

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LŨY THỪA, MŨ LOGARIT

CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

MỨC ĐỘ 3: VẬN DỤNG – ĐỀ SỐ 1

CHUYÊN ĐỀ : HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Câu 1. Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{\left(x + \frac{1}{2x}\right)} = 5$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 2. Gọi x và y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $T = a + b$

- A. $T = 6$. B. $T = 4$. C. $T = 11$. D. $T = 8$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 < 2$

- A. $0 < m < 2$ B. $m > 0$ C. $0 < m < 4$ D. $m < 9$

Câu 4. Cho phương trình $(m - 1) \log_{\frac{1}{2}}^2 (x - 2)^2 + 4(m - 5) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x - 2} + 4m - 4 = 0$ (với m là tham

số). Gọi $S = [a; b]$ là tập các giá trị của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{5}{2}; 4 \right]$. Tính $a + b$?

- A. $\frac{7}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. -3 . D. $\frac{1034}{273}$

Câu 5. Biết $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_3 (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$

- A. 13 B. 11 C. 14 D. 16

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$

- A. $m \in (-\infty; 0]$ B. $m \in (0; +\infty)$
C. $m \in (0; 1)$ D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

Câu 7. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y} - z}$. Gọi $S = xy + yz + zx$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $S \in (1; 2016)$ B. $S \in (1; 2017)$ C. $S \in (1; 2018)$ D. $S \in (2016; 2017)$

Câu 8. Tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $(3m+1)18^x + (2-m)6^x + 2^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là

- A. $(-\infty; 2)$ B. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$ C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ D. $(-\infty; -2]$

Câu 9. Cho n số nguyên dương và $a > 0, a \neq 1$. Tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

- A. $n = 2016$. B. $n = 2017$. C. $n = 2018$. D. $n = 2019$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5) \cdot 3^x + 9(2x+1) \geq 0$ là

- A. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ B. $[1; 2]$
C. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ D. $[0; 1] \cup [2; +\infty)$

Câu 11. Tìm số nghiệm của phương trình $2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2017^x + 2018^x = 2017 - x$

- A. 2017 B. 1 C. 0 D. 2016

Câu 12. Tổng số nghiệm của phương trình $(x-1)^2 \cdot 2^x = 2x(x^2-1) + 4(2^{x-1} - x^2)$ bằng

- A. 4 B. 5 C. 2 D. 3

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + (2m^2 - 5) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 1 B. 5 C. 2 D. 4

Câu 14. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $(-\infty; 2)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(1; 2)$ D. $(0; 2)$

Câu 15. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\log_a 2017 + \frac{1}{2^2} \log_{\sqrt{a}} 2017 + \frac{1}{2^4} \log_{\sqrt[4]{a}} 2017 + \frac{1}{2^6} \log_{\sqrt[6]{a}} 2017 + \dots + \frac{1}{2^{2n}} \log_{\sqrt[2n]{a}} 2017 = \log_a 2017^2 - \frac{\log_a 2017}{2^{2018}}$$

Với $0 < a \neq 1$

- A. $n = 2016$. B. $n = 2018$. C. $n = 2017$. D. $n = 2019$.

Câu 16. Số giá trị nguyên của m để phương trình $(m+1) \cdot 16^x - 2(2m-3)4^x + 6m+5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 17. Tập các giá trị của m để phương trình $4(\sqrt{5}+2)^x + (\sqrt{5}-2)^x - m + 2 = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt là

- A. $(-\infty; 2)$ B. $(6; 8)$ C. $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$ D. $(6; 7)$

Câu 18. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log(x+2y) = \log x + \log y$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x}$$
 là

- A. $\frac{29}{5}$ B. $\frac{32}{5}$ C. 6 D. $\frac{31}{5}$

Câu 19. Cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0$, m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho phương trình trên có hai nghiệm dương phân biệt. Biết S là một khoảng có dạng $(a; b)$. Tính $b - a$

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 2

Câu 20. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$

- A. $m \geq 3$ B. $m \leq \frac{7}{2}$ C. $m \geq \frac{7}{2}$ D. $m \leq 3$

Câu 21. Cho phương trình $2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$. Biết

$S = (a; b) \cup (c; d)$, $a < b < c < d$ là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 > 1$. Tính giá trị biểu thức $A = a + b + 5c + 2d$

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \leq \log_x 2$ là

- A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \cup (2; +\infty)$ B. $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 2]$ C. $(0; 1) \cup (1; 2]$ D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Câu 23. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $a + b$.

- A. 3 B. 21 C. 32 D. 34

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m - 5 = 0$ có nghiệm dương.

- A. 2 B. 5 C. 3 D. 4

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\frac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x}$ có nghiệm duy nhất

- A. $a \in \mathbb{R}$ B. Không tồn tại a . C. $-1 < a < 0$ D. $a > 0$

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để phương trình sau có nghiệm duy nhất $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^8} + a + 1 = 0(*)$

- A. $a < -1$ B. Không tồn tại a . C. $a = 1$ D. $a < 1$

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27}{8} \cdot \frac{12+x - \sqrt{x^2+24x}}{12+x + \sqrt{x^2+24x}}$ là

- A. $0 \leq x \leq 1$ B. $0 \leq x < 1$ C. $x > 0$ D. $0 \leq x < \frac{1}{2}$

Câu 28. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên chẵn $(x; y)$ thỏa mãn $2^x - 3^y = 55$?

- A. 8 B. 2 C. 16 D. 1

Câu 29. Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện dưới đây $2^{\sqrt{3}x^2} \cdot 4^{\sqrt{3}y^2} \cdot 16^{\sqrt{3}z^2} = 128$ và $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2$

- A. 3 B. 4 C. 1 D. 2

Câu 30. Cho phương trình $(\sqrt{5} + 1)^x + 2m(\sqrt{5} - 1)^x = 2^x$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

- A. $0 < m \leq \frac{1}{8}$ B. $m \leq 0; m = \frac{1}{8}$ C. $m < 0; m = \frac{1}{8}$ D. $m < 0$

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$ có nghiệm thực $x \in (0; 1)$ là

- A. $m \leq \frac{1}{4}$ B. $m < \frac{1}{4}$ C. $m > \frac{1}{4}$ D. $m \leq 0$

Câu 32. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm thực phân biệt là

- A. 3 B. 4 C. 5 D. Vô số

Câu 33. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phân tử của S bằng

- A. 8 B. $4 + \sqrt{2}$ C. $8 + \sqrt{2}$ D. $6 + \sqrt{2}$

Câu 34. Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

- A. 2019 B. 2018 C. 2017 D. 2020

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Câu 35. Có bao nhiêu số nguyên dương m để bất phương trình $m \cdot 9^x - (2m+1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;1)$?

