

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN
Chuyên đề 23. BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG TÍCH, THƯƠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Bất phương trình dạng tích: $A(x).B(x) > 0$;

(hoặc $A(x).B(x) < 0$; $A(x).B(x) \geq 0$; $A(x).B(x) \leq 0$);

2. Bất phương trình dạng thương: $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$

(hoặc $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$; $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$; $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$).

3. Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b (a \neq 0)$:

Nhị thức bậc nhất cùng dấu với a khi $x > -\frac{b}{a}$

Nhị thức bậc nhất trái dấu với a khi $x < -\frac{b}{a}$

Do $-\frac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức $ax + b$ nên định lý được phát biểu:

Nhị thức $ax + b (a \neq 0)$ cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức, trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

4. Phương pháp giải các bất phương trình dạng tích, thương: Phân tích thành nhân tử chứa các nhị thức bậc nhất. Lập bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$

x	$-\frac{b}{a}$
$ax + b$	trái dấu với a 0 cùng dấu với a

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $(2x - 9)(1945 + x) > 0$.

** Tìm cách giải:* Với tích $A.B > 0$ xảy ra khi A và B cùng dấu. Do đó $A > 0$ và $B > 0$ hoặc $A < 0$ và $B < 0$.

Ta có cách giải:

Giải

Cách 1: Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9 > 0 \\ 1945 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 9 \\ x > -1945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4,5 \\ x > -1945 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4,5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9 < 0 \\ 1945 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 9 \\ x < -1945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4,5 \\ x < -1945 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1945$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 4,5$; $x < -1945$.

* *Chú ý:* Bằng việc lập bảng xét dấu của từng thừa số của tích là nhị thức bậc nhất ta có cách 2: Lập bảng xét dấu:

x	- 1945	4,5
$2x - 9$	- 0 -	+
$1945 + x$	- +	0 +
$(2x - 9)(1945 + x)$	+ 0 -	0 +

Vậy nghiệm của bất phương trình: $x > 4,5$ hoặc $x < -1945$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $(x - 6)(x + 10) < -x^2 + x + 30$.

* *Tìm cách giải:* Ta phân tích vế phải thành nhân tử, xuất hiện nhân tử chung và chuyển vế để đưa về phương trình tích.

Giải

a) Ta có: $-x^2 + x + 30 = -x^2 + 6x - 5x + 30 = -(x - 6)(x + 5)$

Do đó bất phương trình thành $(x - 6)(x + 10) + (x - 6)(x + 5) < 0$

$\Leftrightarrow (x - 6)(2x + 15) < 0$. Lập bảng xét dấu:

x	- 7,5	6
$x - 6$	- -	0 +
$2x + 15$	- 0 +	+
$(x - 6)(2x + 15)$	+ 0 -	0 +

Nghiệm của bất phương trình là: $-7,5 < x < 6$.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $x^4 + 36 \geq 13x^2$ sau đó biểu diễn nghiệm trên trục số.

* *Tìm cách giải:* Chuyển tất cả về một vế rồi phân tích vế đó thành nhân tử và giải bất phương trình tích.

Giải

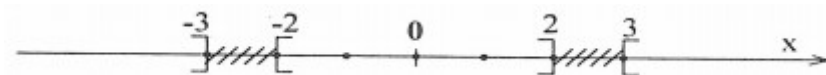
Ta có $x^4 + 36 \geq 13x^2 \Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 9x^2 - 4x^2 + 36 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 4) \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) \geq 0$. Lập bảng xét dấu:

x	- 3	- 2	2	3
$x - 2$	- -	-	0 +	+
$x + 2$	- -	0 +	+	+
$x - 3$	- -	-	-	0 +
$x + 3$	- 0 +	+	+	+
Vế trái	+ 0 -	0 +	0 -	0 +

Nghiệm của bất phương trình là: $\begin{cases} x \leq -3 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$. Biểu diễn nghiệm:



Ví dụ 4: Giải bất phương trình: $\frac{2016 - 6x}{x(x+8)} \leq 0$.

* *Tìm cách giải:* Đây là bất phương trình dạng thương của $(2016 - 6x)$ chia cho $x(x - 8)$. Ta có $2016 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 336$; $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$.

