

CHƯƠNG 1: MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC. TẬP HỢP

Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: mệnh đề toán học, tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

§1 MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

H'Maryam: Số 15 chia hết cho 5 .

Phương: Việt Nam là một nước ở khu vực Đông Nam Á.

Trong hai phát biểu trên, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

I. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

HOẠT ĐỘNG 1.

a) Phát biểu của bạn H'Maryam có phải là một câu khẳng định về tính chất chia hết trong toán học hay không?

b) Phát biểu của bạn Phương có phải là một câu khẳng định về một sự kiện trong toán học hay không?

Như vậy, phát biểu của bạn Phương không phải là mệnh đề toán học.

Chú ý: Khi không sợ nhầm lẫn, ta thường gọi tắt mệnh đề toán học là mệnh đề.

Ví dụ 1: Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

a) Hà Nội là Thủ đô của Việt Nam;

b) Số π là một số hữu tỉ;

c) $x=1$ có phải là nghiệm của phương trình $x^2 - 1=0$ không?

Giải

Câu a) không phải là một mệnh đề toán học.

Câu b) là một mệnh đề toán học.

Câu c) là một câu hỏi nên không phải một mệnh đề toán học.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

Nêu hai ví dụ về mệnh đề toán học.

HOẠT ĐỘNG 2.

Trong hai mệnh đề toán học sau đây, mệnh đề nào là một khẳng định đúng? Mệnh đề nào là một khẳng định sai?

P : "Tổng hai góc đối của một tứ giác nội tiếp bằng 180^0 ";

Q : “ $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ”.

Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.

Khi mệnh đề toán học là đúng, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề đúng*.

Khi mệnh đề toán học là sai, ta gọi mệnh đề đó là một *mệnh đề sai*.

Chẳng hạn, trong hai mệnh đề ở Hoạt động 2, mệnh đề thứ nhất là một mệnh đề đúng, mệnh đề thứ hai là một mệnh đề sai.

Ví dụ 2: Tìm mệnh đề đúng trong những mệnh đề sau:

A : “Tam giác có ba cạnh”;

B : “1 là số nguyên tố”.

Giải

Mệnh đề A là mệnh đề đúng; mệnh đề B là mệnh đề sai vì 1 không là số nguyên tố.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

Nêu ví dụ về một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

II. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

HOẠT ĐỘNG 3. Xét câu “ n chia hết cho 3” với n là số tự nhiên.

a) Ta có thể khẳng định được tính đúng sai của câu trên hay không?

b) Với $n=21$ thì câu “21 chia hết cho 3” có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?

c) Với $n=10$ thì câu “10 chia hết cho 3” có phải là mệnh đề toán học hay không? Nếu là mệnh đề toán học thì mệnh đề đó đúng hay sai?

* Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu “ n chia hết cho 3” với n là số tự nhiên.

* Với mỗi giá trị cụ thể của biến n , câu này cho ta một mệnh đề toán học mà ta có thể khẳng định được tính đúng sai của mệnh đề đó.

Câu “ n chia hết cho 3” là một mệnh đề chứa biến.

Ta thường kí hiệu mệnh đề chứa biến n là $P(n)$; mệnh đề chứa biến x, y là $P(x, y)$;...

Ví dụ 3: Trong những câu sau, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) 18 chia hết cho 9;

b) $3n$ chia hết cho 9.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

Nêu ví dụ về mệnh đề chứa biến.

Giải

a) Câu " 18 chia hết cho 9 " là một mệnh đề nhưng không phải là mệnh đề chứa biến.

b) Câu " $3n$ chia hết cho 9" là một mệnh đề chứa biến, kí hiệu là $P(n)$: " $3n$ chia hết cho 9".

III. PHỦ ĐỊNH CỦA MỘT MỆNH ĐỀ



Hoạt động 4: Hai bạn Kiên và Cường đang tranh luận với nhau.

Kiên nói: "Số 23 là số nguyên tố".

Cường nói: "Số 23 không là số nguyên tố".

Em có nhận xét gì về hai câu phát biểu của Kiên và Cường?

Cho mệnh đề P . Mệnh đề "Không phải P " được gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề P và kí hiệu là $\bar{P}$.



