

Chuyên đề 17. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

A. Kiến thức cần nhớ

Phương trình tích

- Phương trình có dạng: $A(x).B(x)=0$; trong đó $A(x)$, $B(x)$ là các đa thức của biến x .
- Phương pháp chung: Muốn giải phương trình $A(x).B(x)=0$ ta giải hai phương trình $A(x)=0$ và $B(x)=0$, rồi lấy tất cả các nghiệm thu được.

$$A(x).B(x)=0 \quad A(x)=0 \text{ hoặc } B(x)=0.$$

$$\text{Mở rộng: } A(x).B(x)....M(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)=0 \\ \dots \\ M(x)=0 \end{cases}$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

$$\text{a) } (5,5-11x)\left[\frac{2(2x-3)}{5}-\frac{4x-5}{4}\right]=0 \quad (1)$$

$$\text{b) } (x^2-4)(x^2+3)(9-4x)=(x^4-x^2-12)(2x+3) \quad (2)$$

$$\text{c) } (2x-1)(x+7)-x=(x+4)(x-4)+(2x-3)^2 \quad (3)$$

Tìm cách giải:

a) Phương trình có dạng: $A(x).B(x)=0$

b) Ta thấy $x^4-x^2-12=(x^2-4)(x^2+3)$. Hai vế có nhân tử chung. Chuyển vế, đặt nhân tử chung sẽ đưa về được về dạng phương trình tích

a) Chuyển vế và biến đổi phương trình đã cho thành phương trình tích.

Giải

$$\text{a) } (1) \Leftrightarrow 5,5-11x=0 \text{ hoặc } \left[\frac{2(2x-3)}{5}-\frac{4x-5}{4}\right]=0$$

$$\text{Với } 5,5-11x=0 \Leftrightarrow -11x=-5,5 \Leftrightarrow x=0,5$$

$$\text{Với } \frac{2(2x-3)}{5}-\frac{4x-5}{4}=0 \Leftrightarrow 8(2x-3)-5(4x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow 16x - 24 - 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow -4x = -1 \Leftrightarrow x = 0,25$$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0,25; 0,5\}$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } x^4 - x^2 - 12 &= x^2 - 4x^2 + 3x^2 - 12 = x^2(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4) \\ &= (x^2 - 4)(x^2 + 3) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó (2)} \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3)(9 - 4x) - (x^2 - 4)(x^2 + 3)(2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3)(9 - 4x - 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)(6 - 6x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ 6 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \text{ (do } x^2 + 3 > 0 \forall x) \text{ (do } x^2 + 3 > 0 \forall x) \\ x = 1 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-2; 1; 2\}$

$$\text{c) (3)} \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 7) - x - (x + 4)(x - 4) - (2x - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x - x - 7 - x - x^2 + 16 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow x(24 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 24 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -3x = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0; 8\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0$ (1)

Tìm cách giải: Ta phải phân tích đa thức ở vế trái thành nhân tử. Thông thường với đa thức bậc cao (≥ 2) ta sử dụng hệ quả của định lý Bézout (Bézout (1730 - 1783) nhà toán học Pháp): Đa thức $f(x)$ chia hết cho $(x - a)$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$. Nói cách khác: Nếu $f(a) = 0$ thì $f(x)$ phải chứa nhân tử $(x - a)$. Ở ví dụ này ta thay x bằng một trong các ước số của 15 ta thấy: $f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 15 = 0$. Như vậy $x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ chứa một nhân tử là $(x - 3)$. Từ đó có cách giải sau:

Giải

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x + 5x - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 3) - 2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2-2x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x^2-2x+5=0 \end{cases}$$

Nếu $x-3=0$ thì $x=3$. Phương trình $x^2-2x+5=0$ vô nghiệm vì $x^2-2x+5=(x-1)^2+4>0, \forall x$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

* *Nhận xét:* Thực chất phương pháp làm trên là nhằm nghiệm để tìm ra một nhân tử chung, từ đó phân tích được về trái thành nhân tử để giải phương trình tích.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $y^2(y^4-29y^2+244)=576$ (1)

* *Tìm cách giải:* Chuyển về rồi thay $y^2=4$ ta thấy về trái nhận giá trị 0. Do đó về trái nhận (y^2-4) là nhân tử chung. Từ đó ta có cách giải sau:

Giải

$$(1) \Leftrightarrow y^6-29y^4+244y^2-576=0$$

$$\Leftrightarrow y^6-4y^4-25y^4+100y^2+144y^2-576=0$$

$$\Leftrightarrow y^4(y^2-4)-25y^2(y^2-4)+144(y^2-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-4)(y^4-25y^2+144)=0 \Leftrightarrow (y^2-4)(y^4-9y^2-16y^2+144)=0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-4)[y^2(y^2-9)-16(y^2-9)]=0 \Leftrightarrow (y^2-4)(y^2-9)(y^2-16)=0$$