Giải

ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq -8$. Đặt $A = \frac{2016 - 6x}{x(x+8)}$. Lập bảng xét dấu:

x	- 8		0		336	
2016 - $6x$	+		+		+	0 -
x	-		-	0	+	+
$x + 8$	-	0	+		+	+
$\mathcal{A}$	+		-		+	0 -

$A \leq 0$ khi $\begin{cases} -8 < x < 0 \\ x \geq 336 \end{cases}$.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\frac{-x^2 - 5x + 28}{x^2 + 2x - 15} \geq -2$ (1)

Và biểu diễn nghiệm trên trục số.

* *Tìm cách giải:* Nếu chuyển vế, rút gọn về trái ta được bất phương trình dạng thương. Phân tích các tử, mẫu thành nhân tử rồi lập bảng xét dấu.

Giải

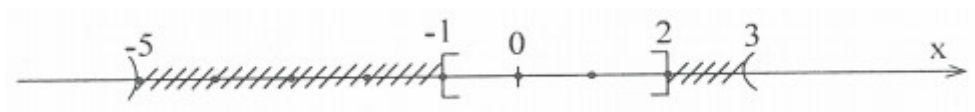
ĐKXĐ: $x \neq 3$; $x \neq -5$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 5x + 28}{x^2 + 2x - 15} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 15} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+5)} \geq 0$$

Lập bảng xét dấu ta có:

x	- 5		- 1		2		3		
$x + 1$	-		-	0	+		+		+
$x - 2$	-		-		-	0	+		+
$x - 3$	-		-		-		-	0	+
$x + 5$	-	0	+		+		+		+
Vế trái	+		-	0	+	0	-		+

Nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x < -5 \\ -1 \leq x \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}$. Biểu diễn nghiệm:



Ví dụ 6: Cho biểu thức $A = \left[\frac{5}{x+3} - \frac{5x-15}{2x-9} \cdot \left(\frac{2x-9}{x^2-9} - 2x+9 \right) \right] : \frac{1-x}{1+x}$.

Tìm x để $A < 0$

* *Tìm cách giải:* Khi rút gọn biểu thức và khi tìm x để $A < 0$ cần lưu ý ĐKXĐ. Do sau khi chia $1-x$ cũng thành mẫu số nên $x \neq \pm 1$.

Giải

Rút gọn A : ĐKXĐ: $x \neq \pm 3$; $x \neq \pm 1$; $x \neq 4, 5$. Ta có:

$$A = \left[\frac{5}{x+3} - \frac{5(x-3)}{(2x-9)} \cdot \frac{(2x-9)(1-x^2+9)}{(x-3)(x+3)} \right] \cdot \frac{1+x}{1-x}$$

$$= \left[\frac{5}{x+3} - \frac{5(1-x^2+9)}{x+3} \right] \cdot \frac{1+x}{1-x} = \frac{5(x-3)(x+3)}{x+3} \cdot \frac{1+x}{1-x} = \frac{5(x-3)(1+x)}{1-x}$$

Lập bảng xét dấu:

x	-1		1		3	
$x-3$	-		-		0	+
$1+x$	-	0	+		+	+
$1-x$	+		+	0	-	
A	+		-		+	

Vậy để $A < 0$ thì $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 3; x \neq 4, 5 \end{cases}$.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \dots + \frac{1}{x^2-39x+380} < 0.$$

* *Tìm cách giải:* Bất phương trình có ẩn ở mẫu nên lưu ý ĐKXĐ.

Ta có $x^2 - x = x(x-1)$; $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$; ... có dạng tổng quát $A(A-1)$.

Mà $\frac{1}{A(A-1)} = \frac{A-(A-1)}{A(A-1)} = \frac{1}{A-1} - \frac{1}{A}$. Ta phân tích các phân thức ở vế trái rồi rút gọn, sẽ được một phân thức dạng thương.

Giải

ĐKXĐ: $x \notin \{0; 1; 2; 3; \dots; 19; 20\}$.

Biến đổi bất đẳng thức thành:

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \dots + \frac{1}{(x-19)(x-20)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-20} - \frac{1}{x-19} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-20} - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{20}{x(x-20)} < 0.$$

Đặt $A = \frac{20}{x(x-20)}$. Lập bảng xét dấu

x	0		20		
x	-	0	+		+
$x - 20$	-		-	0	+
A	+		-		+

$A < 0$ khi $x \notin \{1; 2; 3; \dots; 19\}$ và $0 < x < 20$.