- A. 7 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 36. Tìm m để phương trình $4^x - (m+1)2^x + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

- A. $m > 1$ B. $m > 0$ C. $m > 0, m \neq 1$ D. $0 < m < 1$

Câu 37. Phương trình $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 3 B. 0 C. 2 D. 1

Câu 38. Số nghiệm của phương trình $2x^2 + 2x - 9 = (x^2 - x - 3) \cdot 8^{x^2+3x-6} + (x^2 + 3x - 6) \cdot 8^{x^2-x-3}$ là

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

Câu 39. Tìm tập các giá trị thực của tham số m để phương trình $4(\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt

- A. (2;4) B. (3;5) C. (4;5) D. (5;6)

Câu 40. Biết rằng a là số thực dương để bất phương trình $a^x \geq 9x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a \in [10^4; +\infty)$ B. $a \in (10^3; 10^4]$ C. $a \in (0; 10^2]$ D. $a \in (10^2; 10^3]$

Câu 41. Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a \in (6; 7]$ B. $a \in (2; 3]$ C. $a \in (-6; -5]$ D. $a \in (8; +\infty)$

Câu 42. Cho $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+3y)$. Tính giá trị $\frac{x}{y}$

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{13}-3}{2}$

Câu 43. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2 \log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0$ là

A. 8

B. $8 + \sqrt{2}$

C. $8 - \sqrt{2}$

D. $4 + \sqrt{2}$

Câu 44. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $16^x - 2(m-3)4^x + 3m+1=0$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [8; +\infty)$

B. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [8; +\infty)$

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (8; +\infty)$

D. $(-\infty; 1] \cup [8; +\infty)$

Câu 45. Gọi $S=(a;b)$ là tập tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\log_2(mx - 6x^3) + \log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Khi đó hiệu $H = b - a$?

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = m \cdot 3^{\sin^2 x}$ có nghiệm

A. 7

B. 4

C. 5

D. 6

Câu 47. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $\frac{\log_2 x}{\log_2(xy)+1} = \frac{\log_2 y}{\log_2(xy)-1} = \log_2 x + \log_2 y$. Khi đó giá trị của $x + y$ bằng

A. 2

B. 2 hoặc $\sqrt[4]{8} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

C. $2 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

D. $\frac{1}{2}$ hoặc 2.

Câu 48. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình sau $\sqrt{m + \sqrt{m + e^x}} = e^x$ có nghiệm thực

A. 9

B. 10

C. 8

D. 7

Câu 49. Cho phương trình $\log_{0,5}(m+6x) + \log_2(3-2x-x^2) = 0$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có nghiệm thực?

A. 15

B. 18

C. 23

D. 17

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

B. $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

C. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$

D. $m \in (-\infty; 0]$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1 - D	2 - A	3 - C	4 - B	5 - C	6 - A	7 - C	8 - D	9 - A	10 - D
11 - B	12 - B	13 - A	14 - C	15 - B	16 - A	17 - D	18 - B	19 - A	20 - D
21 - B	22 - B	23 - D	24 - B	25 - A	26 - B	27 - B	28 - D	29 - B	30 - B
31 - A	32 - A	33 - B	34 - D	35 - D	36 - C	37 - D	38 - D	39 - C	40 - B
41 - A	42 - D	43 - B	44 - A	45 - B	46 - B	47 - B	48 - B	49 - D	50 - C

Câu 1. Chọn D.

Phương pháp:

Đặt $t = \frac{2x^2 + 1}{2x} = x + \frac{1}{2x}$ (*). Đưa phương trình đã cho về phương trình $f(t) = a$. Sử dụng tính đồng biến của hàm $f(t)$ để tìm được nghiệm duy nhất của $f(t) = a$. Thay vào (*) và đưa về phương trình bậc hai sau đó áp dụng định lý Vi-et để tìm tích hai nghiệm.

Cách giải:

Điều kiện: $\frac{2x^2 + 1}{2x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Đặt $t = \frac{2x^2 + 1}{2x} = x + \frac{1}{2x}$ (*).

Phương trình đã cho trở thành $\log_2 t + 2' = 5$

Các hàm số $\log_2 t, 2'$ là các hàm đồng biến, hơn nữa $\log_2 2 + 2^2 = 5$ do đó $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 t + 2' = 5$

Khi đó: $\frac{2x^2 + 1}{2x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 = 4x \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt ($\Delta' = 2^2 - 2 = 2 > 0$)

Áp dụng định lý Vi-et ta có tích hai nghiệm của phương trình đã cho là $\frac{1}{2}$.

Câu 2. Chọn A.

Phương pháp:

Từ phương trình $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y)$, đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) = t$, đưa về phương trình ẩn t và giải phương trình đó, sau đó suy ra tỉ số $\frac{x}{y}$ đồng nhất hệ số tìm a, b

$$\text{Đặt } \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x+y = 4^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (tm) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (ktm) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow T = a+b = 6$$

Câu 3. Chọn C.

Phương pháp:

+) Đặt $2^x = t (t > 0)$

+) Để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thì phương trình ẩn t phải có 2 nghiệm t dương phân biệt.

+) Khi đó phương trình có 2 nghiệm t_1, t_2 với $t_1 = 2^{x_1}, t_2 = 2^{x_2} \Rightarrow x_1 = \log_2 t_1; x_2 = \log_2 t_2$

+) Áp dụng công thức: $x_1 + x_2 = \log_2 t_2 + \log_2 (t_1 t_2)$

+) Đến đây ta áp dụng điều kiện bài cho và hệ thức Vi-ét với phương trình bậc hai ẩn t để tìm điều kiện của m.

$$\text{Cách giải: } Pt \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3.2.2^x + m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6.2^x + m = 0(1)$$

$$\text{Đặt } 2^x = t (t > 0). \text{ Khi đó } (1) \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0(2)$$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm t dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m > 0 \\ 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 9$$

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \log_2 t_1; x_2 = \log_2 t_2$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 < 2 \Leftrightarrow \log_2 t_1 + \log_2 t_2 < 2 \Leftrightarrow \log_2 (t_1 t_2) < 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 m < 2 \Leftrightarrow m < 2^2 \Leftrightarrow m < 4$$

Kết hợp điều kiện ta có: $0 < m < 4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 4. Chọn B.

Phương pháp:

- Biến đổi phương trình về phương trình bậc hai đối với $\log_2(x-2)$ và đặt ẩn phụ $t = \log_2(x-2)$ với $t \in [-1; 1]$

- Rút m theo t và xét hàm $f(t)$ để tìm ra điều kiện của m.