$$\Leftrightarrow (y-4)(y-3)(y-2)(y+2)(y+3)(y+4)=0$$

Vậy phương trình (1) có 6 nghiệm là: $y=\pm 2; y=\pm 3; y=\pm 4$

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{-4; -3; -2; 2; 3; 4\}$

* *Nhận xét.* Sau khi phân tích về trái (VT) thành $(y^2-4)(y^4-25y^2+144)$ ta dùng phương pháp tách và thêm bớt, hoặc dùng phương pháp nhằm nghiệm như trên để phân tích

$$y^4-25y^2+144=(y^2-9)(y^2-16).$$

Ví dụ 4. Giải phương trình $(z+3)^3-(z+1)^3=98$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow z^3+9z^2+27z+27-z^3-3z^2-3z-1=98$$

$$\Leftrightarrow 6z^2+24z-72=0 \Leftrightarrow z^2+4z-12=0$$

$$\Leftrightarrow z^2+6z-2z-12=0 \Leftrightarrow (z+6)(z-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z+6=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-6 \\ z=2 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-6; 2\}$.

* *Nhận xét*: Ta có cách giải khác:

Do $z+2$ là trung bình cộng của $z+1$ và $z+3$ nên ta đặt $z+2=y$ phương trình trở thành $(y+1)^3 - (y-1)^3 = 98$.

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 98 \Leftrightarrow 6y^2 = 96$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+2=4 \\ z+2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ z=-6 \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình là $z=-6; z=2$.

Ví dụ 5. Tìm năm số tự nhiên liên tiếp, biết rằng tổng các lập phương của bốn số đầu hơn lập phương của số thứ năm là 8.

* *Tìm cách giải*: Hai số tự nhiên liên tiếp hơn kém nhau 1 đơn vị.

Nếu gọi số nhỏ nhất là a thì các số tiếp theo là $(a+1); (a+2); (a+3); (a+4)$ phân tích.

Dựa theo đầu bài ta lập phương trình

Giải

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $a; a+1; a+2; a+3; a+4; a+5$.

Ta có: $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 + (a+3)^3 - (a+4)^3 = 8$

$$\Leftrightarrow a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^3 + 6a^2 + 12a + 8 + a^3 + 9a^2 + 27a + 27 - a^3 - 12a^2 - 48a - 64 = 8$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 + 6a^2 - 6a - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^3 - 6a^2 + 12a^2 - 24a + 18a - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2(a-2) + 12a(a-2) + 18(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(3a^2 + 12a + 18) = 0 \Leftrightarrow 3(a-2)(a^2 + 4a + 6) = 0$$

Do $a^2 + 4a + 6 = (a+2)^2 + 2 > 0 \forall a$ nên $a-2=0$ hay $a=2$.

Vậy năm số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 2; 3; 4; 5; 6.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $(2x^2 + x - 6) + 3(2x^2 + x - 3) - 9 = 0$.

* *Tìm cách giải*: Ta thấy $2x^2 + x - 6$ và $2x^2 + x - 3$ có các hạng tử chứa ẩn giống nhau. Phần số khác nhau. Ta đặt ẩn phụ.

Giải

Đặt $2x^2 + x - 6 = y$ thì $2x^2 + x - 3 = y + 3$ phương trình trở thành

$$y^2 + 3(y+3) - 9 = 0 \Leftrightarrow y(y+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 6 = 0 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(x+2)=0 & (*) \\ (2x+3)(x-1)=0 & (**) \end{cases}$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow x = 1,5; x = -2$$

$$\text{Từ } (**) \Rightarrow x = -1,5; x = 1.$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình là } \Leftrightarrow S = \{-2; -1,5; 1; 1,5\}.$$

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$$(x-2)(x-3)(x-5)(x-6) = 31(x^2 - 8x + 12) + 128 \quad (1)$$

* *Tìm cách giải:* Xét vế trái nếu nhân nhân tử thứ nhất với nhân tử thứ tư và nhân tử thứ hai nhân nhân tử thứ 3 ta có $(x^2 - 8x + 12)(x^2 - 8x + 15)$. Mỗi nhân tử là một đa thức có cùng hệ số của x^2 và của x .

$$\text{Phương trình trở thành } (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 8x + 15) = 31(x^2 - 8x + 12) + 128$$

Do đó ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ.

Giải

$$(x-2)(x-3)(x-5)(x-6) = 31(x^2 - 8x + 12) + 128$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 8x + 15) = 31(x^2 - 8x + 12) + 128 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } x^2 - 8x + 12 = y \text{ thì } x^2 - 8x + 15 = y + 3$$

$$\text{Khi ấy phương trình (2) trở thành } y(y+3) = 31y + 128$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 3y - 31y - 128 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 32y - 128 = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y+4) - 32(y+4) = 0 \Leftrightarrow (y+4)(y-32) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y+4=0 \\ y-32=0 \end{cases}$$

$$\text{Với } y+4=0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x=4$$

$$\text{Với } y-32=0 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 2x - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-10)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=10 \text{ hoặc } x=-2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 10\}$

Ví dụ 8. Giải các phương trình:

$$a) \quad 3y^3 - 7y^2 - 7y + 3 = 0 \quad (1)$$

$$a) \quad 2y^4 - 9y^3 + 14y^2 - 9y + 2 = 0 \quad (2)$$

* *Tìm cách giải:* Khi giải phương trình ta có thể gặp phương trình có hệ số của các hạng tử đối xứng nhau. Ta gọi các phương trình ấy là phương trình đối xứng. Nếu phương trình đối xứng bậc lẻ thì bao giờ cũng có một nghiệm là -1 . Nếu phương trình đối xứng bậc chẵn thì ta giải bằng cách chia hai vế cho bình phương của ẩn ($\neq 0$) và đặt sau đó đặt ẩn phụ.