Ví dụ 8: Giải bất phương trình $\frac{m-5}{x-2} > 3$ với m là tham số.

* *Tìm cách giải:* Bất phương trình có ẩn ở mẫu là có tham số nên phải lưu ý ĐKXĐ và biện luận tham số m khi giải bất phương trình.

Giải

ĐKXĐ: $x \neq 2$

$$\frac{m-5}{x-2} > 3 \Leftrightarrow \frac{m-5}{x-2} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{(m+1)-3x}{x-2} > 0$$

$$\text{Ta thấy } m+1-3x=0 \Leftrightarrow x = \frac{m+1}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{m+1}{3} > 2 \Leftrightarrow m > 5 \text{ và } \frac{m+1}{3} < 2 \Leftrightarrow m < 5. \text{ Đặt } B = \frac{(m+1)-3x}{x-2}.$$

Lập bảng xét dấu: khi $m > 5$

x	2		$\frac{m+1}{3}$		
$m+1-3x$	+		+	0	-
$x-2$	-	0	+		+
B	-		+	0	-

Với $m > 5$ ta có nghiệm của bất phương trình là: $2 < x < \frac{m+1}{3}$.

Lập bảng xét dấu: khi $m < 5$

x	$\frac{m+1}{3}$ 2				
$m+1-3x$	+	0	-		-
$x-2$	-		-	0	+
B	-	0	+		-

Với $m < 5$ ta có nghiệm của bất phương trình là: $\frac{m+1}{3} < x < 2$

Ví dụ 9: Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau lớn hơn 3:

$$\frac{m-3}{x-3} = 3+m.$$

* *Tìm cách giải:* Bài toán giải phương trình với tham số, tìm nghiệm sau đó coi tham số m là ẩn để nghiệm lớn hơn 3 thực chất là giải bất phương trình ẩn m .

Giải

a) Với $x \neq 3$ ta có $m-3 = (x-3)(3+m) \Leftrightarrow x(m+3) = 4m+6$

* Với $m = -3$ phương trình trở thành $0x = -6$ vô nghiệm.

* Với $m \neq -3 \Leftrightarrow x = \frac{4m+6}{m+3}$

Để $x > 3$ ta phải có: $\frac{4m+6}{m+3} > 3 \Leftrightarrow \frac{4m+6}{m+3} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m+3} > 0$

Đặt $C = \frac{m-3}{m+3}$. Lập bảng xét dấu

m	- 3			
-----	-----	--	--	--

Để $x > 3$ thì $m > 3$ hoặc $m < -3$.

C. Bài tập vận dụng

23.1. Giải bất phương trình $x^2 + 3x - 1 \leq 2x + 5$ và biểu diễn nghiệm trên trục số.

Hướng dẫn giải – đáp số

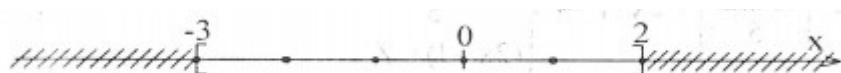
Biến đổi thành $x^2 + x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) \leq 0$

Cách 1: Lý luận $x-2 \leq 0$ và $x+3 \geq 0$ (do $x+3 > x-2$, $\forall x$)

Cách 2: Lập bảng xét dấu.

Ta đều có kết quả $-3 \leq x \leq 2$.

Biểu diễn nghiệm trên trục số:



23.2. Giải các bất phương trình sau:

a) $(19x+8)(2-9x)(3x-2)(30-4x) > 0$;

b) $(10-x)(5x-2001)+3x^2-25x-50 < 100-x^2$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Lập bảng xét dấu. Nghiệm là $x < -\frac{8}{19}$; $\frac{2}{9} < x < \frac{2}{3}$ hoặc $x > \frac{30}{4}$.

b) Nhận xét: $3x^2-25x-50 = (3x+5)(x-10) = -(10-x)(3x+5)$.