Lưu ý:

Mệnh đề $\bar{P}$ đúng khi P sai.

Mệnh đề $\bar{P}$ sai khi P đúng.

Ví dụ 4: Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

A : "16 là bình phương của một số nguyên";

B : "Số 25 không chia hết cho 5".

Giải

Mệnh đề $\bar{A}$: "16 không phải là bình phương của một số nguyên" và $\bar{A}$ sai.

Mệnh đề $\bar{B}$: "Số 25 chia hết cho 5" và $\bar{B}$ đúng.



Luyện tập 4: Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

P : "5,15 là một số hữu tỉ";

Q : "2023 là số chẵn".

Chú ý: Để phủ định một mệnh đề (có dạng phát biểu như trên), ta chỉ cần thêm (hoặc bớt) từ "không" (hoặc "không phải") vào trước vị ngữ của mệnh đề đó.

IV. MỆNH ĐỀ KÉO THEO



Hoạt động 5: Xét hai mệnh đề:

P : "Số tự nhiên n chia hết cho 6"; Q : "Số tự nhiên n chia hết cho 3".

Xét mệnh đề R : "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 6 thì số tự nhiên n chia hết cho 3".

Mệnh đề R có dạng phát biểu như thế nào?

Kiến thức trọng tâm:

Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề "Nếu P thì Q " được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng, Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Nhận xét: Tùy theo nội dung cụ thể, đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " P kéo theo Q " hay " P suy ra Q " hay "Vì P nên Q "...

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC . Xét hai mệnh đề:

P : "Tam giác ABC có hai góc bằng 60^0 "; Q : "Tam giác ABC ". Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Giải

$P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC có hai góc bằng 60^0 thì tam giác ABC đều".

Mệnh đề trên là đúng.



Luyện tập 5: Hãy phát biểu một định lý toán học ở dạng mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$.

V. MỆNH ĐỀ ĐẢO. HAI MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG



Hoạt động 6: Cho tam giác ABC . Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:

"Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".

Phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$.

Kiến thức trọng tâm:

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét: Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ có thể phát biểu ở những dạng như sau:

- " P tương đương Q ";
- " P là điều kiện cần và đủ để có Q ";
- " P khi và chỉ khi Q ";
- " P nếu và chỉ nếu Q ".

Ví dụ 6: Trong Hoạt động 6, cho biết hai mệnh đề P và Q có tương đương hay không. Nếu có, hãy phát biểu mệnh đề tương đương đó.

Giải

Trong Hoạt động 6, ta có:

Mệnh đề P : "Tam giác ABC vuông tại A ";

Mệnh đề Q : "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".



Luyện tập 6: Cho tam giác ABC . Từ các mệnh đề:

P : "Tam giác ABC đều",

Q : "Tam giác ABC cân và có một góc bằng 60° ", hãy phát biểu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó.

Nếu cả hai mệnh đề trên đều đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

Theo định lý Pythagore, hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng. Do đó, hai mệnh đề P và Q là tương đương và có thể phát biểu như sau: "Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".

Chú ý: Trong toán học, những câu khẳng định đúng phát biểu ở dạng " $P \Leftrightarrow Q$ " cũng được coi là một mệnh đề toán học, gọi là mệnh đề tương đương.

VI. KÍ HIỆU $\forall$ VÀ $\exists$

7. Cho mệnh đề " n chia hết cho 3" với n là số tự nhiên.

a) Phát biểu "Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3" có phải là mệnh đề không?

b) Phát biểu "Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3" có phải là mệnh đề không?

- Phát biểu "Mọi số tự nhiên n đều chia hết cho 3" là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: "Với mọi số tự nhiên n , n đều chia hết cho 3".

- Phát biểu “Tồn tại số tự nhiên n chia hết cho 3” là một mệnh đề. Có thể viết lại mệnh đề đó như sau: “Tồn tại số tự nhiên n , n chia hết cho 3”.

Để viết gọn phát biểu: “Với mọi số tự nhiên n ” ta dùng kí hiệu $\forall n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu “ $\forall$ ” đọc là “với mọi”. Khi đó, mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , n đều chia hết cho 3” có thể viết lại như sau: “ $\forall n \in \mathbb{N}, n$ đều chia hết cho 3”.

