

Câu 1. (4 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tìm x để A nhận giá trị là một số nguyên

Câu 2. (4 điểm)

- a) Giải phương trình: $\frac{x^2-5x+1}{2x+1} + 2 = -\frac{x^2-4x+1}{x+1}$
- b) Giải phương trình: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Câu 3. (3 điểm)

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^{20} + x + 1$
- b) Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình

$$\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8 \quad \text{và} \quad 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$$

Câu 4. (3 điểm)

- a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$
- b) Cho x, y thỏa mãn $xy \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Câu 5. (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H

- a) Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle ACE$
- b) Chứng minh $BH \cdot HD = CH \cdot HE$
- c) Nối D với E , cho biết $BC = a, AB = AC = b$. Tính độ dài đoạn thẳng DE theo a

ĐÁP ÁN

Câu 1.a) ĐKXĐ: $x \neq 2, x \neq 3$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x-9}{(x-3)(x-2)} - \frac{x+3}{x-2} + \frac{2x+4}{x-3} \\ &= \frac{x^2+2x-8}{(x-3)(x-2)} - \frac{(x+4)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+4}{x-3} \end{aligned}$$

b) Ta có: $A = \frac{x+4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x-3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Kết hợp với ĐKXĐ ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Câu 2.a) $\frac{x^2-5x+1}{2x+1} + 2 = -\frac{x^2-4x+1}{x+1}$ (ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}$)

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+1}{x+1} + 1 + \frac{x^2-5x+1}{2x+1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x+1} + \frac{x^2-3x+2}{2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)(3x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad (TMDK)$$

Vậy $S = \left\{1; 2; \frac{-2}{3}\right\}$

b)

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 1)(x^3 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -1 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có: $S = \{-1; 2\}$

Câu 3.

a)

$$\begin{aligned} x^{20} + x + 1 &= x^{20} - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^{18} - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2(x^9 + 1)(x^9 - 1) + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^9 + 1)(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2 \cdot (x^9 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1) \cdot [x^2 \cdot (x^9 + 1)(x - 1)(x^6 + x^3 + 1) + 1] \end{aligned}$$

b) Giải bất phương trình (1): $\frac{3x - 2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8$

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 2}{5} - \frac{x}{2} \geq \frac{8}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 4}{10} \geq \frac{8}{10} \Leftrightarrow x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 12$$

Giải bất phương trình (2): $1 - \frac{2x - 5}{6} > \frac{3 - x}{4}$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{3-x}{4} + \frac{2x-5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{x-1}{12} \Leftrightarrow \frac{x-13}{12} < 0 \Leftrightarrow x < 13$$

Vì x là nghiệm chung của hai bất phương trình (1), (2) $\Rightarrow x = 12$

Câu 4.

a) Ta có:

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$(*) \Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2)$$

VT của (*) là số chính phương ; VP của (*) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên phải có một số bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = \{(-1; 1); (-2; 2)\}$

b)

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

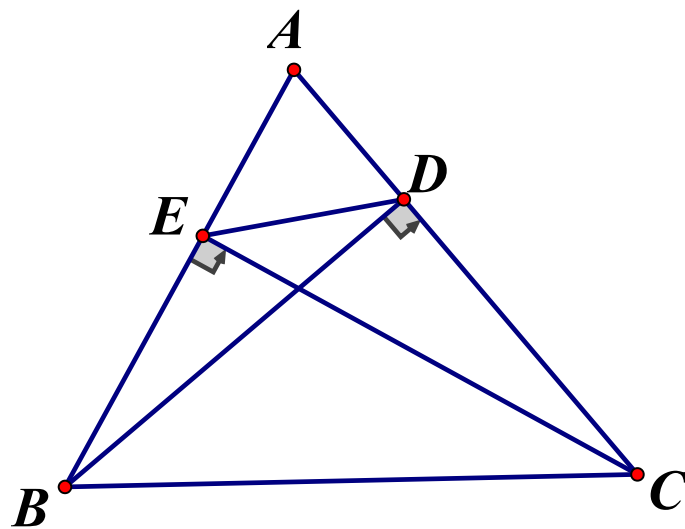
$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0 \Rightarrow$ BĐT (2) luôn đúng nên BĐT (1) đúng.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Câu 5.

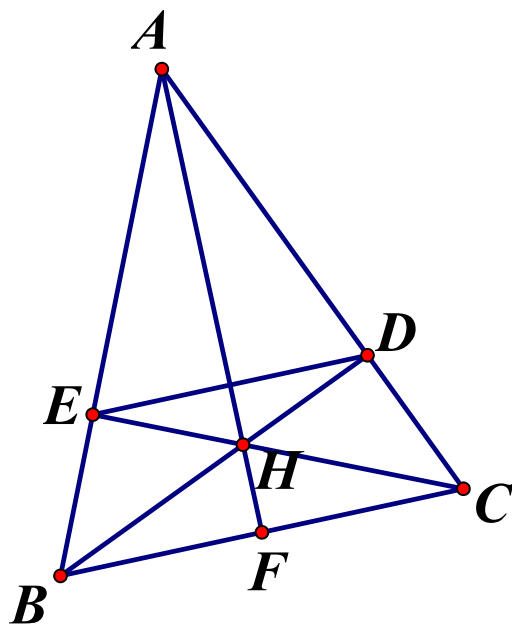


a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: $\angle A$ chung; $\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE (g.g)$

b) Xét $\triangle BHE$ và $\triangle CHD$ có:

$\angle BEH = \angle CDH = 90^\circ$; $\angle BHE = \angle CHD$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle CHD (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow BH \cdot HD = CH \cdot HE$



c) Khi $AB = AC = b$ thì $\triangle ABC$ cân tại A

Suy ra được $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AC}$

Gọi giao điểm của AH và BC là F $\Rightarrow AF \perp BC, FB = FC = \frac{a}{2}$

$$\triangle DBC \sim \triangle FAC \Rightarrow \frac{DC}{FC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow DC = \frac{BC \cdot FC}{AC} = \frac{a^2}{2b}$$

$$\Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AC} = \frac{(AC - DC) \cdot BC}{AC} = \frac{\left(b - \frac{a^2}{2b}\right) \cdot a}{b} = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2}$$