Cách giải:

$$(m-1)\log_2^2(x-2) + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0 \quad (x > 2)$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\log_2^2(x-2) + (m-5)\log_2(x-2) + m - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } y = \log_2(x-2) \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } (m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(t^2 + t + 1) = t^2 + 5t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1} = 1 + \frac{4t}{t^2 + t + 1} \quad \text{vì } t^2 + 5t + 1 > 0 \quad \forall t \in [-1; 1]$$

$$\text{Xét hàm số: } y = 1 + \frac{4t}{t^2 + t + 1} \text{ trên } [-1; 1]$$

$$\text{Có } y'(t) = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2}; y'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \in [-1; 1]$$

Ta có BBT:

t	- 1	1	
$y'(t)$	0	+	0
$y(t)$	- 3		

$$\Rightarrow m \in \left[-3; \frac{7}{3}\right] \Rightarrow a + b = -\frac{2}{3}$$

Câu 5. Chọn C.**Phương pháp:**

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình.

Cách giải: Điều kiện: $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 3x + 2}, t \geq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = t$$

Khi đó, phương trình đã cho có dạng : $\log_3(t+2) + 5^{t^2-1} = 2 (*)$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t+2) + 5^{t^2-1}$ trên $[0; +\infty)$: $f'(t) = \frac{1}{(t+2)\ln 3} + 2t \cdot 5^{t^2-1} > 0 \forall t \in [0; +\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow f(t) = f(1) \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Do đó: } x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 14$$

Câu 6. Chọn A.

Phương pháp:

Tìm điều kiện của m để bất phương trình luôn có nghiệm trên tập K:

+ Cô lập m, đưa bất phương trình về dạng $m > f(x)$ hoặc $m < f(x)$

+ Đặt ẩn phụ nếu cần, tìm điều kiện của ẩn phụ

+ Xét hàm số $f(x)$ (hoặc $g(t)$ nếu đặt ẩn phụ) và tìm điều kiện để bất phương trình luôn có nghiệm trên tập K

Cách giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với $m < \frac{4^x}{4(2^x + 1)}$

Đặt $2^x = t > 0$ ta có bất phương trình $m < \frac{t^2}{4t + 4}$

Xét $f(t) = \frac{t^2}{4t + 4}$ trên $[0; +\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{2t(4t + 4) - 4t^2}{(4t + 4)^2} = \frac{4t^2 + 8t}{(4t + 4)^2} > 0 \forall t > 0$

$$\Rightarrow f(t) > f(0) = 0 \forall t > 0$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq 0$

Câu 7. Chọn C.

Phương pháp: Đặt $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y} - z} = a$ và biểu diễn 3 và 5 theo a

Cách giải: Đặt $3^x = 5^y = 15^{\frac{2017}{x+y} - z} = a$, đặt $\frac{2017}{x+y} - z = t$ ta có:

$$3 = a^{\frac{1}{x}}; 5 = a^{\frac{1}{y}}, 15 = a^{\frac{1}{t}} \Rightarrow a^{\frac{1}{t}} = 15 = a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = a^{\frac{x+y}{xy}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{x+y}{xy} \Rightarrow xy = t(x+y) = 2017 - z(x+y) \Rightarrow S = xy + yz + zx = 2017$$

Câu 8. Chọn D.

Phương pháp:

- Chia cả hai vế của bpt cho $2^x > 0$ và đặt $3^x = t > 0$ đưa về bất phương trình bậc hai đối với ẩn t.
- Biến đổi bất phương trình tương đương với $m < f(t)$, xét hàm $f(x)$ tìm GTLN, GTNN và rút ra kết luận.
- Bất phương trình $m < f(t)$, nghiệm đúng với mọi $x \in D$ khi và chỉ khi $m \leq \min_D f(x)$

Cách giải:

$$\text{BPT trở thành: } (3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0 \Leftrightarrow (3t^2 - t)m < -t^2 - 2t - 1 \quad (2)$$

Để BPT (1) nghiệm đúng $\forall x > 0 \Leftrightarrow$ BPT (2) nghiệm đúng $\forall t > 1$ (vì $t > 1$ nên $3t^2 - t = t(3t - 1) > 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t} > m \quad (3) \text{ nghiệm đúng } \forall t > 1$$

$$\text{Xét } f(t) \Leftrightarrow \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t} \text{ khi } t > 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\frac{1}{3}; f'(t) = \frac{(-2t-2)(3t^2-t) - (-t^2-2t-1)(6t-1)}{(3t^2-t)^2} = \frac{7t^2+6t-1}{(3t^2-t)^2}$$

$$\text{Ta thấy } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t > 1$$

BBT

t	$-\infty$	$+\infty$	1
$f'(t)$		+	
$f(t)$		-2	$-\frac{1}{3}$

Từ BBT ta thấy: BPT (1) nghiệm đúng $\forall t > 1 \Leftrightarrow f(t) > m, \forall t > 1 \Leftrightarrow m \leq -2$

Câu 9. Chọn A.

Phương pháp: Sử dụng công thức $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ (giả sử các biểu thức có nghĩa)

Cách giải:

$$\log_a 2019 + \log_{\sqrt{a}} 2019 + \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 2033136 \cdot \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow (\log_a 2019) \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) - 2033136 \cdot \log_a 2019 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_a 2019) \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2033136 \cdot \log_a 2019 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_a 2019) \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2} - 2033136 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a 2019 = 0 (VN) \\ \frac{n(n+1)}{2} - 2033136 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2016 \\ n = -2017 (L) \end{cases}$$

Câu 10. Chọn D.

Cách giải:

$$9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow 9^x - 2(x+5)3^x + (x+5)^2 - x^2 + 8x - 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - x - 5)^2 - (x - 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x - 2x - 1)(3^x - 9) \geq 0 (*)$$

Xét $y = 3^x - 2x - 1$, ta có: $y' = 3^x \cdot \ln 3 - 2$

$y' = 0$ có duy nhất 1 nghiệm $\Rightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm

Ta nhận được $x=0; x=1$ là nghiệm $\Rightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm là $x=0; x=1$

Bảng xét dấu hàm số $y = (3^x - 2x - 1)(3^x - 9)$

x	$-\infty$	0		1		2
	$+\infty$					
y		-	0	+	0	+

$$(*) \Leftrightarrow x \in [0; 1] \cup [2; +\infty)$$

Câu 11. Chọn B.

Phương pháp: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D, hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên D $\Rightarrow f(x) = g(x)$ có tối đa 1 nghiệm trên D.

Cách giải:

$$y = 2^x + 3^x + \dots + 2017^x + 2018^x$$

$$y' = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + \dots + 2017^x \ln 2017 + 2018^x \ln 2018 > 0 \forall x$$

Do đó hàm số đồng biến trên R, $y = 2017 - y \Rightarrow y' = -1 < 0 \forall x \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên R.

$\Rightarrow$ Phương trình $2^x + 3^x + \dots + 2017^x + 2018^x = 2017 - x$ có tối đa 1 nghiệm.

Ta có: $x=0$ thỏa mãn phương trình $\Rightarrow x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Câu 12. Chọn B.

Phương pháp: Biến đổi đưa về phương trình tích rồi sử dụng hàm số.