Tương tự, để viết gọn phát biểu: “Tồn tại số tự nhiên n ” ta dùng kí hiệu $\exists n \in \mathbb{N}$, ở đó kí hiệu “ $\exists$ ” đọc là “tồn tại” hoặc “có một” (tồn tại một) hoặc “có ít nhất một” (tồn tại ít nhất một). Khi đó, mệnh đề “Tồn tại số tự nhiên n , n chia hết cho 3” có thể viết lại như sau: “ $\exists n \in \mathbb{N}, n$ chia hết cho 3”.

Ví dụ 7

Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

- a) P : “Với mọi số thực $x, x^2 + 1 > 0$ ”.
- b) Q : “Với mọi số tự nhiên $n, n^2 + n$ chia hết cho 6”.

Giải

a) Mệnh đề được viết là P : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ ”. Để chứng minh mệnh đề P là đúng, ta làm như sau:

Xét một số thực x tùy ý, ta phải chứng tỏ rằng $x^2 + 1 > 0$. Thật vậy, ta có: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Vậy mệnh đề P là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là Q : “ $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 + n) : 6$ ”.

Để chứng minh mệnh đề Q là sai, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của n để nhận được mệnh đề sai.

Thật vậy, chọn $n = 1$, ta thấy $n^2 + n = 2$ không chia hết cho 6. Vậy mệnh đề Q là mệnh đề sai.

Ví dụ 8

Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề đó là đúng hay sai, giải thích vì sao.

- a) M : “Tồn tại số thực x sao cho $x^3 = -8$ ”.
- b) N : “Tồn tại số nguyên x sao cho $2x + 1 = 0$ ”.

Giải

a) Mệnh đề được viết là $M : “\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = -8.”$.

Để chứng tỏ mệnh đề M là đúng, ta cần chỉ ra một giá trị cụ thể của x để nhận được mệnh đề đúng.

Thật vậy, chọn $x = -2$, ta thấy $(-2)^3 = -8$. Vậy mệnh đề M là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề được viết là $N : \exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0.”$.

Để chứng minh mệnh đề N là sai, ta phải chứng tỏ rằng với số nguyên x tùy ý thì $2x + 1 \neq 0$. Thật vậy, xét một số nguyên x tùy ý, ta có $2x + 1$ không chia hết cho 2 nên $2x + 1 \neq 0$. Vì thế mệnh đề N là mệnh đề sai.

Chú ý: Cách làm ở Ví dụ 7, Ví dụ 8 lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh một mệnh đề có kí hiệu “ $\forall$ ”, có kí hiệu “ $\exists$ ”, là đúng hoặc sai.

8. Bạn An nói: "Mọi số thực đều có bình phương là một số không âm".

Bạn Bình phủ định lại câu nói của bạn An: “Có một số thực mà bình phương của nó là một số âm”.

a) Sử dụng kí hiệu “ $\forall$ ” để viết mệnh đề của bạn An.

b) Sử dụng kí hiệu “ $\exists$ ” để viết mệnh đề của bạn Bình.

An: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2$ là một số không âm”

Bình: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2$ là một số âm”

Cho mệnh đề “ $P(x), x \in X$ ”.

- Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

- Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

Ví dụ 9:

Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.

Giải

- a) Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$ ”.
- b) Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ ”.

7. Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

- a) Tồn tại số nguyên chia hết cho 3;
- b) Mọi số thập phân đều viết dưới dạng phân số.

BÀI TẬP

1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học ?

- a) Tích hai số thực trái dấu là một số thực âm.
- b) Mọi số tự nhiên đều là số dương.
- c) Có sự sống ngoài Trái Đất.
- d) Ngày 1 tháng 5 là ngày Quốc tế Lao động.

2. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó:

- a) A : “ $\frac{5}{1,2}$ là một phân số”;
- b) B : “Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm”;
- c) C : “ $2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$ ”;
- d) D : “Số 2025 chia hết cho 15”.

3. Cho n là số tự nhiên. Xét các mệnh đề:

P : “ n là một số tự nhiên chia hết cho 16”;

Q : “ n là một số tự nhiên chia hết cho 8”.

