

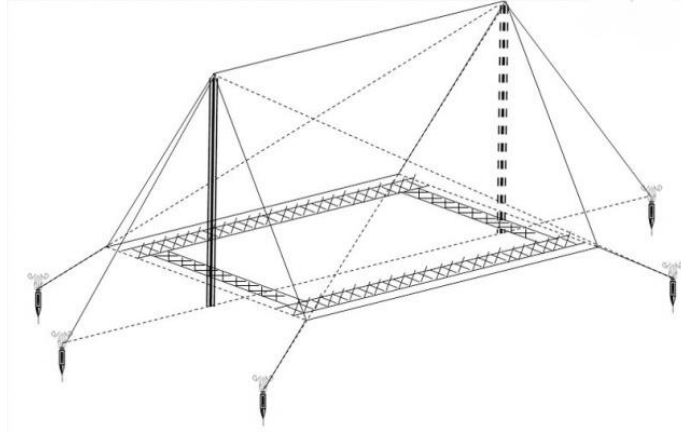
KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II – MÔN TOÁN 11 – KNTT – NĂM HỌC 2023 – 2024
ĐỀ SỐ 10 – THỜI GIAN LÀM BÀI 90 PHÚT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1.** Cho biểu thức $P = \sqrt{x^3}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
- A. $P = x^{\frac{3}{2}}$. B. $P = x^3$. C. $P = x^{\frac{3}{4}}$. D. $P = x$.
- Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y = \log_3(3x+1)$ là
- A. $\mathbb{R}$ B. $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ D. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$
- Câu 3.** Nghiệm của phương trình $\log_5(3x) = 2$ là
- A. $x = 25$. B. $x = \frac{32}{3}$. C. $x = 32$. D. $x = \frac{25}{3}$.
- Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^2$ là
- A. $[4; +\infty)$. B. $(-\infty; 4]$. C. $(4; +\infty)$. D. $(-\infty; 4)$.
- Câu 5.** Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ ?
- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.
- Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng
- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .
- Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , kết luận nào sau đây sai?
- A. $(SAC) \perp (SBC)$. B. $(SAB) \perp (ABC)$. C. $(SAC) \perp (ABC)$. D. $(SAB) \perp (SBC)$.
- Câu 8.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng
- A. AC' . B. AB' . C. AD' . D. AA' .
- Câu 9.** Quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có: $N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$ trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ. Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn lên đến 1 triệu con.
- A. 14,7. B. 14,5. C. 14,6. D. 14,8.
- Câu 10.** Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng, kì hạn 1 năm, thể thức lãi kép, với lãi suất 7,2%. Hỏi nếu không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi thì tối thiểu sau bao nhiêu năm người gửi có được 165 triệu đồng? Biết rằng nếu rút trước kì hạn thì không được tính lãi trong kì hạn đó.
- A. 9 năm. B. 6 năm. C. 8 năm. D. 7 năm.
- Câu 11.** Kim tự tháp kính Louvre là một kim tự tháp được xây bằng kính và kim loại nằm ở giữa sân Napoléon của bảo tàng Louvre, Paris. Toàn bộ kim tự tháp được xây bằng kính cùng các khớp nối kim loại, cao 20,6 m với đáy hình vuông mỗi cạnh 35 m. Trong một sự kiện nghệ thuật, ban tổ chức muốn căng một sợi dây từ tâm của sân nhà đến bốn mặt bên. Hãy ước lượng độ dài tối thiểu của sợi dây.
- A. 13,34m. B. 13m. C. 14m. D. 14,34m.

Câu 12. Một nhóm thám hiểm muốn dựng một cái lều để nghỉ qua đêm như hình.



Biết rằng tấm bạt trải để che phía trên có kích thước dài 8m rộng 5m và được gấp đôi sao cho lều dài 8m. Biết rằng lều sẽ đứng vững nhất khi hai mặt bên của lều tạo với mặt đất một góc 45° . Tính thể tích của lều?

- A. $15m^2$. B. $10m^2$. C. $25m^2$. D. $50m^2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn **đúng** hoặc **sai**.