Cách giải:

Ta có: $(x-1)^2 2^x = 2x(x^2-1) + 4(2^{x-1} - x^2)$

$$\Leftrightarrow 2^x(x-1)^2 = 2x^2 - 2x + 4 \cdot \frac{2^x}{2} - 4x^2 \Leftrightarrow 2^x(x^2 - 2x + 1 - 2) = 2x^2 - 4x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2^x(x^2 - 2x - 1) - 2x(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 2x)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2x = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2x = 0 (*) \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Xét phương trình (*): $2^x - 2x = 0$

Xét hàm số $f(x) = 2^x - 2x \Rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{2}{\ln 2}$

BBT:

x	$-\infty$	$\log_2 \frac{2}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\log_2 \frac{2}{\ln 2}\right)$	$+\infty$

Ta thấy $f\left(\log_2 \frac{2}{\ln 2}\right) = \frac{2}{\ln 2} - 2 + 2 \log_2 \ln 2 < 0$ nên đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = 2^x - 2x$ tại 2 điểm

Hay phương trình (*) có hai nghiệm. Nhận thấy $x = 1; x = 2$ là hai nghiệm của phương trình (*).

Vậy tổng nghiệm của phương trình ban đầu là $1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 + 2 = 5$

Câu 13. Chọn A.

Phương pháp:

+) Biến đổi phương trình về dạng bậc hai ẩn 2^x

+) Đặt $t = 2^x (t > 0)$, đưa phương trình về phương trình bậc hai ẩn t .

+) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t có hai nghiệm dương phân biệt.

Cách giải:

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + (2m^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2m.2^x + 2m^2 - 5 = 0 (*)$

Đặt $t = 2^x (t > 0)$

Khi đó ta có: $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0 (1)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 5 \\ m > 0 \\ m^2 > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ \begin{cases} m > \frac{\sqrt{10}}{2} \\ m < -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1$

Vậy có 1 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 14. Chọn C.

Phương pháp:

- +) Biến đổi phương trình về dạng bậc hai ẩn
- +) Đặt , đưa phương trình về phương trình bậc hai ẩn t.
- +) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt phương trình ẩn t có hai nghiệm phân biệt .

Cách giải:

Ta có phương trình Đặt Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Câu 15. Chọn B.

Phương pháp:

Sử dụng các công thức biến đổi $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b, \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

Cách giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT &= \log_a 2017 + \frac{1}{2^2} \log_{\sqrt{a}} 2017 + \frac{1}{2^4} \log_{\sqrt[4]{a}} 2017 + \frac{1}{2^6} \log_{\sqrt[6]{a}} 2017 + \dots + \frac{1}{2^{2n}} \log_{\sqrt[2n]{a}} 2017 \\ &= \log_a 2017 + \frac{1}{2} \log_a 2017 + \frac{1}{2^2} \log_a 2017 + \frac{1}{2^3} \log_a 2017 + \dots + \frac{1}{2^n} \log_a 2017 \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \log_a 2017 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \log_a 2017 = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} \log_a 2017$$

$$VP = 2 \log_a 2017 - \frac{\log_a 2017}{2^{2018}} = \left(2 - \frac{1}{2^{2018}}\right) \log_a 2017 = \frac{2^{2019} - 1}{2^{2018}} \log_a 2017$$

$$\text{Do đó: } \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \frac{2^{2019} - 1}{2^{2018}} \Leftrightarrow n = 2018$$

Câu 16. Chọn A.

Phương pháp:

- Đặt ẩn phụ đưa phương trình về phương trình bậc hai.
- Điều kiện để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu là phương trình bậc hai có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$

Cách giải:

$$\text{Xét phương trình } (m+1)16^x - 2(2m-3)4^x + 6m+5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } 4^x = t, t > 0. \text{ Phương trình (1) trở thành } (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \quad (2)$$

Nhận xét: (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 với $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ (2m-3)^2 - (m+1)(6m+5) > 0 \\ \frac{2(2m-3)}{m+1} > 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} > 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} - \frac{2(2m-3)}{m+1} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -2m^2 - 23m + 4 > 0 \\ \frac{2m-3}{m+1} > 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} > 0 \\ \frac{3m+12}{m+1} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \frac{-23 - \sqrt{561}}{4} < m < \frac{-23 + \sqrt{561}}{4} \\ \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} m > -\frac{5}{6} \\ m < -1 \end{cases} \\ -4 < m < -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow -4 < m - 1$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2\}$

Câu 17. Chọn D.

Phương pháp:

+) Đặt $t = (\sqrt{5} + 2)^x$ ($t > 0$), đưa về phương trình bậc 2 ẩn t .

+) Từ điều kiện của phương trình ẩn x suy ra điều kiện tương ứng của phương trình ẩn t , giải và tìm m .

Cách giải:

Ta có: $(\sqrt{5} + 2)^x \cdot (\sqrt{5} - 2)^x = 1 \Rightarrow$ Đặt $t = (\sqrt{5} + 2)^x$ ($t > 0$) $\Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^x = \frac{1}{t}$, khi đó phương trình trở thành: $4t + \frac{1}{t} - m + 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + (2 - m)t + 1 = 0 (*)$

Phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt $0 < t_1 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2 - m)^2 - 16 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 - 1 < t_2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - m)^2 > 16 \\ 0 < \frac{m - 2}{4} < 2 \\ P = \frac{1}{4} > 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{m - 2}{4} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - m)^2 > 16 \\ 2 < m < 10 \\ 1 - m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 - m > 4 \\ 2 - m < -4 \end{cases} \\ 2 < m < 10 \\ m < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases} \\ 2 < m < 10 \\ m < 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in (6; 7)$$

Câu 18. Chọn B.

Phương pháp: $\log(x + 2y) = \log x + \log y = \log(xy) \Leftrightarrow x + 2y = xy = t$ ($t > 0$) tìm điều kiện chính xác của biến t .

Biến đổi biểu thức P, đưa về dạng $f(t)$ và tìm GTNN của biểu thức đó.

Cách giải:

$$\log(x+2y) = \log x + \log y = \log(xy) \Leftrightarrow x+2y = xy = t \ (t > 0)$$

$$\text{Mặt khác: với } x, y > 0 \Rightarrow x+2y \geq 2\sqrt{2xy} \Leftrightarrow (x+2y)^2 \geq 8xy \Leftrightarrow t^2 - 8t \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 8 \\ t \leq 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $t > 0 \Rightarrow t \geq 8$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{(2y)^2}{1+x}$$

$$P = \frac{x^2 + x^3 + (2y)^2 + (2y)^3}{x+2y+2xy+1} = \frac{(x+2y)^2 - 4xy + (x+2y)^3 - 6xy(x+2y)}{x+2y+2xy+1}$$

$$\text{Thay } x+2y = xy = t \text{ ta có } P = \frac{t^2 - 4t + t^3 - 6t^2}{t+2t+1} = \frac{t^3 - 5t^2 - 4t}{3t+1} = f(t) \ (t > 0)$$

$$f'(t) = \frac{(3t^2 - 10t - 4)(3t+1) - 3(t^3 - 5t^2 - 4t)}{(3t+1)^2} = \frac{6t^3 - 12t^2 - 10t - 4}{(3t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,7 \notin [8; +\infty)$$

$$\text{Ta có: } f(8) = \frac{32}{5} \Rightarrow \min_{[8; +\infty)} f(t) = \frac{32}{5} \Rightarrow \min P = \frac{32}{5}$$

Câu 19. Chọn A.