- a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.
- b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

4. Cho tam giác ABC . Xét các mệnh đề:

P : “Tam giác ABC cân”;

Q : "Tam giác ABC có hai đường cao bằng nhau".

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng bốn cách.

5. Dùng kí hiệu " $\forall$ " hoặc " $\exists$ " để viết các mệnh đề sau:

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;

b) Mọi số thực cộng với 0 đều bằng chính nó.

6. Phát biểu các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} > x$.

7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$;

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$;

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

§2 TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Khái niệm tập hợp thường gặp trong toán học và trong đời sống. Chẳng hạn:

- Tập hợp A các học sinh của lớp 10D.

- Tập hợp B các học sinh tổ I của lớp đó.



Làm thế nào để diễn tả quan hệ giữa tập hợp A
và tập hợp B ?

I. TẬP HỢP



Ở lớp 6, ta đã làm quen với khái niệm tập hợp, kí hiệu và cách viết tập hợp, phần tử thuộc tập hợp. Hãy nêu cách cho một tập hợp.



Người ta còn minh họa tập hợp bằng một vòng kín, mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bởi một chấm bên trong vòng kín, còn phần tử không thuộc tập hợp đó được biểu diễn bởi một chấm bên ngoài vòng kín (Hình 1). Cách minh họa tập hợp như vậy được gọi là biểu đồ Ven.

a) Viết tập hợp A trong Hình 1 bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp đó.

b) Nêu phần tử không thuộc tập hợp A .

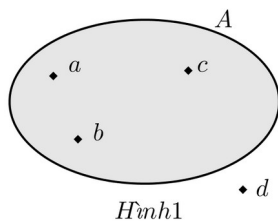
Ví dụ 1: Cho tập hợp B gồm các số tự nhiên có một chữ số và chia hết cho 3.

a) Viết tập hợp B theo hai cách: liệt kê các phần tử của tập hợp; chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

b) Minh họa tập hợp B bằng biểu đồ Ven.

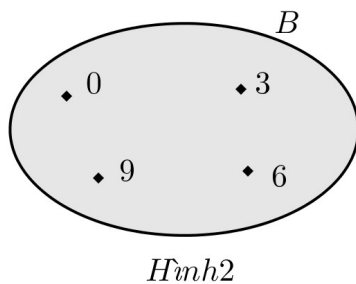
Giải

a) Tập hợp B được viết theo cách liệt kê các phần tử là: $B = \{0; 3; 6; 9\}$. Tập hợp B được viết theo cách chỉ ra tính chất đặc trưng. Tập hợp B được viết cho các phần tử là:



$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9 \text{ và } x : 3\}.$$

b) Tập hợp B được minh họa bằng biểu đồ Ven ở Hình 2.



Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}, D = \{a\}, E = \{b; c; d\}, \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}.$$

Nhận xét

• Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\emptyset$.

• Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

Chú ý: Khi tập hợp C là tập hợp rỗng, ta viết $C = \emptyset$ và không được viết là $C = \{\emptyset\}$.

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG 1

1. Nêu số phần tử của mỗi tập hợp sau:

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}, \quad N^* = \{1; 2; 3; \dots\}.$$

II. TẬP CON VÀ TẬP HỢP BẰNG NHAU

1. Tập con

HOẠT ĐỘNG 4: Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$.

a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

b) Mỗi phần tử của tập hợp A có thuộc tập hợp B không?

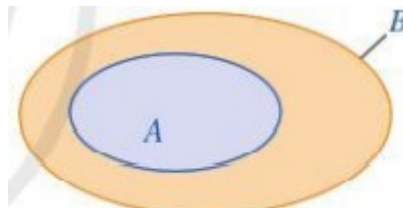
KIẾN THỨC TRỌNG TÂM: Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một tập con của tập hợp B và viết là $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B .

Quy ước: Tập hợp rỗng $\emptyset$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

Chú ý: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Khi $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A) (Hình 3).

Nếu A không phải là tập con của B , ta viết $A \not\subset B$.



