

Người làm: Phạm Thị Thảo

Zalo: Phạm Thị Thảo - số đt zalo: 0916727055

Email: thaongocduc@gmail.com

CD5: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ**Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên****A. Trắc nghiệm (nếu có)****B. Tự luận****Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên tố x, y thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Xét $x^2 - 2y^2 = 1$ suy ra $x^2 = 2y^2 + 1$

- Nếu x chia hết cho 3 mà x là số nguyên tố nên $x = 3$

Thay vào tính được $y = 2$ là số nguyên tố (Chọn)

- Nếu x không chia hết cho 3, thì x chia cho 3 dư 1 hoặc dư 2

$\Rightarrow x^2$ chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow x^2 - 1 \vdots 3$

Suy ra $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên y^2 chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố nên y chia hết cho 3

Mà y là số nguyên tố nên $y = 3$

Thay vào tính được $x^2 = 19$ (loại)

Vậy có duy nhất cặp số $(x, y) = (2, 3)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 2. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p + 1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng: $5p + 1 \vdots 6$.

Lời giải

Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $10p; 10p + 1; 10p + 2$ trong đó có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, và $10p + 1$ là số nguyên tố nên p và $10p + 1$ không chia hết cho 2 và cho 3.

mà 3 và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $10p \not\vdots 3, 10p + 1 \not\vdots 3$ do đó
 $(10p + 2) \vdots 3 \Rightarrow 2(5p + 1) \vdots 3 \Rightarrow (5p + 1) \vdots 3$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ $\Rightarrow 5p + 1$ chẵn $\Rightarrow (5p + 1) \vdots 2$

Vì $(5p + 1) \vdots 3$ và $(5p + 1) \vdots 2$ mà 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $(5p + 1) \vdots 6$

Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p + 1$ cũng là số nguyên tố thì $5p + 1 \vdots 6$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $2p + 1$ và $4p + 1$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

- Xét $p = 2$ thì $4p + 1 = 9$ là hợp số (loại)
- Xét $p = 3$ thì $2p + 1 = 7$; $4p + 1 = 13$ đều là số nguyên tố
- Nếu $p > 3$ thì $p \not\vdots 3$ nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
- Xét được $p = 3k + 1$ thì $2p + 1$ là hợp số (loại)
- Xét được $p = 3k + 2$ thì $4p + 1$ là hợp số (loại)
- Kết luận: $p = 3$ thì $2p + 1 = 7$; $4p + 1 = 13$ đều là số nguyên tố

Câu 4. (HSG 7 huyện Hà Trung 2 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - 2b^2 = 3(c^2 - 5d^2 - b^2)$. Chứng minh: $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

1) Ta có: $a^2 - 2b^2 = 3(c^2 - 5d^2 - b^2) \Rightarrow a^2 - 2b^2 + 3b^2 + c^2 + d^2 = 3(c^2 - 5d^2 - b^2) + 3b^2 + c^2 + d^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3(c^2 - 5d^2 - b^2) + 3b^2 + c^2 + d^2 = 4c^2 - 14d^2 = 2 \cdot (2c^2 - 7d^2) : 2$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) : 2 \quad (1)$$

Xét hiệu: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$

$$= a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1)$$

$a(a - 1)$; $b(b - 1)$; $c(c - 1)$; $d(d - 1)$ đều là các tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2

$$\text{Suy ra: } [(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)] : 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a + b + c + d) : 2$ mà $a + b + c + d > 2$ nên $a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 5. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số nguyên tố p và q thỏa mãn: $p^2 - 2q^2 = 17$. Tính $(p + q)^4 + 15$

Lời giải

Ta có:

$$p^2 - 2q^2 = 17$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = 2q^2 + 16$$

$$\Rightarrow (p - 1)(p + 1) = (2q^2 + 16) : 2$$

$$\Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 2$$

$$\text{Mà } (p + 1) - (p - 1) = 2$$

suy ra $p - 1$; $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 8$

$$\Rightarrow (2q^2 + 16) : 8 \text{ mà } 16 : 8 \Rightarrow 2q^2 : 8 \Rightarrow q^2 : 4 \Rightarrow q : 2$$

Mà q là số nguyên tố $\Rightarrow q = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 + 17 = 2 \cdot 2^2 + 17 = 25$