Câu 13. Cho hàm số $y = \log_2(x-1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (1; +\infty)$.
- b) Hàm số đã cho liên tục trên $(0; +\infty)$.
- c) Đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải đường thẳng $d: x=1$
- d) Đồ thị hàm số đã cho đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{8}}(x-1)^3$ qua trục hoành.

Câu 14. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = a$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của SB, SC, AC . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Góc giữa hai đường thẳng SB, JK bằng 60° .
- b) Hai đường thẳng IJ và AB vuông góc.
- c) Đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB) .
- d) Tam giác SBK vuông tại B .

Câu 15. Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (giờ), r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 200 con và sau 4 giờ có 800 con. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $r < \ln 2$.
- b) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn có được gấp 8 lần số lượng vi khuẩn ban đầu.
- c) Số lượng vi khuẩn có được vượt quá 1 triệu con sau 24 giờ.
- d) Số lượng vi khuẩn tăng thêm đạt hơn 3276700 con sau 28 giờ.

Câu 16. Một nhóm học sinh dựng lều trại có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy bằng a mét và đỉnh hình chóp cách mặt đáy h mét. Gọi V là thể tích của lều trại. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Khi $a = 4$ và $h = 3$ thì $V > 20(m^3)$.
- b) $V < V_1$ với V_1 là thể tích của khối lập phương có cạnh bằng 3 mét.
- c) Khi a tăng lên gấp đôi và h không đổi thì V cũng tăng lên gấp đôi.
- d) Khi h giảm một nửa và a không đổi thì V cũng giảm một nửa.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 17.** Phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $S = (x_1 - x_2)^2$
- Câu 18.** Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)?
- Câu 19.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?
- Câu 20.** Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 262 mét, cạnh bên dài 230 mét? Tính chiều cao kim tự tháp đó?



- Câu 21.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{13}$; $AD = \sqrt{39}$, và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết góc giữa (SCD) và đáy bằng 60° . Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $SI = \frac{1}{2}ID$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và AI bằng bao nhiêu?
- Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 2\sqrt{3}$; $BC = 6$; $ABC = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là 45° . Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.
Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho biểu thức $P = \sqrt{x^3}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A.** $P = x^{\frac{3}{2}}$. **B.** $P = x^3$. **C.** $P = x^{\frac{3}{4}}$. **D.** $P = x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(3x+1)$ là

- A.** $\mathbb{R}$ **B.** $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ **D.** $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Lời giải

Chọn D

ĐKXD: $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$. Vậy TXĐ: $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\log_5(3x) = 2$ là

- A.** $x = 25$. **B.** $x = \frac{32}{3}$. **C.** $x = 32$. **D.** $x = \frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$.

Với điều kiện phương trình đã cho tương đương $3x = 5^2 = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{3}$.

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^2$ là

- A.** $[4; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 4]$ **C.** $(4; +\infty)$ **D.** $(-\infty; 4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x-2 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Câu 5. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ ?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

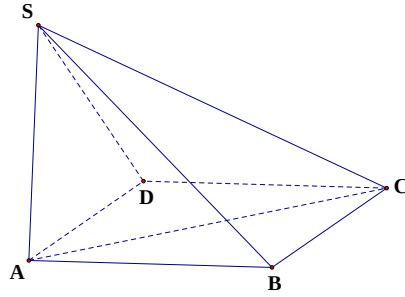
Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ .

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SC với đáy bằng

- A.** 60° . **B.** 30° . **C.** 45° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn C



Hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC . Do đó góc giữa SC và đáy là góc SCA .

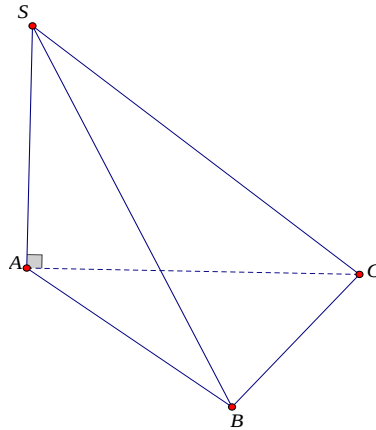
Tam giác SAC có $SC = SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân $\Rightarrow SCA = 45^\circ$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , kết luận nào sau đây sai?