Hình 3

Ví dụ 2: Cho hai tập hợp:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}, \quad F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}. \text{ Chứng tỏ rằng } E \subset F.$$

Giải Với mọi số thực x , ta có: $x \leq 1$ thì $x < 2$ nên $x \in E$ thì $x \in F$.

Do đó $E \subset F$.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

2. Cho hai tập hợp: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 3\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ chia hết cho } 9\}$. Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Ta có các tính chất sau:

- $A \subset A$ với mọi tập hợp A ;
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (Hình 4).



- a) $A = \{x \in N \mid x \text{ là ước của } 16\}$, $B = \{x \in N \mid x \text{ là ước của } 20\}$.
b) $C = \{x \in N \mid x \text{ là bội của } 4\}$, $D = \{x \in N \mid x \text{ là bội của } 5\}$.

Giải

a) $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$, $B = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$. Vậy $A \cap B = \{1; 2; 4\}$.

Chú ý: A là tập các ước tự nhiên của 16 , B là tập các ước tự nhiên của 20 nên $A \cap B$ là tập hợp các ước chung tự nhiên của 16 và 20 .

b) $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 4 \text{ và } x \text{ là bội của } 5\}$
 $= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 4 \text{ và } 5\}$.

IV. HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

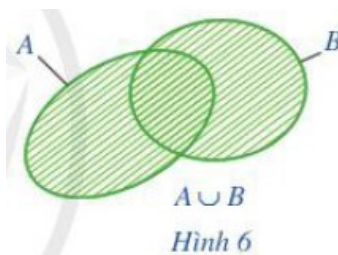
HOẠT ĐỘNG 7. Hai trường dự định tổ chức giải thi đấu thể thao cho học sinh lớp 10. Trường thứ nhất đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng bàn, Bóng đá, Bóng rổ. Trường thứ hai đề xuất ba môn thi đấu là: Bóng đá, Bóng rổ, Cầu lông. Lập danh sách những môn thi đấu mà cả hai trường đề xuất.

Kiến thức trọng tâm: Tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là **hợp** của A và B , kí hiệu $A \cup B$.

Lưu ý: $x \in A \cup B$ khi và chỉ khi $x \in A$ hoặc $x \in B$.

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

Tập hợp $A \cup B$ được minh họa bởi phần gạch chéo trong Hình 6.



Ví dụ 5: Cho tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập hợp I các số vô tỉ. Tìm $\mathbb{Q} \cap I$, $\mathbb{Q} \cup I$.

Giải

Ta có: $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$, $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

4. Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Tìm $A \cap B$, $A \cup B$.

V. PHẦN BÙ. HIỆU CỦA HAI TẬP HỢP

HOẠT ĐỘNG 8. Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, I là tập hợp các số vô tỉ. Khi đó $I \subset \mathbb{R}$.

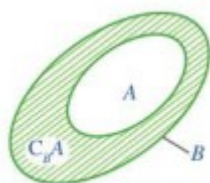
Tìm tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ.

Khám phá kiến thức: Tập hợp những số thực không phải là số vô tỉ chính là tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ.

Ta nói tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ là phần bù của tập hợp I các số vô tỉ trong tập hợp $\mathbb{R}$.

Kiến thức trọng tâm: Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B . Tập hợp những phần tử của B mà không phải là phần tử của A gọi là phần bù của A trong B , kí hiệu $C_B A$.

Tập hợp được mô tả bằng phần gạch chéo trong Hình 7.



Hình 7

Ví dụ 6: Các học sinh của lớp 10A đăng kí đi tham quan ở một trong hai địa điểm: Hoàng thành Thăng Long và Văn Miếu – Quốc Tử Giám. Mỗi học sinh đều đăng kí đúng một địa điểm. Gọi A là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long, B là tập hợp các học sinh đăng kí tham quan Văn Miếu – Quốc Tử Giám, T là tập hợp các học sinh lớp 10A. Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp T .

Giải. Phần bù của tập hợp A trong tập hợp T bao gồm những học sinh trong lớp không đăng kí tham quan Hoàng thành Thăng Long nên $C_T A = B$

HOẠT ĐỘNG 9. Cho hai tập hợp: $A = \{2; 3; 5; 7; 14\}$, $B = \{3; 5; 7; 9; 11\}$.