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai ẩn $t > 0$ và biện luận theo t .

$$\text{Cách giải: Ta có: } 4^x - m \cdot 2^{x+1} + m + 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - m \cdot 2 \cdot 2^x + m + 2 = 0$$

$$\text{Đặt } 2^x = t > 0 \text{ ta được phương trình } t^2 - 2mt + m + 2 = 0 (*)$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt lớn hơn 1 là $t_1 > 1; t_2 > 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ 2m > 2 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ m > 1 \\ m + 2 - 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 3$$

$$\text{Vậy } S = (2; 3) \Rightarrow a = 2; b = 3 \Rightarrow b - a = 1$$

Câu 20. Chọn D.**Phương pháp:**

Ứng dụng GTLN và GTNN vào giải bất phương trình chứa tham số.

$f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ thì $m \leq \min_K f(x)$

B1: Tìm GTNN của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ trên $[0; 1]$

B2: $m \leq \min_{[0;1]} y$ và kết luận.

Cách giải: Xét hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ trên $[0; 1]$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \geq 0 \forall x \in [0; 1]$$

$$\text{Nên } \min_{[0;1]} y = y(0) = 3$$

$$\text{Đề BPT } \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geq m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [0; 1] \text{ thì } m \leq \min_{[0;1]} y \Leftrightarrow m \leq 3$$

Câu 21. Chọn B.**Phương pháp:**

+) Đưa về cùng cơ số 2.

$$+) \log_2 f(x) = \log_2 g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

+) Giải phương trình bậc 2, tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$

Cách giải: Ta có:

$$2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ \log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) = \log_2(x^2 + mx - 2m^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x^2 - (m + 1)x + 2m - 2m^2 = 0 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(2m - 2m^2) = 9m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \frac{m+1+3m-1}{2} = 2m \\ x_2 = \frac{m+1-3m+1}{2} = -m+1 \end{cases}$

Với $x = 2m$: $x^2 + mx - 2m^2 = 4m^2 + m(2m) - 2m^2 = 4m^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Với $x = -m+1$: $x^2 + mx - 2m^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 + m - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow -2m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$

Để phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$

$\Leftrightarrow 4m^2 + m^2 - 2m + 1 > 1 \Leftrightarrow 5m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$

Kết hợp nghiệm: $m \in (-1; 0) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{5} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = a + b + 5c + 2d = 2$

Câu 22. Chọn B.

Cách giải: $\log_2 x \leq \log_x 2$. Điều kiện: $0 < x \neq 1$

$\log_2 x \leq \log_x 2 \Leftrightarrow \log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} \leq 0$

Đặt $t = \log_2 x$. BPT trở thành $t - \frac{1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ 0 < t \leq 1 \end{cases}$

Khi đó ta có: $\begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ 0 < \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 2]$

Câu 23. Chọn D.

Phương pháp: Đặt $\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4} = t$, rút x, y theo t và thay vào phương trình cuối cùng

Chia cả hai vế cho 9^t , giải phương trình và tìm ra thương $\frac{x}{y}$, đồng nhất hệ số tìm a, b và tính tổng a + b.

Cách giải:

$$\log_{25} \frac{x}{2} = \log_{15} y = \log_9 \frac{x+y}{4} = t \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 25^t \\ y = 15^t \\ \frac{x+y}{4} = 9^t \end{cases} \Rightarrow \frac{2 \cdot 25^t + 15^t}{4} = 9^t \Leftrightarrow 2 \cdot 25^t + 15^t = 4 \cdot 9^t$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{25}{9} \right)^t + \left(\frac{15}{9} \right)^t = 4 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{5}{3} \right)^{2t} + \left(\frac{5}{3} \right)^t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{3} \right)^t = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \\ \left(\frac{5}{3} \right)^t = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \end{cases} (ktm)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2 \cdot 25^t}{15^t} = 2 \left(\frac{5}{3} \right)^t = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 33 \end{cases} \Rightarrow a + b = 34$$

Câu 24. Chọn B.

Phương pháp:

+) Đặt $t = 2^x$ ($x > 0 \Rightarrow t > 1$), đưa về phương trình bậc 2 ẩn t

+) Cô lập m, đưa phương trình về dạng $f(t) = m$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và $y = m$, tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $t > 1$.

Cách giải:

Đặt $t = 2^x$ ($x > 0 \Rightarrow t > 1$), khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 2t + m - 5 = 0 (*)$

$(*) \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2t - 5 = -m \Rightarrow$ Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy để đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ sao cho phương trình $(*)$ có nghiệm $t > 1 \Leftrightarrow -m > -6 \Leftrightarrow m < 6$, vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Chọn A.

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp cô lập tham số, đưa về khảo sát tính chất nghiệm của đường thẳng và đồ thị hàm số

Cách giải:

Ta có: $\frac{a}{3^x + 3^{-x}} = 3^x - 3^{-x} \Leftrightarrow a = \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) \cdot \left(3^x - \frac{1}{3^x}\right) = (3^x)^2 - \frac{1}{(3^x)^2} (*)$

Đặt $t = (3^x)^2 = 9^x > 0$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow a = f(t) = t - \frac{1}{t}$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $a = f(t)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

Câu 26. Chọn B.

Phương pháp: Sử dụng điều kiện cần và đủ để biện luận phương trình

Cách giải: Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $(*) \Rightarrow -x_0$ cũng là nghiệm của phương trình $(*)$

Khi đó $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ (loại) suy ra không tồn tại giá trị nào của a .

Câu 27. Chọn B.

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về bất phương trình cơ bản

Cách giải: Điều kiện: $D + [0; +\infty)$

Ta có: $24 + 2x - 2\sqrt{x^2 + 24x} = (\sqrt{x+24} - \sqrt{x})^2$; $24 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 24x} = (\sqrt{x+24} + \sqrt{x})^2$

Khi đó, bất phương trình trở thành: $\frac{\sqrt{x+24} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+24} - \sqrt{x}} < \frac{27}{8} \cdot \frac{(\sqrt{x+24} - \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+24} + \sqrt{x})^2}$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+24} + \sqrt{x}) < 3(\sqrt{x+24} - \sqrt{x}) \Leftrightarrow 5\sqrt{x} < \sqrt{x+24} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 25x < x+24 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

Câu 28. Chọn D.