Giải

$$a) \quad (1) \Leftrightarrow 3y^3 + 3y^2 - 10y^2 - 10y + 3y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2(y+1) - 10y(y+1) + 3(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(3y^2 - 10y + 3) = 0 \Leftrightarrow (y+1)(3y-1)(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 3y-1=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=\frac{1}{3} \\ y=3 \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm của (8) là } S = \left\{ -1; \frac{1}{3}; 3 \right\}$$

b) Với $y=0$ từ (2) ta có $VT=2 \neq 0$ nên $y=0$ không là nghiệm của (2)

Do $y=0$ không phải là nghiệm của phương trình $\Rightarrow y \neq 0$. Do đó chia hai vế của phương trình cho y^2 ta

$$\text{có } (2) \Leftrightarrow 2\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 9\left(y + \frac{1}{y}\right) + 14 = 0$$

Đặt $t = y + \frac{1}{y}$ thì $t^2 - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2}$. Do đó ta có $2(t^2 - 2) - 9t + 14 = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 10 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 4t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-2=0 \\ 2t-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ 2y^2 + 2 - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ (y-2)(2y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; 2 \right\}$

* *Nhận xét:* Trong phương trình đối xứng, nếu a là nghiệm thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm,

Ví dụ 9. Giải phương trình $(4x+7)(4x+5)(x+1)(2x+1)=9$.

* *Tìm cách giải:* Ta thấy nếu vế trái nhân 4 vào nhân tử thứ ba, nhân 2 vào nhân tử thứ tư thì cả bốn nhân tử đều là các đa thức mà hệ số của x đều là 4. Vế phải nhân với 8 để được phương trình mới tương đương. Sau đó nếu nhân $(4x+7)$ với $(4x+2)$; $(4x+5)$ với $(4x+4)$ ta thấy kết quả xuất hiện các hạng tử giống nhau $16x^2 + 36x$ nên có thể đặt ẩn phụ để giải.

Giải

Ta có: $(4x+7)(4x+5)(x+1)(2x+1)=9$

$$\Leftrightarrow (4x+7)(4x+5)(4x+4)(4x+2)=72$$

$$\Leftrightarrow (16x^2 + 36x + 14)(16x^2 + 36x + 20) = 72$$

Đặt $16x^2 + 36x + 17 = y$, ta có:

$$(y-3)(y+3)=72 \Leftrightarrow y^2 - 9 = 72 \Leftrightarrow y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm 9$$

$$\text{Với } 16x^2 + 36x + 17 = 9 \Leftrightarrow 4x^2 + 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x(x+2) + (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(4x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-0,25 \end{cases}$$

$$\text{Với } 16x^2 + 36x + 17 = -9 \Leftrightarrow 16x^2 + 36x + 26 = 0 \text{ vô nghiệm vì}$$

$$16x^2 + 36x + 26 = \left(4x + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0, \forall x$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; -0,25\}$

C. Bài tập vận dụng

17.1. Giải các phương trình:

a) $(8x+3)(2x-1)=(2x-1)^2$

$$b) \frac{(x^2 - 4)(5x + 2)}{3} = (x^2 - 4) \left(2x + \frac{3}{4} \right)$$

$$c) (x - 5)^2 - 36 = 0$$

$$d) (4x - 3)^2 - 4(x + 3)^2 = 0$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x = -\frac{2}{3}, x = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{Chuyển vế, đặt } (x^2 - 4) \text{ làm nhân tử chung. Tập nghiệm: } S = \left\{ -2; -0,25; 2 \right\}$$

$$c) x = -1, x = 11$$

$$d) x = -0,5, x = 4,5$$

17.2. Giải các phương trình (với y là ẩn số):

$$a) y^3 - 3y - 2 = 0$$

$$b) y^3 + 2y^2 - 4y - 8 = 0$$

$$c) y^3 + 2y^2 + 2020 = 2011$$

$$d) (y - 1)^2(2y + 3) - (y - 1)^2(y + 3) = 5y + 16$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) y^3 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 2y^2 + 2y^2 - 4y + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2(y - 2) + 2y(y - 2) + (y - 2) = 0 \Leftrightarrow (y^2 + 2y + 1)(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)^2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2; y = -1$$

$$b) y^3 + 2y^2 - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

$$c) y^3 + 2y^2 + 2020 = 2011 \Leftrightarrow y^3 + 2y^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 - y^2 - 3y + 3y + 9 = 0 \Leftrightarrow y^2(y + 3) - y(y + 3) + 3(y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 3)(y^2 - y + 3) = 0$$

$$\text{Do } y^2 - y + 3 = \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{11}{4} > 0, \forall y \text{ nên } y = -3$$