A. $(SAC) \perp (SBC)$. **B.** $(SAB) \perp (ABC)$. **C.** $(SAC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAB), (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB), (SAC) \perp (ABC) \Rightarrow B, C \text{ đúng.}$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB); BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC) \Rightarrow D \text{ đúng.}$

Vậy đáp án sai là A.

Câu 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

A. AC' .

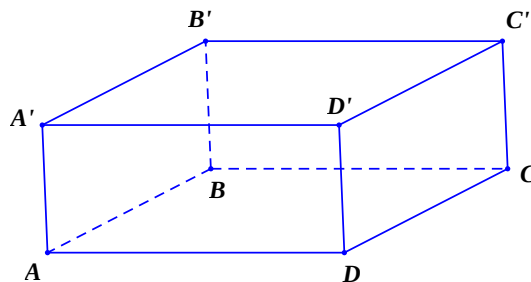
B. AB' .

C. AD' .

D. AA' .

Lời giải

Chọn D



Ta có $d((ABCD), (A'B'C'D')) = AA'$

- Câu 9.** Quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có: $N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$ trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ. Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn lên đến 1 triệu con.
A. 14,7. **B.** 14,5. **C.** 14,6. **D.** 14,8.

Lời giải

Chọn A

1 triệu con = 1 000 000 con.

Ta có sau 1 giờ tăng lên 800 con, suy ra $500 \cdot e^{r \cdot 1} = 800 \Rightarrow r = \ln 1,6$.

Ta có $N(t) = 500 \cdot e^{rt} = 1000000 \Leftrightarrow t = \frac{1}{r} \ln 2000 = \frac{\ln 2000}{\ln 1,6} \approx 14,7$ giờ.

Vậy sau 14,7 giờ.

- Câu 10.** Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng, kì hạn 1 năm, thể thức lãi kép, với lãi suất 7,2% Hỏi nếu không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi thì tối thiểu sau bao nhiêu năm người gửi có được 165 triệu đồng? Biết rằng nếu rút trước kì hạn thì không được tính lãi trong kì hạn đó.
A. 9 năm. **B.** 6 năm. **C.** 8 năm. **D.** 7 năm.

Lời giải

Chọn C

Công thức lãi kép: $T_n = T_0 (1 + r\%)^n$,

trong đó: T_0 là số tiền gửi ban đầu

T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n kì.

$r\%$ là lãi suất một kì.

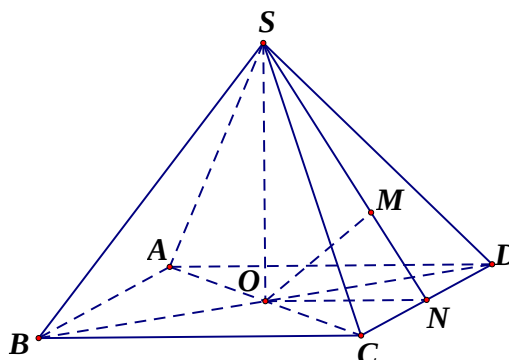
Áp dụng công thức trên ta có:

$$100 \cdot 10^6 (1 + 7,2\%)^n \geq 165 \cdot 10^6 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,072} \left(\frac{165}{100} \right) \approx 7,2.$$

- Câu 11.** Kim tự tháp kính Louvre là một kim tự tháp được xây bằng kính và kim loại nằm ở giữa sân Napoléon của bảo tàng Louvre, Paris. Toàn bộ kim tự tháp được xây bằng kính cùng các khớp nối kim loại, cao 20,6 m với đáy hình vuông mỗi cạnh 35 m. Trong một sự kiện nghệ thuật, ban tổ chức muốn căng một sợi dây từ tâm của sàn nhà đến bốn mặt bên. Hãy ước lượng độ dài tối thiểu của sợi dây.
A. 13,34m. **B.** 13m. **C.** 14m. **D.** 14,34m.