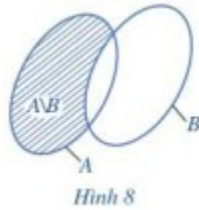
Liệt kê các phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B .

Kiến thức trọng tâm: Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là hiệu của A và B , kí hiệu $A \setminus B$.

Lưu ý: $x \in A \setminus B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \notin B$.

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

Tập hợp $A \setminus B$ được minh họa bởi phần gạch chéo trong Hình 8.



Chú ý: Nếu $B \subset A$ thì $A \setminus B = C_A B$.

Ví dụ 7: Cho hai tập hợp $A = \{3; 6; 9; 12\}$.

$$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}.$$

Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Giải

Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc A mà không thuộc B . Vậy $A \setminus B = \{3; 9\}$.

Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc B mà không thuộc A . Vậy $B \setminus A = \{2; 4; 8; 10\}$.

Ví dụ 8: Cho hai tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x - 11 \leq 0\}$.

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 14x + 11 = 0\}.$$

Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Giải

Ta có: $A = \{0; 1; 2; 3\}, B = \{1\}$.

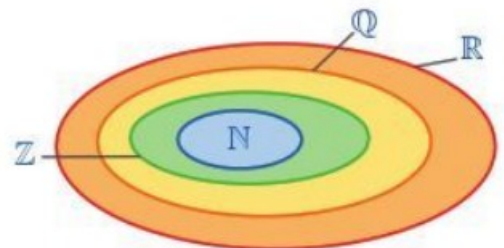
Vậy $A \cap B = \{1\}, A \cup B = \{0; 1; 2; 3\}, A \setminus B = \{0; 2; 3\}, B \setminus A = \emptyset$.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

5. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$. Tìm $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

IV. CÁC TẬP HỢP SỐ

1. Các tập hợp số đã học



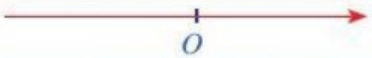
Hình 9

Ta đã biết $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lần lượt là tập hợp số tự nhiên, tập hợp số nguyên, tập hợp số hữu tỷ, tập hợp số thực.

Ta có quan hệ sau:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ (Hình 9)}$$

2. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Tập hợp	Tên gọi và kí hiệu	Biểu diễn trên trục số (Phần được tô màu đỏ)
$\mathbb{R}$	Tập hợp số thực $(-\infty; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	Đoạn $[a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	Khoảng $(a; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	Khoảng $(a; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	Khoảng $(-\infty; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	Nửa khoảng $[a; b)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	Nửa khoảng $(a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	Nửa khoảng $[a; +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	Nửa khoảng $(-\infty; b]$	

Kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; a và b được gọi là đầu mút của các đoạn, khoảng, nửa khoảng.

Ta cũng có thể biểu diễn tập hợp trên trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc đoạn đó, chẳng hạn đoạn $[a; b]$ có thể biểu diễn như sau:



Ví dụ 9: Hãy đọc tên, ký hiệu và biểu diễn mỗi tập hợp sau trên trục số:

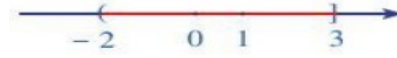
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\};$

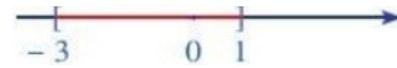
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\};$

Giải

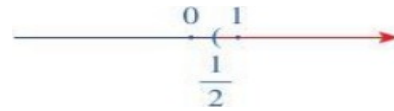
a) Tập A là nửa khoảng $(-2; 3]$ và được biểu diễn là:



b) Tập B là đoạn $[-3; 1]$ và được biểu diễn là:



c) Tập C là khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và được biểu diễn là:



BÀI TẬP

1. Cho tập $X = \{a; b; c\}$. Viết tất cả các tập con của X .

2. Sắp xếp các tập hợp sau theo quan hệ " $\subset$ ": $[2; 5], (2; 5), [2; 5); (1; 5]$.

3. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $[-3; 7] \cap (2; 5);$

b) $(-\infty; 0] \cup (-1; 2);$

c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3);$

d) $(-3; 2) \setminus [1; 3).$

4. Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$,

B là tập nghiệm của phương trình $2x^2 + x - 6 = 0$.