$$d) (y-1)^2(2y+3) - (y-1)^2(y+3) = 5y+16$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 y - 5y - 16 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 2y^2 + y - 5y - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 4y^2 + 2y^2 - 8y + 4y - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2(y-4) + 2y(y-4) + 4(y-4) = 0 \Leftrightarrow (y-4)(y^2 + 2y + 4) = 0$$

$$\text{Do } y^2 + 2y + 4 = (y+1)^2 + 3 > 0, \forall y \text{ nên } y = 4$$

17.3. Giải các phương trình (z là ẩn số):

$$a) z^4 + z^3 - 7z^2 - z + 6 = 0$$

$$b) z^6 - 12z^4 + 23z^2 + 36 = 0$$

$$c) 24z^3 - 20z^2 + 4z = 6z^2 - 5z + 1$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là các phương trình, bậc cao. Ta phải sử dụng hệ quả của định lý Bézout (xem ví dụ 2) để xác định nhân tử chung và phân tích thành nhân tử bằng phương pháp tách, thêm bớt.

$$a) z^4 + z^3 - 7z^2 - z + 6 = 0 \Leftrightarrow (z+3)(z-2)(z+1)(z-1) = 0$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; -1; 1; 2\}$

$$b) z^6 - 12z^4 + 23z^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)(z+3)(z-3)(z+2)(z-2) = 0$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; -2; 2; 3\}$

$$c) 24z^3 - 20z^2 + 4z = 6z^2 - 5z + 1 \Leftrightarrow 24z^3 - 26z^2 + 9z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 24z^3 - 12z^2 - 14z^2 + 7z + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow (2z-1)(12z^2 - 7z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2z-1)(12z^2 - 3z - 4z + 1) = 0 \Leftrightarrow (2z-1)[3z(4z-1) - (4z-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2z-1)(3z-1)(4z-1) = 0$$

Ta tìm được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

* **Nhận xét:** Câu c) còn có cách giải khác. Nếu phân tích ngay hai vế thành nhân tử trước ta thấy

$$6z^2 - 5z + 1 = 6z^2 - 3z - 2z + 1 = (2z-1)(3z-1) \text{ và có } 24z^3 - 20z^2 + 4z = 4z(3z-1)(2z-1) \text{ vì thế}$$

$$\text{phương trình trở thành } 4z(2z-1)(3z-1) - (2z-1)(3z-1) = 0 \Leftrightarrow (2z-1)(3z-1)(4z-1) = 0$$

17.4. Giải các phương trình:

$$a) (t^2 - t)^2 + (2t+1)^2 = 13 + 8t$$

$$b) (t^2 + t + 1)t^2 = 10 - t - (t+2)(t^2 + t)$$

$$c) (t^2 + t)^2 - 2(t^2 + t) + 1 = 5(t^2 + t) - 9$$

$$d) (t^2 - 3t + 2)(t^2 - 7t + 12) = 24$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình này khi khai triển đều là phương trình bậc cao vì thế phương pháp chung là chuyển về, khai triển, rút gọn đưa về dạng $A(t) = 0$ sau đó phân tích về trái thành nhân tử. Tuy nhiên nếu xuất hiện các đa thức chứa ẩn có phần hệ số của các ẩn cùng bậc giống nhau, ta có thể đặt ẩn phụ để giải.

a) Chuyển về, khai triển, rút gọn, sau đó phân tích về trái thành nhân tử bằng tách, thêm bớt các hạng tử ta được phương trình:

$$t^4 - 2t^3 + 5t^2 - 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1)(t^2 - t + 6) = 0$$

Suy ra nghiệm của phương trình là $t = -1; t = 2$.

Nhận xét: Còn cách giải khác, dùng phương pháp đặt ẩn phụ:

$$(t^2 - t)^2 + (2t+1)^2 = 13 + 8t \Leftrightarrow (t^2 - t)^2 + 4(t^2 - t) - 12 = 0$$

$$\text{Đặt } t^2 - t = u \text{ ta có phương trình } u^2 + 4u - 12 = 0 \Leftrightarrow (u+6)(u-2) = 0$$

$$\text{Với } u+6=0 \Rightarrow t^2 - t + 6 = 0 \text{ vô nghiệm vì } t^2 - t + 6 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0, \forall t$$

$$\text{Với } u-2=0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \text{ nên } t=2; t=-1.$$

b) *Cách 1:* Chuyển về, khai triển, rút gọn sau đó phân tích thành nhân tử đưa về dạng:

$$(t-1)(t+2)(t^2 + t + 5) = 0.$$

$$\text{Cách 2: Ta biến đổi bài toán như sau } (t^2 + t + 1)t^2 = 10 - t - (t+2)(t^2 + t)$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + t + 1)t^2 = 12 - (t+2) - (t+2)(t^2 + t)$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + t + 1)t^2 = 12 - (t+2)(t^2 + t + 1) \Leftrightarrow (t^2 + t + 1)(t^2 + t + 2) - 12 = 0$$

$$\text{Đặt } t^2 + t + 1 = u. \text{ Phương trình trở thành } u(u+1) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 + u - 12 = 0 \Leftrightarrow (u-3)(u+4) = 0. \text{ Hay } (t^2 + t - 2)(t^2 + t + 5) = 0$$