Phương pháp:

Giải phương trình nghiệm nguyên bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Cách giải: Do: $2^x = 3^y + 55$ nên $x \geq 2 \Rightarrow 2^x - 55$ là số nguyên nên $y \geq 2$

Do x, y chẵn nên đặt $x = 2m, y = 2n \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Khi đó giả thiết trở thành: $(2^m)^2 - (3^n)^2 = 55 \Leftrightarrow (2^m - 3^n)(2^m + 3^n) = 55$

$\Rightarrow 2^m - 3^n$ và $2^m + 3^n$ là 2 ước dương của 55

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} 2^m - 3^n = 1 \\ 2^m + 3^n = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2^m = 28 \\ 3^n = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m = \log_2 28 \\ n = 3 \end{cases} \right. \right. \\ \left. \left[\begin{cases} 2^m - 3^n = 5 \\ 2^m + 3^n = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2^m = 8 \\ 3^n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases} \right. \right. \right. (tm)$$

Vậy $(x; y) = (6; 2)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

Câu 29. Chọn B.

Phương pháp:

Sử dụng công thức hàm số mũ và kỹ năng giải phương trình để xác định bộ ba số cần tìm

Cách giải: Ta có:

$$(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \Leftrightarrow x^2y^4 + 2xy^2z^4 + z^8 = 4 + x^2y^4 - 2xy^2z^4 + z^8 \Leftrightarrow xy^2z^4 = 1$$

$$\text{Và } 2^{\sqrt{(3)x^2}} \cdot 4^{\sqrt{(3)y^2}} \cdot 16^{\sqrt{(3)z^2}} = 2^{\sqrt{(3)x^2} + 2\sqrt{(3)y^2} + 4\sqrt{(3)z^2}} = 2^7 \Leftrightarrow \sqrt{(3)x^2} + 2\sqrt{(3)y^2} + 4\sqrt{(3)z^2} = 7$$

Do đó ta có được bộ ba số $(x; y; z) = \{(1; 1; 1); (1; 1; -1); (1; -1; 1); (1; -1; -1)\}$

Câu 30. Chọn B.

Phương pháp:

Đặt ẩn phụ, cô lập m đưa về khảo sát hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình.

Cách giải:

$$\text{Phương trình } (\sqrt{5} + 1)^x + 2m(\sqrt{5} - 1)^x = 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^x + 2m \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^x = 1 (*)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^x > 0 \text{ mà } \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^x = \frac{1}{t}$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \frac{1}{t} + 2mt = 1 \Leftrightarrow 2m = \frac{t - 1}{t^2}$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{t - 1}{t^2} \text{ trên khoảng } (0; +\infty) \text{ có } f'(t) = \frac{2 - t}{t^3}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Tính } f(2) = \frac{1}{4}; \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty; \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

BBT:

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
-----	---	---------------	-----------

$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Do đó, để phương trình $2m = f(t)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \leq 0; m = \frac{1}{8}$

Câu 31. Chọn A.

Phương pháp: Đặt $t = \log_2 x$

Cách giải: Đặt $t = \log_2 x, x \in (0; 1) \Rightarrow t < 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t = f(t)(*)(t < 0)$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t (t < 0) \Rightarrow f'(t) = -2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

BBT:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = m$. Để phương trình ban đầu có nghiệm thực $x \in (0; 1)$ thì phương trình (*) có nghiệm âm $\Rightarrow m \leq \frac{1}{4}$

Câu 32. Chọn A.

Phương pháp:

+) Tìm ĐK.

+) Đưa các logarit về cùng cơ số 2, đưa phương trình ban đầu về phương trình bậc 2, tìm điều kiện của m để phương trình bậc 2 thỏa mãn điều kiện bài toán.

Cách giải:

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2(mx-8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - (2+m)x + 9 = 0(*) \end{cases}$$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm thực phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm thực phân biệt lớn hơn $x_1 > x_2 > 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2+m)^2 - 36 \\ x_1 > x_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 32 > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -8 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases}$$

Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -8 \\ 9 - 2 - m + 1 > 0 \\ 2 + m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -8 \\ m < 8 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{5; 6; 7\}$$

Câu 33. Chọn B.

Phương pháp:

- Tìm điều kiện xác định.

- Biến đổi phương trình về dạng cơ bản $\log_a f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = a^m$

Cách giải: Điều kiện: $x > 1; x \neq 3$

Ta có: $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2 + \log_2(x-3)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left[(2x-2)^2 \cdot (x-3)^2 \right] = 2 \Leftrightarrow (2x-2)^2 \cdot (x-3)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) = 1 \\ (x-1)(x-3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} (tm) \\ x = 2 - \sqrt{2} (L) \\ x = 2 (tm) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là $2 + \sqrt{2} + 2 = 4 + \sqrt{2}$

Câu 34. Chọn D.

Cách giải:

$$\text{Đặt } \log_6(2018x + m) = \log_4(1009x) = t, \text{ ta có hệ } \begin{cases} 6^t = 2018x + m \\ 4^t = 1009x \end{cases} (I) \Rightarrow 6^t - 2.4^t = m (*)$$

Để thấy nếu phương trình (*) có nghiệm $t = t_0$ thì hệ (I) có nghiệm $x = x_0$

Xét hàm số $f(t) = 6^t - 2.4^t$

$$f'(t) = 6^t \ln 6 - 2 \cdot 4^t \ln 4 = 0 \Leftrightarrow 6^t \ln 6 = 2 \cdot 4^t \ln 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2 \ln 4}{\ln 6} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} \frac{2 \ln 4}{\ln 6} = \alpha \approx -2,01$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow t < \alpha; f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \alpha$$

Mà $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ nên tập giá trị của hàm số $f(t)$ là $[a; +\infty)$

Vậy các giá trị nguyên của m để (*) có nghiệm là $-2; -1; 0; 1; 2; \dots; 2017$ (có 2020 giá trị)

Câu 35. Chọn D.

Phương pháp: Chia cả 2 vế cho 9^x , đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, tìm khoảng giá trị của t .