Tìm $C = A \cap B$.

5. Tìm $D = E \cap G$ biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau:

a) $2x + 3 \geq 0$ và $-x + 5 \geq 0;$

b) $x + 2 > 0$ và $2x - 9 < 0.$

6. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ xác định.

7. Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ nói trên.

a) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?

b) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

8. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng ký tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

b) Nếu $\angle AMB = 90^\circ$ thì M nằm trên đường tròn đường kính AB .

c) Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Cộng hòa Xã hội chủ nghĩa Việt Nam.

2. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

A : “Đồ thị hàm số $y = x$ là một đường thẳng”.

B : “Đồ thị hàm số $y = x^2$ đi qua điểm $A(3; 6)$ ”.

3. Cho tứ giác $ABCD$. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó với:

a) P : “Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật”, Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành”;

b) P : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi”, Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông”.

4. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

A : “ $\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geq x$ ”; B : “ $\forall x \in \mathbf{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$ ”;

C : “ $\exists x \in \mathbf{Z}, 2x^2 + 3x - 2 = 0$ ”; D : “ $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 < x$ ”.

5. Dùng kí hiệu để viết mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < -1\}$; b) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$; d) $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -2\}$.

6. Giải Bóng đá vô địch thế giới World Cup 2018 được tổ chức ở Liên bang Nga gồm 32 đội. Sau vòng thi đấu bảng, Ban tổ chức chọn ra 16 đội chia làm 8 cặp đấu loại trực tiếp. Sau vòng đấu loại trực tiếp đó, Ban tổ chức tiếp tục chọn ra 8 đội chia làm 4 cặp đấu loại trực tiếp ở vòng tứ kết. Gọi A là tập hợp 32 đội tham gia World Cup 2018 B là tập hợp 16 đội sau vòng thi đấu bảng. C là tập hợp 8 đội thi đấu vòng tứ kết.

a) Sắp xếp các tập hợp A, B, C theo quan hệ “ $\subset$ ”.

b) So sánh hai tập $\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geq x$ hợp $A \cap C$ và $B \cap C$.

c) Tập hợp $A \setminus B$ gồm những đội bóng bị loại sau vòng đấu nào?

7. Cho hai tập hợp: $A = [0; 3], B = (2; +\infty)$. Xác định $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, \mathbf{R} \setminus B$.

8. Gọi M là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$,

N là tập nghiệm của phương trình $(x+1)(2x-3) = 0$.

Tìm $P = M \cap N$.

Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhân dịp Tết Trung thu, một doanh nghiệp dự định sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh nướng, bánh dẻo lần lượt là 60 g, 50 g. Doanh nghiệp đã nhập về 500 kg đường.



Số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất cần thỏa mãn điều kiện ràng buộc gì để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá lượng đường đã nhập về?

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

1. Trong bài toán ở phần mở đầu, ta gọi x, y lần lượt là số bánh nướng và số bánh dẻo doanh nghiệp dự định sản xuất (x, y là số tự nhiên). Nêu điều kiện ràng buộc đối với x và y để lượng đường sản xuất bánh không vượt quá số lượng đường đã nhập về.

Điều kiện ràng buộc đối với x và y là: $0,06x + 0,05y \leq 500$

Điều kiện trên là một bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax + by < c; \quad ax + by > c; \quad ax + by \leq c; \quad ax + by \geq c$$

Trong đó a, b, c là những số cho trước với a, b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn

Kiến thức trọng tâm: Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by < c$ (*).

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 < c$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình (*).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (*) được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.

Nghiệm và miền nghiệm của các bất phương trình $ax + by > c$, $ax + by \leq c$ và $ax + by \geq c$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1: Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $3x + 2y \geq 5$?

- a) $(2; -1)$; b) $(-2; 0)$; c) $(-1; -1)$;

Giải

a) Thay $x = 2, y = -1$, ta có: $3.2 + 2.(-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(2; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x = -2, y = 0$, ta có: $3.(-2) + 2.0 \geq -5$ là mệnh đề sai.