Với $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -2$

Với $t^2 + t + 5 = 0$ vô nghiệm vì $t^2 + t + 5 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \forall t$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-2; 1\}$

c) $(t^2 + t)^2 - 2(t^2 + t) + 1 = 5(t^2 + t) - 9$

Đặt $t^2 + t = z$ phương trình trở thành $z^2 - 2z + 1 = 5z - 9$

$\Leftrightarrow z^2 - 7z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z - 5) = 0$

Từ đó có $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -2$

$t^2 + t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 4)(t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 4$ hoặc $t = -5$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-5; -2; 1; 4\}$

d) $(t^2 - 3t + 2)(t^2 - 7t + 12) = 24$

$\Leftrightarrow (t - 1)(t - 2)(t - 3)(t - 4) = 24 \Leftrightarrow (t^2 - 5t + 4)(t^2 - 5t + 6) - 24 = 0$

Đặt $t^2 - 5t + 4 = y$ phương trình trở thành $y(y + 2) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow (y + 6)(y - 4) = 0 \Leftrightarrow y = -6$ hoặc $y = 4$.

* Với $y + 6 = 0$ ta có $t^2 - 5t + 10 = 0$ vô nghiệm vì

$t^2 - 5t + 10 = \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall t$

* Với $y - 4 = 0$ ta có $t^2 - 5t = 0 \Leftrightarrow t(t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 5$

Phương trình có hai nghiệm là $t = 0; t = 5$.

Nhận xét. Ta có thể đặt $t^2 - 5t + 5 = u$ thì phương trình trở thành

$(u - 1)(u + 1) - 24 = 0 \Leftrightarrow (u - 5)(u + 5) = 0$

Hay $(t^2 - 5t)(t^2 - 5t + 10) = 0$. Giải ta cũng được kết quả trên.

17.5. Giải các phương trình:

a) $(4x + 3)^3 - (2x - 5)^3 = (2x + 8)^3$

b) $(3x + 2016)^3 + (3x - 2019)^3 = (6x - 3)^3$

$$c) (2x-7)^3 + (9-2x)^3 = 152$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Trong các bài toán xuất hiện các dạng $(a+b)^3$; $(a-b)^3$ và $a^3 \pm b^3$

Lưu ý: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$ và $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

a) Đặt $y=4x+3$; $z=2x-5$ thì $y-z=2x+8$. Ta có:

$$y^3 - z^3 = (y-z)^3 \Leftrightarrow y^3 - z^3 = y^3 - z^3 - 3yz(y-z) \Leftrightarrow 3yz(y-z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 4x+3=0 \\ 2x-5=0 \\ 2x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-0,75 \\ x=2,5 \\ x=-4 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4; -0,75; 2,5\}$

b) Đặt $u=3x+2016$; $v=3x-2019$ thì $u+v=6x-3$.

Phương trình trên trở thành $u^3 + v^3 - (u+v)^3 = 0$ hay

$$u^3 + v^3 - [u^3 + v^3 + 3uv(u+v)] = 0 \Leftrightarrow -3uv(u+v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \\ u+v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2016=0 \\ 3x-2019=0 \\ 6x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-672 \\ x=673 \\ x=0,5 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-672; 0,5; 673\}$

$$c) (2x-7)^3 + (9-2x)^3 = 152.$$

Đặt $2x-8=y$ thì $2x-7=y+1$; $9-2x=1-y$.

Do đó phương trình trở thành $(y+1)^3 + (1-y)^3 = 152$

Khai triển, rút gọn (hoặc dùng hằng đẳng thức $a^3 + b^3$, ta được

$$6y^2 + 2 = 152 \Leftrightarrow 6y^2 - 150 = 0 \Leftrightarrow 6(y+5)(y-5) = 0$$

$$- \text{ Với } y+5=0 \text{ thì } 2x-8+5=0 \Leftrightarrow x=1,5$$

$$- \text{ Với } y-5=0 \text{ thì } 2x-8-5=0 \Leftrightarrow x=6,5$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1,5; 6,5\}$

17.6. Cho phương trình

$$a) (2x-5)^4 + (2x-3)^4 = 16$$

$$b) (4x-19)^4 + (4x-20)^4 = (39-8x)^4$$

$$c) (5x+2,5)^4 - (5x-1,5)^4 = 80$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Lưu ý dạng $a^4 - b^4$ và $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

$$a) \text{ Đặt } 2x-4=y \text{ phương trình trở thành } (y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 16$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 + 7) = 0$$

$$\text{Do } y^2 + 7 > 0, \forall y \text{ nên } y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-4)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=0 \\ 2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5 \\ x=1,5 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{1,5; 2,5\}$.