Mặt khác $100-x^2 = (10-x)(10+x)$. Do đó ta biến đổi

$$\text{BPT} \Leftrightarrow (10-x)(5x-2001) - (10-x)(3x+5) - (10-x)(10+x) < 0$$

$$\Leftrightarrow (10-x)(x-2016) < 0$$

Giải bất phương trình được $\begin{cases} x < 10 \\ x > 2016 \end{cases}$.

23.3. Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số.

a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 < 0$;

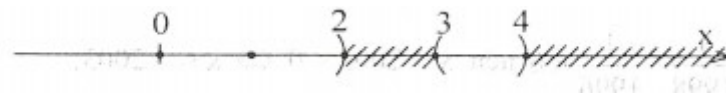
b) $x^4 - 7x^2 + 22x + 36 \geq 4(x^3 + 3)$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là các bất phương trình bậc ba và bốn. Ta chuyển về rồi sử dụng hệ quả định lý Bézout (nhẩm nghiệm) để phân tích vế trái thành nhân tử.

a) BPT $\Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-4) < 0$

Lập bảng xét dấu tìm được nghiệm: $\begin{cases} 3 < x < 4 \\ x < 2 \end{cases}$



b) Chuyển về và biến đổi BPT $\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x-3)(x-4) \geq 0$

Lập bảng xét dấu tìm được nghiệm: $\begin{cases} x \leq -2 \\ -1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 4 \end{cases}$. Biểu diễn nghiệm:



23.4. Giải các bất phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên trục số.

a) $(2x+1)(4x+3)(8x+5)^2 \leq 9$;

b) $(2x-1)(2x-2)(4x-5)(4x-7) \geq 18$;

$$c) (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) > 30.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhân 4 vào nhân tử thứ nhất, nhân 2 vào nhân tử thứ hai và nhân 8 vào vế phải ta được:

$$BPT \Leftrightarrow (8x + 4)(8x + 6)(8x + 5)^2 \leq 72$$

$$\text{Đặt } 8x + 5 = y \text{ ta có: } (y - 1)(y + 1)y^2 \leq 72$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)y^2 - 72 \leq 0 \Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 9)(y^2 + 8) \leq 0$$

$$\text{Do } y^2 + 8 = (8x + 5)^2 + 8 > 0, \forall x \text{ nên } y^2 - 9 \leq 0$$

$$\text{Hay } (y - 3)(y + 3) \leq 0. \text{ Thay } y = 8x + 5 \text{ vào ta có: } (8x + 2)(8x + 8) \leq 0$$

$$\text{Giải được } -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \text{ (Bạn đọc tự biểu diễn nghiệm trên trục số)}$$

b) Nhân 2 vào nhân tử thứ nhất, nhân 2 vào nhân tử thứ hai và nhân 4 vào vế phải ta được:

$$BPT \Leftrightarrow (4x - 2)(4x - 4)(4x - 5)(4x - 7) \geq 72$$

$$\Leftrightarrow [(4x - 2)(4x - 7)] [(4x - 4)(4x - 5)] \geq 72$$

$$\Leftrightarrow (16x^2 - 36x + 14)(16x^2 - 36x + 20) \geq 72$$

$$\text{Đặt } 16x^2 - 36x + 17 = y \text{ ta có: } (y - 3)(y + 3) - 72 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 81 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 9)(y + 9) \geq 0$$

$$\text{Do } y + 9 = 16x^2 - 36x + 26 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot \frac{9}{2} + \frac{81}{4} + \frac{23}{4}$$

$$= \left(4x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0, \forall x \text{ từ đó ta có } y - 9 \geq 0$$

$$\text{Hay } 16x^2 - 36x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (4x - 1)(x - 2) \geq 0.$$

$$\text{Giải bất phương trình này được } \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ (Bạn đọc tự biểu diễn nghiệm).}$$

$$c) BPT \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(2x - 3)(2x - 5) > 30$$

$$\Leftrightarrow (2x - 2)(2x - 4)(2x - 3)(2x - 5) > 120$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 14x + 10)(4x^2 - 14x + 12) - 120 > 0$$

$$\text{Đặt } 4x^2 - 14x + 11 = y \text{ ta có } (y - 1)(y + 1) - 120 > 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 11^2 > 0 \Leftrightarrow (y - 11)(y + 11) > 0$$

$$\text{Do } y+11=4x^2-14x+22=(2x)^2-2.2x.\frac{7}{2}+\frac{49}{4}+\frac{39}{4}$$

$$=\left(2x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{39}{4}>0, \forall x$$

$$\text{Do đó } y-11>0 \text{ hay } 4x^2-14x>0 \Leftrightarrow 2x(2x-7)>0.$$

$$\text{Giải bất phương trình được } \begin{cases} x>3,5 \\ x<0 \end{cases}. \text{ (Bạn đọc tự biểu diễn nghiệm).}$$