Cô lập m , đưa bất phương trình về dạng $m \leq f(t) \forall t \in (a; b) \Rightarrow m \leq \min_{(a; b)} f(t)$

$$\text{Cách giải: } m \cdot 9^x - (2m+1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0 \Leftrightarrow m \left(\frac{9}{4}\right)^x - (2m+1) \left(\frac{3}{2}\right)^x + m \leq 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x \left(1 < t < \frac{3}{2}\right)$, khi đó phương trình tương đương

$$mt^2 - (2m+1)t + m \leq 0 \Leftrightarrow m(t^2 - 2t + 1) - t \leq 0 \Leftrightarrow m(t-1)^2 \leq t \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2} = f(t) \left(1 < t < \frac{3}{2}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2}$ trên $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ ta có:

$$f'(t) = \frac{(t-1)^2 - t \cdot 2(t-1)}{(t-1)^4} = \frac{t^2 - 2t + 1 - 2t^2 + 2t}{(t-1)^4} = \frac{-t^2 + 1}{(t-1)^4} = \frac{t+1}{(1-t)^3} = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

BBT:

t	$-\infty$	-1	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+	-	-
$f(t)$	↘ ↗			↘	

$$\text{Ta có: } f\left(\frac{3}{2}\right) = 8 \Rightarrow f(t) > 6 \forall t \in \left(1; \frac{3}{2}\right); m \leq f(t) \forall t \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow m \leq 6$$

Có 6 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Câu 36. Chọn C.**Phương pháp:**

Đặt ẩn phụ, đưa về biện luận theo m số nghiệm của phương trình bậc hai

Cách giải:

$$\text{Ta có: } 4^x - (m+1)2^x + m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - m(2^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2^x = m \end{cases}$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt} \Leftrightarrow 2^x = m \text{ có nghiệm khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Câu 37. Chọn D.**Phương pháp:**

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số, đánh giá số nghiệm của phương trình.

Cách giải:

$$3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 4^x = 6 \cdot 5^x \Leftrightarrow 3 \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \left(\frac{4}{5}\right)^x = 6 \Leftrightarrow 3 \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \left(\frac{4}{5}\right)^x - 6 = 0 (*)$$

Hàm số $y = f(x) = 3 \left(\frac{2}{5}\right)^x + 4 \left(\frac{3}{5}\right)^x + 5 \left(\frac{4}{5}\right)^x - 6$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $\mathbb{R}$ (1)

$$\text{Ta có: } f(0) = 6; f(2) = -\frac{22}{25} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất 1 nghiệm } x \in (0; 1) (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực.

Câu 38. Chọn D.**Cách giải:**

$$\text{PT đã cho} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 + x^2 - x - 3 = (x^2 - x - 3)8^{x^2+3x-6} + (x^2 + 3x - 6)8^{x^2-x-3}$$

$$\Rightarrow u + v = u \cdot 8^v + v \cdot 8^u \quad (u = x^2 + 3x - 6; v = x^2 - x - 3)$$

$$\Leftrightarrow (8^u - 1)v + (8^v - 1)u = 0 (*)$$

$$\text{TH1: Nếu } u = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}, \text{ khi đó } (*) \Leftrightarrow 0v = 0 \Rightarrow \text{pt luôn đúng với hai nghiệm}$$

x để u = 0.

TH2. Nếu $v = 0$, tương tự TH1, ta tìm được hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

TH3. Nếu $u > 0; v > 0$ khi đó $(8^u - 1)v + (8^v - 1)u > 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.

TH4. Nếu $u < 0; v < 0$ tương tự TH2

TH5. Nếu $u > 0; v < 0$, khi đó $8^u - 1 > 0; 8^v - 1 < 0 \Rightarrow (8^u - 1)v + (8^v - 1)u < 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm

TH6. Nếu $u < 0; v > 0$ tương tự TH5

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 39. Chọn C.

Phương pháp: Đặt $t = (\sqrt{2} + 1)^x$, đưa về phương trình bậc hai ẩn t.

PT ban đầu có 2 nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi phương trình bậc hai ẩn t có hai nghiệm $t_1, t_2 < 1$

Cách giải: Đặt $t = (\sqrt{2} + 1)^x$, ($t > 0$) $\rightarrow PT \Leftrightarrow 4t + \frac{1}{t} - m = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - mt + 1 = 0(1)$

PT ban đầu có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm $t_1, t_2 < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(1) > 0 \\ t_1 + t_2 < 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ \frac{m}{4} < 2 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \\ \frac{1}{4} - \frac{m}{4} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 5 \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 5$$

Câu 40. Chọn B.

Phương pháp: Chuyển vế, đưa phương trình về dạng $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_R f(x) \geq 0$

Cách giải: Xét hàm số $f(x) = a^x - 9x - 1 (x \in \mathbb{R})$

Ta có: $f(0) = 0; f'(x) = a^x \ln a - 9$

Để $f(x) \geq 0 (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \min_R f(x) = 0 = f(0)$

$\Rightarrow f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a = 9 \Leftrightarrow a = e^9 \approx 8103.$

Vậy $a \in (10^3; 10^4]$

Câu 41. Chọn A.

Phương pháp: Đặt $t = x^2 - x + 1$, tìm khoảng giá trị của t.

Xét BPT $f(t) \geq 0$ trên khoảng vừa tìm được $\Leftrightarrow \min f(x) \geq 0$

Cách giải: Đặt $t = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Khi đó BPT trở thành $f(t) = t + 1 + a \ln t \geq 0 \left(t \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right) \right)$

Ta có: $f'(t) = 1 + \frac{a}{t} = 0 \Leftrightarrow t = -a$

Mặt khác: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty; f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4} + a \ln \frac{3}{4}$

Với $a > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right) \Rightarrow f(t) \geq 0 \left(\forall t \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right) \right) \Leftrightarrow \min_{\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)} f(t) = \frac{7}{4} + a \ln \frac{3}{4} \geq 0$

$$\Leftrightarrow a \ln \frac{3}{4} \geq -\frac{7}{4} \Leftrightarrow a \leq \frac{-\frac{7}{4}}{\ln \frac{3}{4}} \approx 6,08$$

Vì đề bài yêu cầu tìm số thực lớn nhất nên suy ra $a \in (6; 7]$

Câu 42. Chọn D.

Phương pháp: Đặt ẩn phụ, đưa về giải phương trình mũ (dạng đẳng cấp bậc hai)

Cách giải: Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16} (x + 3y) = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 12^t \end{cases}$ và $x + 3y = 16^t$

$$\Rightarrow 9^t + 3 \cdot 12^t = 16^t \Leftrightarrow (3^t)^2 + 3 \cdot 3^t \cdot 4^t - (4^t)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{3}{4}\right)^t\right]^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{9^t}{12^t} = \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

Câu 43. Chọn B.

Phương pháp:

+) Đặt điều kiện.

+) Giải phương trình bằng các phương pháp giải phương trình logarit.

Cách giải:

$$\begin{aligned}
 PT &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ (x-5)^2 > 0 \\ \log_4 [(x-3)(x-5)]^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 5 \\ (x-3)^2(x-5)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3; x \neq 5 \\ \begin{cases} (x-3)(x-5) = 1 \\ (x-3)(x-5) = -1 \end{cases} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3; x \neq 5 \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 14 = 0 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3; x \neq 5 \\ \begin{cases} x = 4 \pm \sqrt{2} \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \pm \sqrt{2} \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 8 + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Câu 44. Chọn A.