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình chóp $S.ABCD$ có cùng kích thước với Kim tự tháp kính Louvre.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và N là trung điểm CD . Từ O hạ đường vuông góc xuống SN .

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp SO \\ CD \perp ON \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SON) \Rightarrow CD \perp OM.$$

Mà: $OM \perp SN$.

Tập xác định của hàm số là $D = (1; +\infty)$, nên hàm số liên tục trên $(1; +\infty)$ và có đồ thị nằm bên phải đường thẳng $d: x = 1$

Ta có: $y = \log_{\frac{1}{8}}(x-1)^3 = \log_{2^{-3}}(x-1)^3 = \frac{3}{-3} \log_2(x-1) = -\log_2(x-1)$ nên đồ thị hai hàm số

đối xứng qua trục hoành.

a) Đúng: Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (1; +\infty)$.

b) Sai: Hàm số đã cho liên tục trên $(1; +\infty)$.

c) Đúng: Đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải đường thẳng $d: x = 1$

d) Đúng: Đồ thị hai hàm số đối xứng qua trục hoành.

Câu 14. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = a$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của SB, SC, AC . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

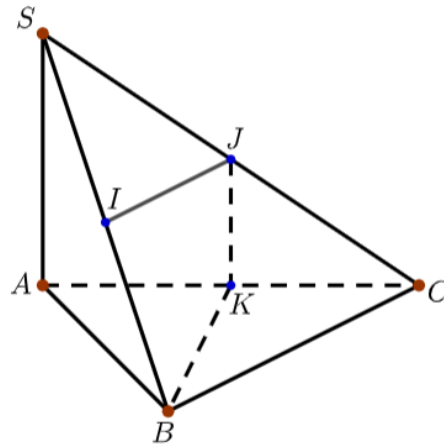
a) Góc giữa hai đường thẳng SB, JK bằng 60° .

b) Hai đường thẳng IJ và AB vuông góc.

c) Đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

d) Tam giác SBK vuông tại B .

Lời giải



Ta có: $SA = AB = a$, $SA \perp AB$ (vì $SA \perp (ABC)$) nên $\triangle SAB$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow \angle ASB = \angle ABS = 45^\circ$$

JK là đường trung bình trong tam giác SAC nên $JK \parallel SA$

$$\text{Suy ra: } (SB, JK) = (SB, SA) = \angle ASB = 45^\circ.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} IJ \parallel BC \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow IJ \perp AB$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Ta có: $\triangle ABC$ cân tại B , K là trung điểm của AC nên $BK \perp AC$

$SA \perp (ABC)$, $BK \subset (ABC)$ nên $BK \perp SA$

Do đó: $BK \perp (SAC) \Rightarrow BK \perp SK \Rightarrow \triangle SBK$ vuông tại K .

a) Sai: Góc giữa hai đường thẳng SB, JK bằng 45° .

b) Đúng: Hai đường thẳng IJ và AB vuông góc.

c) Đúng: Đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

d) Sai: Tam giác SBK vuông tại K .

- Câu 15.** Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (giờ), r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 200 con và sau 4 giờ có 800 con. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:
- $r < \ln 2$.
 - Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn có được gấp 8 lần số lượng vi khuẩn ban đầu.
 - Số lượng vi khuẩn có được vượt quá 1 triệu con sau 24 giờ.
 - Số lượng vi khuẩn tăng thêm đạt hơn 3276700 con sau 28 giờ.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có $s(4) = 800$ và $A = 200$ nên

$$800 = 200.e^{4r} \Leftrightarrow e^{4r} = 4 \Leftrightarrow 4r = \ln 4 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,3466$$

- b) Đúng: Số lượng vi khuẩn có được sau 6 giờ là $s(6) = 200.e^{\frac{\ln 2}{2} \cdot 6} = 1600$ (con)

- c) Sai: Số lượng vi khuẩn có được sau 24 giờ là $s(24) = 200.e^{\frac{\ln 2}{2} \cdot 24} = 819200$ (con).