23.5. Giải các bất phương trình:

$$\text{a) } (x^2+2)(x^2-2)(x^4-8)\leq 96;$$

$$\text{b) } x^4+4\geq 26(x^2+2x+2)+3x^3+6x^2+6x;$$

$$\text{c) } x(x^3-27)(x+1)>6(x^3-27).$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{a) BPT } \Leftrightarrow (x^4-4)(x^4-8)\leq 96$$

$$\Leftrightarrow x^8-12x^4+32-96\leq 0 \Leftrightarrow x^8+4x^4-16x^4-64\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4-16)(x^4+4)\leq 0$$

$$\text{Do } x^4+4>0, \forall x \text{ nên } x^4-16\leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x^2+4)\leq 0$$

$$\text{Do } x^2+4>0, \forall x \text{ nên } (x+2)(x-2)\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2.$$

* Chú ý: Câu a) có thể dùng phương pháp đặt biến phụ: Đặt $x^4-6=y$ ta có

$$(y+2)(y-2)\leq 96 \Leftrightarrow y^2-4-96\leq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2-100\leq 0 \Leftrightarrow (y-10)(y+10)\leq 0$$

$$\text{Do } y+10=x^4-6+10=x^4+4>0, \forall x \text{ nên } y-10\leq 0$$

$$\text{hay } x^4-16\leq 0 \text{ rồi giải như trên ta được } -2\leq x\leq 2.$$

$$\text{b) Để ý rằng } x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

$$\text{Do đó có } (x^4+4)-(x^2+2x+2)(3x+26)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)-(x^2+2x+2)(3x+26)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+2)(x^2-5x-24)\geq 0 \Leftrightarrow (x^2+2x+2)(x-8)(x+3)\geq 0$$

$$\text{Do } x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0, \forall x \text{ nên ta chỉ xét}$$

$$(x-8)(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -3 \\ x\geq 8 \end{cases}$$

$$c) \text{ BPT} \Leftrightarrow (x^3 - 27)(x^2 + x - 6) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 9)(x - 2)(x + 3) > 0$$

$$\text{Ta có } x^2 + 3x + 9 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0, \forall x. \text{ Vậy } (x - 3)(x + 3)(x - 2) > 0$$

$$\text{Giải bất phương trình ta có nghiệm: } \begin{cases} -3 < x < 2 \\ x > 3 \end{cases}.$$

$$23.6. \text{ Giải bất phương trình } \frac{-2x + 9}{1945 + 70x} > 0.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{ĐKXD } x \neq -\frac{389}{14}. \text{ Lập bảng xét dấu:}$$

$$\text{Nghiệm của bất phương trình là: } -\frac{389}{14} < x < \frac{9}{2}.$$

23.7. Giải các bất phương trình:

$$a) \frac{1 + 5x}{x - 4} \geq 2;$$

$$b) \frac{3x}{x - 2} \leq 1 + \frac{2x - 1}{x + 2};$$

$$c) \frac{1}{x - 8} < \frac{2}{x - 6};$$

$$d) \frac{2x}{x - 3} - \frac{1}{x - 1} > 1.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ ĐKXD } x \neq 4$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{1 + 5x}{x - 4} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9 + 3x}{x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

$$b) \text{ ĐKXD } x \neq \pm 2; \text{ BPT} \Leftrightarrow \frac{11x + 2}{(x + 2)(x - 2)} \leq 0.$$

$$\text{Lập bảng xét dấu ta tìm được } \begin{cases} x < -2 \\ -\frac{2}{11} \leq x < 2 \end{cases}.$$

$$c) \text{ ĐKXD } x \neq 8 \text{ và } x \neq 6$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{-x + 10}{(x - 8)(x - 6)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 < x < 8 \\ x > 10 \end{cases}.$$

$$d) \text{ ĐKXD } x \neq 3 \text{ và } x \neq 1. \text{ BPT} \Leftrightarrow \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)} > 0$$

$$\text{Lập bảng xét dấu, nghiệm là } \begin{cases} x < -3 \\ 1 < x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