Chú ý: Có thể đặt $2x-5=y$ và $2x-3=z$ ta có $y^4 - z^4 = (y-z)^4$ (bạn đọc tự giải).

$$b) \text{ Đặt } 4x-19=y, 4x-20=z \text{ thì } y+z=8x-39 \text{ ta có } y^4 + z^4 - (y+z)^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + z^4 - y^4 - 4y^3z - 6y^2z^2 - 4yz^3 - z^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y^3z - 6y^2z^2 - 4yz^3 = 0 \Leftrightarrow 4yz \left(y^2 + \frac{6}{4}yz + z^2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4yz \left[\left(y + \frac{3}{4}z \right)^2 + \frac{7}{16}z^2 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-19=0 \\ 4x-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4,75 \\ x=5 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{4,75; 5\}$

$$c) (5x+2,5)^4 - (5x-1,5)^4 = 80$$

$$\text{Đặt } 5x+0,5=y \text{ phương trình trở thành } (y+2)^4 - (y-2)^4 = 80$$

$$\text{Ta dùng khai triển của } (y+2)^4 = y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16$$

$$(y-2)^4 = y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16$$

Thay vào, chuyển vế, rút gọn được phương trình $y^3 + 4y - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow y^3 - 1 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y + 1) + 4(y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y + 5) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ vì } y^2 + y + 5 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \forall y$$

$$\text{Do đó } 5x + 0,5 = 1 \Leftrightarrow x = 0,1$$

* **Nhận xét:** Cách giải khác của c) (bạn đọc tự giải tiếp):

$$(y+2)^4 - (y-2)^4 = \left[(y+2)^2 - (y-2)^2\right] \cdot \left[(y+2)^2 + (y-2)^2\right] = 8y \cdot (2y^2 + 8)$$

$$\text{Phương trình trở thành } 16y^3 + 64y - 80 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 4y - 5 = 0$$

$$\text{17.7. Cho phương trình } x^3 - 3ax^2 + 2,5ax + 6a = 0$$

a) Giải phương trình với $a = 2$;

a) Tìm a để phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $x^3 - x - 6 = 0$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $a = 2$ phương trình trở thành $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x-4) = 0. \text{ Suy ra } x = -1, x = 3, x = 4.$$

$$\text{b) } x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{vì } x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0, \forall x.$$

$$\text{Để } x = 2 \text{ là nghiệm ta phải có: } 8 - 12a + a + 6a = 0 \Leftrightarrow a = 8.$$

$$\text{17.8. Cho phương trình } (x-2)^3 - (m^2 - 2m + 7)(x-2) - 3(m^2 - 2m - 2) = 0$$

a) Tìm các giá trị của m để một trong các nghiệm của phương trình là 3;

a) Giải phương trình với các giá trị đó của m .

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Thay $x = 3$ ta có $-4m^2 + 8m = 0$ tức là $m^2 - 2m = 0$ nên $m = 0$ hoặc $m = 2$.

b) Thay $m^2 - 2m = 0$ ta có: $(x-2)^3 - 7(x-2) + 6 = 0$

$$\text{Đặt } x-2 = y \text{ ta có } y^3 - 7y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-2)(y+3) = 0$$

$$y = 1; y = 2; \text{ và } y = -3$$

$$\text{Ta có } x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 3; x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4; x-2 = -3 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x = -1; x = 3; x = 4$

17.9. Giải các phương trình sau với tham số m:

a) $9mx^3 - 18x^2 - mx + 2 = 0$

b) $4m^2x^3 + 45 = x(36 + 5m^2x)$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $9mx^3 - 18x^2 - mx + 2 = 0 \Leftrightarrow (mx - 2)(9x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (mx - 2)(3x - 1)(3x + 1) = 0$

* Nếu $m \neq 0$ thì $\begin{cases} mx - 2 = 0 \\ (3x + 1)(3x - 1) = 0 \end{cases}$. Tìm được $x = \frac{2}{m}; x = \pm \frac{1}{3}$

* Nếu $m = 0$ thì $x = \pm \frac{1}{3}$

b) $4m^2x^3 + 45 = x(36 + 5m^2x) \Leftrightarrow (mx - 3)(mx + 3)(4x - 5) = 0$

* Nếu $m \neq 0$ thì $\begin{cases} mx - 3 = 0 \\ mx + 3 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \end{cases}$. Tìm được $m = \pm \frac{3}{x}; x = 1, 25$

* Nếu $m = 0$ thì $x = 1, 25$

17.10. Giải các phương trình:

a) $(4x - 5)^2(2x - 3)(x - 1) = 1,5$

b) $(2x + 7)(x + 3)^2(2x + 5) = 18$

c) $(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 30$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhân 2 vào nhân tử thứ hai, nhân 4 vào nhân tử thứ ba ở vế trái và nhân 8 vào vế phải ta có:

$(4x - 5)^2(2x - 3)(x - 1) = 1,5 \Leftrightarrow (4x - 5)^2(4x - 6)(4x - 4) = 12$

Đặt $4x - 5 = t$. Ta có: $t^2(t + 1)(t - 1) = 12 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (t^2 - 4)(t^2 + 3) = 0$

* Với $t^2 - 4 = 0$ tức là $(4x - 5)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (4x - 5 - 2)(4x - 5 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1,75$ hoặc $x = 0,75$

* Với $t^2 + 3 = 0$ vô nghiệm vì $t^2 + 3 > 0 \forall t$.