- d) Sai: Số lượng vi khuẩn tăng thêm sau 28 giờ là $200.e^{\frac{\ln 2}{2} \cdot 28} - 200 = 3276600$ (con).

- Câu 16.** Một nhóm học sinh dựng lều trại có dạng hình chóp tứ giác đều với cạnh đáy bằng a mét và đỉnh hình chóp cách mặt đáy h mét. Gọi V là thể tích của lều trại. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- Khi $a = 4$ và $h = 3$ thì $V > 20$ (m^3).
- $V < V_1$ với V_1 là thể tích của khối lập phương có cạnh bằng 3 mét.
- Khi a tăng lên gấp đôi và h không đổi thì V cũng tăng lên gấp đôi.
- Khi h giảm một nửa và a không đổi thì V cũng giảm một nửa.

Lời giải

- a) Sai.

Đáy lều là hình vuông, có diện tích là: $S = 16$ (m^2).

Lều có chiều cao: $h = 3$ (m).

Thể tích của lều là: $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3 = 16$ (m^3).

- b) Đúng.

Thể tích của khối lập phương là: $V_1 = 3^3 = 27$ (m^3).

- c) Sai.

Khi lều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h thì thể tích của lều là $V = \frac{1}{3} a^2 h$.

Khi a tăng lên gấp đôi và h không đổi thì thể tích lều bằng $\frac{1}{3} (2a)^2 \cdot h = 4 \left(\frac{1}{3} a^2 \cdot h \right) = 4V$.

- d) Đúng.

Khi h giảm một nửa và a không đổi thì thể tích lều bằng $\frac{1}{3} a^2 \cdot \left(\frac{h}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} a^2 \cdot h \right) = \frac{V}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 17.** Phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $S = (x_1 - x_2)^2$

Lời giải

Điều kiện: $2 < x \neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành

$$2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0 \Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4| = 0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x-2)(x-4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 6x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ (x-2)(x-4) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, PT có nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{2}$; $x_2 = 3$. Vậy $S = 2$.

Câu 18. Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)?

Lời giải

Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau t tháng, a là số tiền ban đầu

$$\text{Tháng 1 } (t=1): T_1 = a(1+r)$$

$$\text{Tháng 2 } (t=2): T_2 = a(1+r)^2$$

.....

$$\text{Tháng } n(t=n): T_n = a(1+r)^t$$

$$T_n = a(1+r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)} = \frac{\ln \frac{140}{100}}{\ln(1+1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}$$

$$\text{Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì } n > \frac{t}{12} \approx 2,818$$

Vậy $n = 3$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

$$\log_5(x^2+1) + 1 \geq \log_5(mx^2+4x+m)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$$

$$\text{Bất phương trình nghiệm đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m > 0 \\ 5(x^2+1) \geq mx^2+4x+m \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(dễ thấy $m=0$ không thỏa mãn hệ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta_{(1)} = 16 - 4m^2 < 0 \\ 5 - m > 0 \\ \Delta_{(2)} = 16 - 4(5-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \\ m < 5 \\ m \leq 3 \vee m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

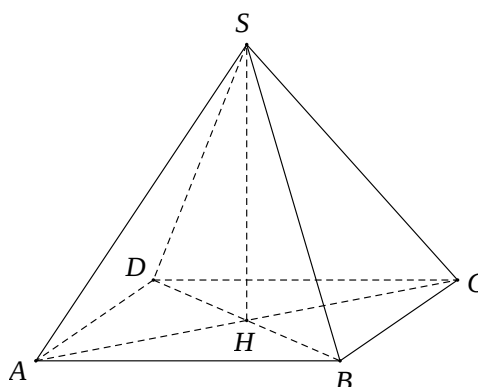
Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của m .

Câu 20. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 262 mét, cạnh bên dài 230 mét? Tính chiều cao kim tự tháp đó?