Phương pháp: Đặt $t = 4^x$

Cách giải: Đặt $t = 4^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình trở thành

$$t^2 - 2(m-3)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t + 1 = m(2t - 3)$$

Với $t = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

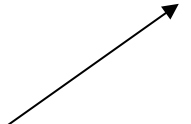
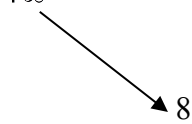
Với $t \neq \frac{3}{2}$ ($t > 0$), phương trình trở thành $m = \frac{t^2 + 6t + 1}{2t - 3} = f(t)$ ($t > 0; t \neq \frac{3}{2}$)

Để phương trình ban đầu có nghiệm $\min_{X \in (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}} f(t) \leq m \leq \max_{X \in (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 6t + 1}{2t - 3}$ ta có:

$$f'(t) = \frac{(2t+6)(2t-3) - 2(t^2+6t+1)}{(2t-3)^2} = \frac{2t^2 - 6t - 20}{(2t-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \in (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \\ t = -2 \notin (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \end{cases}$$

Lập BBT

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$
y'	+ 0 -			-	- 0 +	
y				$-\frac{1}{3}$		

Để phương trình có nghiệm dương thì $\begin{cases} m < -\frac{1}{3} \\ m \geq 8 \end{cases}$

Câu 45. Chọn B.

Phương pháp: Đưa về phương trình đa thức chứa tham số, cô lập tham số, khảo sát hàm để biện luận nghiệm

Cách giải: Điều kiện: $\begin{cases} mx - 6x^3 > 0 \\ -14x^2 + 29x - 2 > 0 \end{cases}$

$$PT \Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x^2 - 29x + 2 < 0 \\ mx = 6x^3 - 14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{14} < x < 2 \\ m = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x} (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(\frac{1}{14}; 2\right)$

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{14}; 2\right)$

$$f'(x) = 12x - 14 + \frac{2}{x^2} = \frac{12x^3 - 14x^2 + 2}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \left(\text{do } \frac{1}{14} < x < 2 \right)$$

BBT

x	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$		1	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{98}$	$\frac{39}{2}$		19	24

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi $19 < m < \frac{39}{2}$

$$\text{Vậy } m \in \left(19; \frac{39}{2}\right) = (a; b) \Rightarrow a = 19; b = \frac{39}{2}$$

$$\text{Vậy } b - a = \frac{39}{2} - 19 = \frac{1}{2}$$

Câu 46. Chọn B.

Phương pháp: Cô lập tham số m, đưa về khảo sát hàm số để biện luận nghiệm của phương trình

Cách giải:

Ta có: $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = m \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = m \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow m = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x} + 3^{1-2\sin^2 x} (*)$

Đặt $t = \sin^2 x \in [0; 1]$, (*) trở thành: $m = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3^{1-2t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2t}$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2t}$ trên $[0; 1]$, $f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{2}{3} + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2t} \ln \frac{1}{3} < 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[0; 1] \Rightarrow \begin{cases} \min f(t) = f(1) = 1 \\ \max f(t) = f(0) = 4 \end{cases}$

Do đó phương trình $m = f(t)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$

Lại có: $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \{1; 2; 3; 4\}$

Câu 47. Chọn B.**Phương pháp:**

+) Sử dụng công thức logarit cơ bản: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ ($a, b, c > 0; a \neq 1$)

+) Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Cách giải:

TH1: $\log_2 x + \log_2 y = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 xy + 1} = \frac{\log_2 y}{\log_2 xy - 1} = \log_2 x + \log_2 y = 0$

$\Rightarrow \log_2 x = \log_2 y = 0 \Rightarrow x = y = 1 \Rightarrow x + y = 2$

TH2: $\log_2 x + \log_2 y \neq 0$

$\frac{\log_2 x}{\log_2 xy + 1} = \frac{\log_2 y}{\log_2 xy - 1} = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{\log_2 xy + 1 + \log_2 xy - 1} = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{2 \log_2 xy} = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{2(\log_2 x + \log_2 y)} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\log_2 x}{\log_2 x + \log_2 y + 1} = \frac{1}{2} \\ \log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{3}{4} \\ \log_2 y = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[4]{8} \\ y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{cases} \Rightarrow x + y = \sqrt[4]{8} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy $x + y = 2$ hoặc $x + y = \sqrt[4]{8} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Câu 48. Chọn B.

Phương pháp: Phương pháp hàm số.

Cách giải: ĐKXD: $\begin{cases} e^x + m \geq 0 \\ m + \sqrt{e^x + m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{m + \sqrt{e^x + m}} = e^x \Leftrightarrow m + \sqrt{e^x + m} = e^{2x}$

Đặt $e^x = a; \sqrt{m + e^x} = b (a > 0; b \geq 0)$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} m + b = a^2 \\ m + a = b^2 \end{cases} \Rightarrow (b - a) = (a - b)(a + b) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = -1 (VL) \end{cases} \Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow e^x = \sqrt{m + e^x} \Leftrightarrow e^{2x} = m + e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x = m (1)$

Xét hàm số $y = e^{2x} - e^x \Rightarrow y' = 2e^{2x} - e^x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$

BBT:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Phương trình (1) có nghiệm thực $m \geq -\frac{1}{4}$

Theo đề bài: $m < 10, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$. Có 10 giá trị của m thỏa mãn

Câu 49. Chọn D.

Phương pháp: Phương pháp hàm số.

Cách giải: ĐKXD: $\begin{cases} m + 6x > 0 \\ 3 - 2x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{m}{6} \\ -3 < x < 1 \end{cases}$

$\log_{0,5}(m + 6x) + \log_2(3 - 2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow -\log_2(m + 6x) + \log_2(3 - 2x - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2(3 - 2x - x^2) = \log_2(m + 6x) \Leftrightarrow 3 - 2x - x^2 = m + 6x \Leftrightarrow x^2 + 8x + m - 3 = 0 (*)$

Khi đó, ĐKXD của phương trình là $-3 < x < 1$

Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(-3; 1)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow x^2 + 8x - 3 = -m$

Xét hàm số $y = x^2 + 8x - 3$ trên khoảng $(-3; 1)$: $y' = 2x + 8 > 2(-3) + 8 = 2 > 0$

$\Rightarrow y' > 0 \forall x \in (-3; 1) \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-3; 1)$

BBT

x		-3		1	
y'			+		
y		-18		6	

Phương trình (*) có nghiệm thực $-18 < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < 18$

Mà $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 17\}$ có 17 giá trị thỏa mãn

Câu 50. Chọn C.

Phương pháp: Đặt ẩn phụ, cô lập tham số m , đưa về bài toán tương giao

Cách giải: Ta có:

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2} \log_2 x\right)^2 - \log_{2^{-1}} x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m = 0$$

Đặt $t = \log_2 x, x \in (0; 1) \Rightarrow t < 0$

Khi đó: $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow -m = t^2 + t = f(t)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $(-\infty; 0)$, $f'(t) = 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

Tính $f(0) = 0$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$

BBT

t	0	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Do đó, để $-m = f(t)$ có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; 0) \Leftrightarrow -m \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$