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{0,75; 1,75\}$

$$b) (2x+7)(x+3)^2(2x+5)=18$$

Nhân hai vế của phương trình với 4 ta được

$$(2x+7)(2x+6)^2(2x+5)=72. \text{ Đặt } 2x+6=y \text{ phương trình trở thành}$$

$$(y+1)y^2(y-1)=72 \Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 9)(y^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+3)(y^2 + 8) = 0. \text{ Do } y^2 + 8 > 0, \forall y$$

Từ đó có $x = -1,5$ hoặc $x = -4,5$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4,5; -1,5\}$.

$$c) (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x-3)(2x-5) = 6$$

$$\Leftrightarrow (2x-2)(2x-4)(2x-3)(2x-5) = 24$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 14x + 10)(4x^2 - 14x + 12) = 24$$

Đặt $4x^2 - 14x + 11 = y$ phương trình trở thành $(y-1)(y+1) = 24$

$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = 24 \Leftrightarrow (y-5)(y+5) = 0$$

$$- \text{ Với } y-5=0 \text{ ta có } 4x^2 - 14x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(4x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ hoặc } x=0,5$$

$$- \text{ Với } y+5=0 \text{ ta có } 4x^2 - 14x + 16 = 0 \text{ vô nghiệm vì}$$

$$4x^2 - 14x + 16 = \left(2x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall x$$

Vậy tập nghiệm là $S = \{0,5; 3\}$

17.11. Giải các phương trình:

$$a) 2z^3 - 3z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$b) 3z^4 - 13z^3 + 16z^2 - 13z + 3 = 0$$

$$c) 2z^4 + z^3 - 6z^2 + z + 2 = 0$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Phương trình trong câu a) là phương trình đối xứng bậc lẻ (bậc 3) nên có một trong các nghiệm là -1.

Phân tích vế trái thành nhân tử (lưu ý chắc chắn có một nhân tử chung là $(z+1)$ vì một trong các nghiệm là -1)

$$\text{Ta có } 2z^3 - 3z^2 - 3z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-2)(2z-1) = 0$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 2 \right\}$

b) Phương trình trong câu b) là các phương trình đối xứng bậc chẵn (bậc 4). Ta nhận thấy $z = 0$ đều không phải là nghiệm nên $z \neq 0$. Ta chia hai vế của phương trình cho z^2 và dùng phương pháp đặt ẩn phụ để giải tiếp. Ta nhận thấy $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $z \neq 0$. Ta chia hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$ được phương trình tương đương:

$$3z^2 - 13z + 16 - \frac{13}{z} + \frac{3}{z^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 13\left(z + \frac{1}{z}\right) + 16 = 0$$

Đặt $z + \frac{1}{z} = t$ thì $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$. Khi ấy phương trình trở thành:

$$3(t^2 - 2) - 13t + 16 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 13t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(3t - 10) = 0$$

Với $t - 1 = 0$ tức là $z + \frac{1}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

Vô nghiệm vì $z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall z$

Với $3t - 10 = 0$ tức là $3z + \frac{3}{z} - 10 = 0 \Leftrightarrow 3z^2 - 10z + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 3z^2 - 9z - z + 3 = 0 \Leftrightarrow 3z(z - 3) - (z - 3) = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(3z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - 3 = 0 \\ 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}$$

c) Giải tương tự câu b), chia hai vế của phương trình cho $z^2 \neq 0$ được phương trình tương đương:

$$2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 6 = 0$$

Đặt $z + \frac{1}{z} = u$ thì $z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$. Khi ấy phương trình trở thành:

$$2(u^2 - 2) + u - 6 = 0 \Leftrightarrow 2u^2 + u - 10 = 0 \Leftrightarrow (u - 2)(2u + 5) = 0$$

Từ đó ta tìm được tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -2; -0,5; 1 \right\}$

17.12. Tìm bốn số tự nhiên liên tiếp sao cho lập phương của một số bằng tổng các lập phương của ba số kia.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995 - 1996)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất là x thì $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \vee x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x$$

17.13. Giải phương trình $(x+9)(x+10)(x+11) - 8x = 0$

(Tuyển sinh lớp 10 khối THPT chuyên Toán - Tin ĐHSPT Vinh, năm học 2002 - 2003)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $y = x+15$, ta có: $(y-6)(y-5)(y-4) - 8(y-15) = 0$

$$\Leftrightarrow y(y^2 - 15y + 66) = 0. \text{ Do } y^2 - 15y + 66 = \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0; \forall y$$

$$\Rightarrow y=0 \Rightarrow x=-15. \text{ (Cách khác: Đặt } x+10=y. \text{ Bạn đọc tự giải)}$$

17.14. Giải phương trình $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

(Thi vào lớp 10 THPT chuyên Trần Đại Nghĩa TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi phương trình thành $(x-2)(x-3)(x-4)(x+5) = 0$

Tập nghiệm $S = \{-5; 2; 3; 4\}$

17.15. Giải phương trình $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$.

(Đề thi tuyển vào lớp 10 chuyên ĐHSPTNN Hà Nội, năm học 2004 - 2005)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi phương trình thành $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 24.$$

Đặt $x^2 + 5x + 5 = t$ ta có: $(t-1)(t+1) = 24 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$.