Mà p là số nguyên tố $\Rightarrow p = 5$

$$\text{Ta có: } (p + q)^4 + 15 = (5 + 2)^4 + 15 = 2416$$

Vậy: $(p+q)^4 + 15 = 2416$

Câu 6. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho $m; n; t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có: $m - n = n - t = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

Suy ra $n = t + a; m = n + a = t + 2a$

Do đó ta có $t; t + a; t + 2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3

Xét số dư của ba số nguyên tố $t; t + a; t + 2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2. Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác $(t + a) - t = a; (t + 2a) - t = 2a; (t + 2a) - (t + a) = a$

Suy ra a hoặc $2a$ chia hết cho 3. Mà $(2; 3) = 1$ nên $a : 3 \quad (1)$

Vì m, n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m, n là các số lẻ

$\Rightarrow m - n$ Từ (1) và (2) kết hợp với $(2; 3) = 1$ ta có $a : 6$

Câu 7. (HSG 7 Huyện Quốc Oai 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p + 1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p + 1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ $\Rightarrow 5p$ là số lẻ

$5p + 1$ là số chẵn $\Rightarrow 5p + 1 : 2 \quad (1)$

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $10p; 10p + 1; 10p + 2$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà $10p + 1$ là số nguyên tố nên $10p + 1 \nmid 3$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p \nmid 3$ và ƯCLN $(10; 3) = 1 \Rightarrow 10p \nmid 3$

Do đó $10p + 2 : 3 \Rightarrow 2(5p + 1) : 3$ mà ƯCLN $(2; 3) = 1 \Rightarrow 5p + 1 : 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $5p + 1$ chia hết cho 6

Câu 8. (HSG 7 TP Phúc Yên- Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 1 : 24$.

Lời giải

Ta có $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó $(p - 1)(p + 1) : 8 \quad (1)$.

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p - 1; p; p + 1$. Ta có $(p - 1)p(p + 1) : 3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 nên $(p - 1)(p + 1) : 3 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3; 8) = 1$ và $3 \cdot 8 = 24$ ta suy ra $p^2 - 1 : 24$ (đpcm).

Dạng 2. Áp dụng định lý Fermat

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lý Fermat ta có: $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow p^{q-1} - 1 \vdots q$ và $q^{p-1} - 1 \vdots p$ mặt khác $p^{q-1} \vdots p$ và $q^{p-1} \vdots q$

nên ta có: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots q$; $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p$ mà $(p, q) = 1$ nên: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \vdots p \cdot q$.

Dạng 3. Phương pháp phân tích

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương và $Q(5) - Q(4) = 2023$. Chứng minh rằng $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Lời giải

Đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương nên

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

$$Q(5) = 125a + 25b + 5c + d; \quad Q(4) = 64a + 16b + 4c + d$$

Ta có:

$$\Rightarrow Q(5) - Q(4) = 61a + 9b + c = 2023 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } Q(7) = 343a + 49b + 7c + d; \quad Q(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

$$\Rightarrow Q(7) - Q(2) = 335a + 45b + 5c \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } Q(7) - Q(2) = 30a + (305a + 45b + 5c) = 30a + 10115$$

$$\Rightarrow Q(7) - Q(2) \vdots 5 \quad (a \in \mathbb{N}^*); \quad \text{Mà } Q(7) - Q(2) > 5$$

Do vậy $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên tố x và y thỏa mãn: $3x^2 + 1 = 19y^2$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3x^2 + 1 = 19y^2 \Rightarrow 19y^2 - 3x^2 = 1$$

Vì 1 là số lẻ nên $19y^2 - 3x^2$ là số lẻ $\Rightarrow 19y^2$ và $3x^2$ phải không cùng tính chẵn lẻ.

Do 19 và 3 đều là số lẻ nên x và y không cùng tính chẵn lẻ.

*) Trường hợp 1: y lẻ và x chẵn

Vì x và y các số nguyên tố nên x là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow x = 2$

Khi đó theo đề bài ta có: $3.2^2 + 1 = 19y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{13}{19}$ (loại)

*) Trường hợp 2: y chẵn và x lẻ

Vì x và y các số nguyên tố nên y là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow y = 2$

Khi đó theo đề bài ta có: $3x^2 + 1 = 19.2^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 5; y = 2$ Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>