $p = 11, q = 13$  hoặc  $p = 17, q = 19$ .

- Nếu  $p=11, q=13$  thì  $145 \leq r^2 \leq 193$ , suy ra  $r=13=q$  (loại).
- Nếu  $p=17, q=19$  thì  $529 \leq r^2 \leq 529$ , suy ra  $r=23$  (nhận).

Với  $q-p \geq 4$  và  $q+p \leq 18$  không tồn tại vì  $p \geq 11$ .

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là  $p=17; q=19; r=23$ .

**Bài 13:** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố  $a, b, c$  đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện:

$$20abc < 30(ab+bc+ca) < 21abc$$

(Trích đề HSG lớp 6 huyện Gia Lộc năm học 2017-2018)

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra  $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10}$ . Để không giảm tính tổng quát giả sử  $a > b > c > 1$ .

Suy ra  $\frac{2}{3} < \frac{3}{c} \Rightarrow 2c < 9$ , do đó  $c \in \{2; 3\}$ .

Với  $c=2$  suy ra  $\frac{2}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{b}$  và  $\frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ .

Do đó  $b \in \{7; 11\}$ .

+ Với  $b=7$ , khi đó từ  $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$  suy ra  $\frac{1}{42} < \frac{1}{a} < \frac{2}{35} \Rightarrow a \in \{19; 23; 29; 31; 37; 41\}$ .

+ Với  $b=11$  từ  $\frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$  suy ra  $\frac{5}{66} < \frac{1}{a} < \frac{6}{55} \Rightarrow a=13$  do  $a > b$ .

Với  $c=3$  từ giả thiết suy ra  $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6 \Rightarrow b=5$  (do  $b > c$ ).

Thay  $b=5$  vào  $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30}$  ta được  $6 < a < \frac{15}{2} \Rightarrow a=7$ .

Vậy các bộ ba số nguyên tố khác nhau  $(a; b; c)$  thỏa mãn là:

$(19; 7; 2), (23; 7; 2), (29; 7; 2), (31; 7; 2), (37; 7; 2), (41; 7; 2), (13; 11; 2), (7; 5; 3)$  và các hoán vị của nó.

**Bài 14:** Tìm tất cả các bộ ba nguyên tố  $(p; q; r)$  sao cho  $pqr = p + q + r + 160$ .

(Trích đề HSG lớp 9 Ninh Bình năm học 2018-2019).

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử  $p \leq q \leq r$ .

Với  $p=2$  thì  $2qr = q + r + 162 \Leftrightarrow 4qr - 2q - 2r = 324$ .

$$\Leftrightarrow 2q(2r-1) - (2r-1) = 325 \Leftrightarrow (2q-1)(2r-1) = 325 = 5^2 \cdot 13$$

$$3 \leq 2q-1 \leq 2r-1 \Rightarrow 9 \leq (2q-1)^2 \leq (2r-1)(2q-1) \Leftrightarrow 9 \leq (2q-1)^2 \leq 325 \Leftrightarrow 3 \leq 2q-1 \leq 18$$

Do  $2q-1$  là ước của  $5^2 \cdot 13$  nên  $2q-1 \in \{5; 13\}$

Nếu  $2q-1=5 \Leftrightarrow q=3 \Rightarrow r=33$  (loại).

Nếu  $2q-1=13 \Leftrightarrow q=7 \Rightarrow r=13$  (thỏa mãn).

$$pqr = p+q+r+160 \Leftrightarrow p(qr-1) - q - r = 160$$

$$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1) + qr-1 - q - r = 160 \Leftrightarrow (qr-1)(p-1) + q(r-1) - (r-1) - 2 = 160$$

$$\Leftrightarrow (qr-1)(p-1) + (q-1)(r-1) = 162$$

Nếu  $p$  lẻ  $\Rightarrow q, r$  lẻ  $\Rightarrow (qr-1)(p-1) + (q-1)(r-1) : 4$  mà 162 không chia hết cho 4  $\Rightarrow$  (vô lí).

Vậy bộ ba số nguyên tố cần tìm là  $(2; 7; 13)$  và các hoán vị.

**Bài 15:** Tìm hai số nguyên tố  $p, q$  sao cho  $8q+1=p^2$ .

(Trích đề HSG lớp 9 Phú Yên năm học 2018-2019).

Lời giải:

Ta có  $p^2$  chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Xét  $p^2$  chia cho 3 dư 0, vì  $p$  là số nguyên tố nên  $p=3$ , suy ra  $q=1$  (vô lí).

Ta có  $p^2$  chia cho 3 dư 1 suy ra  $8q$  chia hết cho 3 mà  $(8; 3)=1$  nên  $q=3 \Rightarrow p=5$  (thỏa mãn).

Vậy  $p=5; q=3$ .

❗ HẾT ❗

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>