Xét với $t=5$ và $t=-5$, ta tìm được hai nghiệm là $x=0$ và $x=-5$.

17.16. Giải phương trình $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2005 - 2006)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi thành $(x+1)(6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6) = 0$.

Ta tìm được $x=-1$ là 1 nghiệm. Với $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$, do $x=0$ không là nghiệm nên

chia hai vế cho x^2 ta được:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0. \text{Đặt } x + \frac{1}{x} = y \text{ thì } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Phương trình trở thành $6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0 \Leftrightarrow (2y - 5)(3y - 10) = 0$

Thay $y = x + \frac{1}{x}$ vào $2y - 5 = 0$ giải ra ta tìm được $x = 2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$

Thay $y = x + \frac{1}{x}$ vào $3y - 10 = 0$ giải ra ta tìm được $x = 3$ hoặc $x = \frac{1}{3}$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-1; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2; 3\right\}$

17.17. Giải phương trình $(3x+4)(x+1)(6x+7)^2 = 6$.

(Tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhân $(3x+4)$ với 2; $(x+1)$ với 6 và vế phải với 12 ta được .

$(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$. Đặt $6x+7 = y$ phương trình trở thành

$$(y+1)(y-1)y^2 = 72 \Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 9)(y^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 3$$

(do $y^2 + 8 > 0, \forall y$). Giải tiếp ta tìm được nghiệm $x = -\frac{2}{3}$ và $x = -\frac{5}{3}$

17.18. Giải phương trình $(x^2 - 2x)^2 + 3x^2 - 6x = -2$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 huyện Thường Tín - Hà Tây, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$(x^2 - 2x)^2 + 3x^2 - 6x = -2 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) + 2 = 0$$

Đặt $x^2 - 2x = y$ ta có: $y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y+2) = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = -2$. Với

$$x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Với $x^2 - 2x = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 0$ vô nghiệm

17.19. Giải phương trình $(4x+3)^2(2x+1)(x+1) = 810$.

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên Tin Quốc học Huế, năm học 2019 - 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$(4x+3)^2(2x+1)(x+1)=810 \Leftrightarrow [8(2x^2+3x)+9](2x^2+3x+1)=810$$

Đặt $2x^2+3x=y$ phương trình trở thành

$$(8y+9)(y+1)-810=0 \Leftrightarrow 8y^2+17y-801=0 \Leftrightarrow (y-9)(8y+89)=0$$

$$\star \quad y-9=0 \text{ tức là } 2x^2+3x-9=0 \Leftrightarrow (x+3)(2x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ hoặc } x=1,5.$$

$$\star \quad 8y+89=0 \text{ tức là } 16x^2+24x+89=0 \text{ vô nghiệm}$$

$$\text{vì } 16x^2+24x+89=(4x+3)^2+80>0, \forall x.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-3$ và $x=1,5$.

Cách khác: Biến đổi phương trình thành $(4x+3)^2(4x+2)(4x+4)=6480$.

Đặt $4x+3=y$. (Bạn đọc tự giải tiếp)

17.20. Giải phương trình $x^3+3x-140=0$.

Đề thi tuyển vào lớp 10 THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$x^3+3x-140=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+5x^2-25x+28x-140=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+5x+28)=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ do } x^2+5x+28=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{87}{4}>0, \forall x$$

17.21. Giải phương trình $(x^2-2x)^2+3(x-1)=x(2x-1)$

(Đề thi tuyển vào lớp 10 THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$(x^2-2x)^2+3(x-1)=x(2x-1) \Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0$$

$$\text{Đặt } x^2-2x=y \text{ phương trình thành } y^2-2y-3=0 \Leftrightarrow (y-3)(y+1)=0$$

Thay $y=x^2-2x$ vào ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1; 3\}$

17.22. Giải phương trình $(2x^2-x)^2+2x^2-x-12=0$.

(Thi tuyển sinh lớp 10 chuyên TP Hồ Chí Minh, năm học 2010 - 2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $2x^2-x=u$ phương trình trở thành:

$$u^2 + u - 12 = 0 \Leftrightarrow (u - 3)(u + 4) = 0 \Leftrightarrow u - 3 = 0 \text{ hoặc } u + 4 = 0.$$

$$\star \quad u - 3 = 0 \text{ ta có } 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 1,5.$$

$$\star \quad u + 4 = 0 \text{ ta có } 2x^2 - x + 4 = 0 \text{ vô nghiệm vì } 2x^2 - x + 4 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} > 0, \forall x.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 1,5$.

$$\mathbf{17.23.} \text{ Giải phương trình } (x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35.$$

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35 \Leftrightarrow \left[(x - 2)^2 + 7\right] \left[(x^2 - 4)^2 + 5\right] = 35$$

$$(x - 2)^2 \geq 0, \forall x \quad (x^2 - 4)^2 \geq 0, \forall x \text{ nên vế trái không nhỏ hơn 35.}$$

$$\text{Ta suy ra } \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ (x^2 - 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Vậy tập nghiệm của phương trình là } x = 2$$