23.8. Tìm x để $3 < \frac{x+3}{x-5} < 5$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$3 < \frac{x+3}{x-5} < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x-5} > 3 \\ \frac{x+3}{x-5} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < x < 9 \\ x > 7 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 7 < x < 9.$$

23.9. Cho $A = \frac{(x-2016)\left(\frac{x-3}{x+1} + \frac{x+1}{x-3}\right)}{\left(\frac{x-3}{x+1} - \frac{x+1}{x-3}\right)}$

Rút gọn A sau đó tìm giá trị của x để $A \leq 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXD $x \neq 3$; $x \neq \pm 1$. Rút gọn:

$$A = \frac{(x-2016)(2x^2-4x+10)}{8-8x} = \frac{(x-2016)(x^2-2x+5)}{4(1-x)}$$

Do $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0$, $\forall x$ nên $A \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2016}{4(1-x)} \leq 0$.

Giải được $\begin{cases} x \geq 2016 \\ x < 1 \end{cases}$ và $x \neq -1$.

23.10. Cho $B = \left(\frac{x}{x+3} - \frac{x^3-27}{x^3+27} \cdot \frac{x^2-3x+9}{x^2-9} \right) : \frac{9}{x^2+x-6}$

Tìm x để $B \geq 2015$.

Hướng dẫn giải – đáp số

ĐKXD: $x \neq \pm 3$; $x \neq -2$. Rút gọn được $B = \frac{2-x}{x+3}$.

$$B \geq 2015 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+3} \geq 2015 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+3} - 2015 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2016x-6043}{x+3} \geq 0$$

Giải bất phương trình này được: $-3 < x \leq -\frac{6043}{2016}$.

23.11. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm không âm

$$\frac{3}{x-2} = 5 - m.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $x \neq 2$ ta có: $3 = (5-m)(x-2) \Leftrightarrow x(m-5) = 2m-13$

* Với $m=5$ phương trình trở thành $0x = -3$ vô nghiệm.

* Với $m \neq 5$ thì $\Leftrightarrow x = \frac{2m-13}{m-5}$

Đề $x \geq 0$ ta phải có $\frac{2m-13}{m-5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6,5 \\ m < 5 \end{cases}$

23.12. Giải bất phương trình sau:

$$\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{15}-1\right)\left(\frac{1}{21}-1\right)\left(\frac{1}{28}-1\right)x > \frac{x^2}{7} - 4.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{15}-1\right)\left(\frac{1}{21}-1\right)\left(\frac{1}{28}-1\right) \\ &= \left(\frac{2}{2.3}-1\right)\left(\frac{2}{3.4}-1\right)\left(\frac{2}{4.5}-1\right)\left(\frac{2}{5.6}-1\right)\left(\frac{2}{6.7}-1\right)\left(\frac{2}{7.8}-1\right) \\ &= \frac{-4}{2.3} \cdot \frac{-10}{3.4} \cdot \frac{-18}{4.5} \cdot \frac{-28}{5.6} \cdot \frac{-40}{6.7} \cdot \frac{-54}{7.8} = \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{5.8}{6.7} \cdot \frac{6.9}{7.8} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Do đó bất phương trình trở thành $\frac{3}{7}x > \frac{x^2}{7} - 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 28 < 0$

$$\Leftrightarrow (x-7)(x+4) < 0$$

Giải bất phương trình này ta được: $-4 < x < 7$.

23.13. Giải bất phương trình sau:

$$\left(\frac{2}{1.2} + \frac{2}{3.4} + \dots + \frac{2}{99.100}\right) \cdot \frac{x^2 + x + 1945}{2} > 1975 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right).$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Xét } & \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \end{aligned}$$

Vậy $x^2 + x + 1945 > 1975 \Leftrightarrow x^2 + x - 30 > 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+6) > 0$.