Lời giải



Ta giả sử các cạnh và đỉnh của kim tự tháp như hình vẽ. Vì $S.ABCD$ hình chóp tứ giác đều nên SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. ($H = AC \cap BD$)

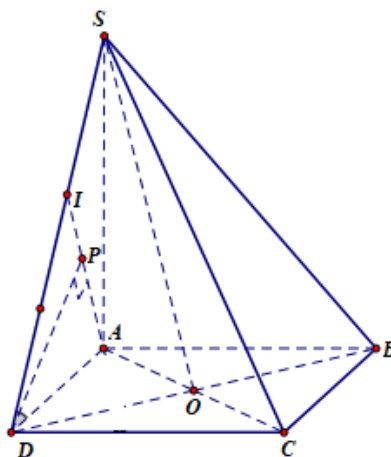
Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{262^2 + 262^2} = 262\sqrt{2}$ (m)

$$\Rightarrow HC = \frac{AC}{2} = 131\sqrt{2} \text{ (m)}$$

Xét $\triangle SHC$ vuông tại H , ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{230^2 - (131\sqrt{2})^2} = \sqrt{18578} \approx 136$ (m). Vậy chiều cao của kim tự tháp là khoảng 136 mét.

Câu 21. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = \sqrt{13}$; $AD = \sqrt{39}$, và SA vuông góc với $(ABCD)$. Biết góc giữa (SCD) và đáy bằng 60° . Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $SI = \frac{1}{2}ID$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và AI bằng bao nhiêu?

Lời giải



Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $SDA = 60^\circ$.

Ta có: $SA = AD$, $\tan 60^\circ = \sqrt{39} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{13}$ và $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2\sqrt{39}$.

Theo giả thiết $SI = \frac{1}{2}ID \Rightarrow SI = \frac{1}{3}SD = \frac{2}{3}\sqrt{39}$ và $ID = \frac{4\sqrt{39}}{3}$.

Ta có: $CD // (ABI) \Rightarrow d(CD, AI) = d(CD, (ABI)) = d(D, (ABI))$.

Trong (SAD) . Kẻ $DP \perp AI$ tại P . Ta có $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp DP$.

Do đó $DP \perp (ABI) \Rightarrow d(D, (ABI)) = DP$.

$$IA^2 = SI^2 + SA^2 - 2SI \cdot SA \cdot \cos ISA = \left(\frac{2}{3}\sqrt{39}\right)^2 + (3\sqrt{13})^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{39} \cdot 3\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{169}{3}$$

$$\Rightarrow IA = \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

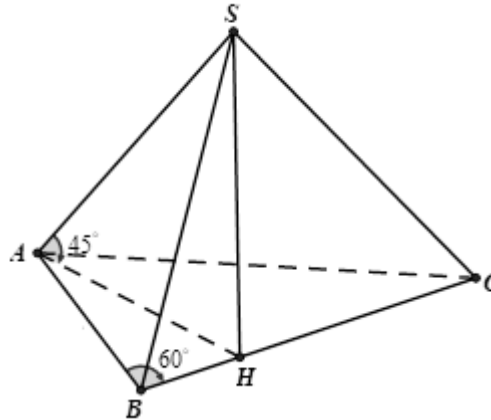
$$S_{\triangle ADI} = \frac{1}{2}DI \cdot DA \cdot \sin ADI = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{39}}{3} \cdot \sqrt{39} \cdot \sin 60^\circ = 13\sqrt{3}$$

$$\text{Và } S_{\triangle ADI} = \frac{1}{2}DP \cdot AI \Rightarrow 13\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13\sqrt{3}}{3} \cdot DP \Rightarrow DP = 6.$$

Vậy $d(CD, AI) = 6$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 2\sqrt{3}$; $BC = 6$; $ABC = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc cạnh BC . Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là 45° . Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) , $H \in BC$.

$(SA, (ABC)) = \angle SAH = 45^\circ \Rightarrow \triangle SHA$ vuông cân $\Rightarrow SH = HA$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{1}{6} \cdot AH \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot AH.$$

Do đó: $V_{\min} \Leftrightarrow AH_{\min} \Leftrightarrow AH \perp BC$ tại H .

$$\text{Ta có: } \sin ABH = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Vậy $V_{\min} = 3 \cdot 3 = 9$.