Giải bất phương trình được $\begin{cases} x < -6 \\ x > 5 \end{cases}$

23.14. Giải bất phương trình sau:

$$\frac{x}{a^2 - a + 1} - \frac{1}{a+1} < \frac{x-1}{a^2 - a + 1} + \frac{2a(1-x) - a^2}{1+a^3}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Với $a \neq -1$ thì

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{x}{a^2 - a + 1} - \frac{1}{a+1} < \frac{x}{a^2 - a + 1} - \frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{2a - 2ax - a^2}{1+a^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2 - a + 1} - \frac{1}{a + 1} - \frac{-a^2 - 2ax + 2a}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + 1 - a^2 + a - 1 + a^2 + 2ax - 2a}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2ax}{(a + 1)(a^2 - a + 1)} < 0$$

Do $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall a$ nên ta chỉ xét $\frac{2ax}{a + 1} < 0$

Xét dấu của $\frac{a}{a + 1}$ có: Nếu $a < -1$ hoặc $a > 0$ thì $\frac{a}{a + 1} > 0$ nghiệm là $x < 0$.

Nếu $-1 < a < 0$ thì $\frac{a}{a + 1} < 0$ có nghiệm là $x > 0$

Nếu $a = 0$ thì bất phương trình trở thành $0x < 0$ vô nghiệm.

23.15. Cho $A = \left(\frac{6}{8} + 1\right)\left(\frac{6}{18} + 1\right)\left(\frac{6}{30} + 1\right) \dots \left(\frac{6}{260} + 1\right)$

$$B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$$

Tìm x để $B < \frac{x - 2}{30} < A$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $A = \left(\frac{6}{1.8} + 1\right)\left(\frac{6}{2.9} + 1\right)\left(\frac{6}{3.10} + 1\right) \dots \left(\frac{6}{13.20} + 1\right)$

$$= \frac{14}{1.8} \cdot \frac{24}{2.9} \cdot \frac{36}{3.10} \dots \frac{266}{13.20} = \frac{2.7}{1.8} \cdot \frac{3.8}{2.9} \cdot \frac{4.9}{3.10} \dots \frac{14.19}{13.20}$$

$$= \frac{2.3.4 \dots 13.14}{1.2.3 \dots 12.13} \cdot \frac{7.8.9 \dots 18.19}{8.9.10 \dots 19.20} = \frac{49}{10}$$

$$B = \frac{3}{2.2} \cdot \frac{8}{3.3} \cdot \frac{15}{4.4} \dots \frac{99}{10.10} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{9.11}{10.10}$$

$$= \frac{1.2.3 \dots 8.9}{2.3.4 \dots 9.10} \cdot \frac{3.4.5 \dots 10.11}{2.3.4 \dots 9.10} = \frac{11}{20}$$

$$\frac{11}{20} < \frac{x - 2}{30} < \frac{49}{10} \Leftrightarrow \frac{33}{60} < \frac{2x - 4}{60} < \frac{294}{60} \Leftrightarrow 33 < 2x - 4 < 294$$

$$\Leftrightarrow 37 < 2x < 298 \Leftrightarrow 18,5 < x < 149$$

23.16. Giải bất phương trình $\frac{x - 3}{x - 1} < 3$.

(Thi tuyển sinh lớp 10 THPT Thừa Thiên – Huế, năm học 2001 – 2002)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\frac{x - 3}{x - 1} < 3 \Leftrightarrow \frac{x - 3}{x - 1} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{x - 3 - 3x + 3}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x - 1} > 0$$

Lập bảng xét dấu:

x	0		1		
$2x$	-	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
VT	+		-		+

Vậy $x > 1$; $x < 0$ là nghiệm của bất phương trình.

23.17. Giải bất phương trình $3 + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6} - \frac{5}{x^2 + 1} < \frac{7}{x^2 + 3} + \frac{9}{x^2 + 5}$.

(Khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 8 huyện Thường Tín – Hà Nội, năm học 2010 -2011)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$3 + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6} - \frac{5}{x^2 + 1} < \frac{7}{x^2 + 3} + \frac{9}{x^2 + 5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6} + \left(1 - \frac{5}{x^2 + 1}\right) + \left(1 - \frac{7}{x^2 + 3}\right) + \left(1 - \frac{9}{x^2 + 5}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6} + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3} + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4) \left(\frac{1}{x^2 + 6} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{x^2 + 5} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \text{ do } \frac{1}{x^2 + 6} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{x^2 + 5} > 0.$$