Vậy $(-2; 0)$ không là nghiệm của bất phương trình.

c) Thay $x = -1, y = -1$, ta có: $3.(-1) + 2.(-1) \geq -5$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(-1; -1)$ là nghiệm của bất phương trình.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

1. Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau và chỉ ra một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn đó:

- a) $5x + 3y < 20$; b) $3x - \frac{5}{y} > 2$;

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Mô tả miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

HOẠT ĐỘNG 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định các điểm $M(x; y)$ mà:

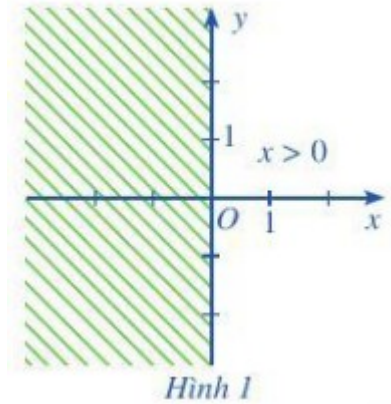
a) $x > 0$ (1); b) $y < 1$ (2);

Để xác định các điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng tọa độ thỏa mãn điều kiện đã cho, ta làm như sau:

a) Đường thẳng $x = 0$ chính là trục tung.

Đường thẳng $x = 0$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trái và nửa mặt phẳng bên phải trục tung.

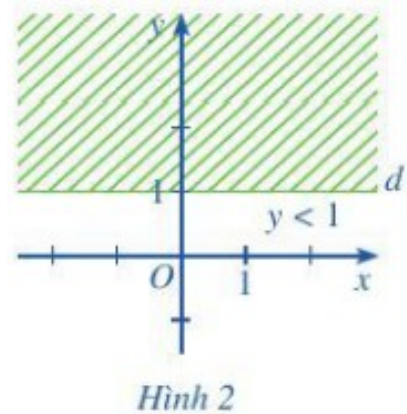
Một điểm có hoành độ dương thì nằm ở nửa mặt phẳng bên phải trục tung và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng bên phải trục tung, được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 1 (không kể trục tung).



b) Vẽ đường thẳng $y = 1$.

Đường thẳng $d: y = 1$ chia mặt phẳng thành hai nửa: nửa mặt phẳng bên trên và nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d (không kể đường thẳng d).

Một điểm có tung độ nhỏ hơn 1 thì nằm ở nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d và ngược lại. Vì thế, miền nghiệm của bất phương trình (2) là nửa mặt phẳng bên dưới đường thẳng d , được mô tả bằng nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 2.



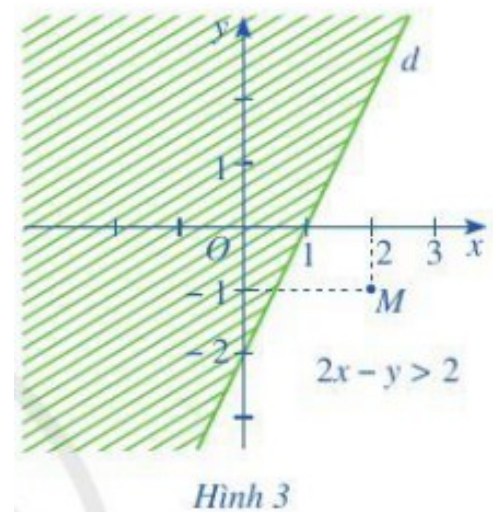
HOẠT ĐỘNG 3. Cho bất phương trình $2x - y > 2$ (3).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $d: 2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

b) Xét điểm $M(2; -1)$. Chứng tỏ $M(2; -1)$ là nghiệm của bất phương trình (3).

c) Đường thẳng d chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng. Gạch đi nửa mặt phẳng không chứa điểm $M(2; -1)$.

Miền nghiệm của bất phương trình (3) là nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 3.



Người ta chứng minh được định lí sau:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình $ax + by = c$ (với a và b không đồng thời bằng 0) xác định một đường thẳng d như sau:

- d có phương trình là $x = \frac{c}{a}$ nếu $b = 0$;
- d có phương trình là $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ nếu $b \neq 0$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lí sau:

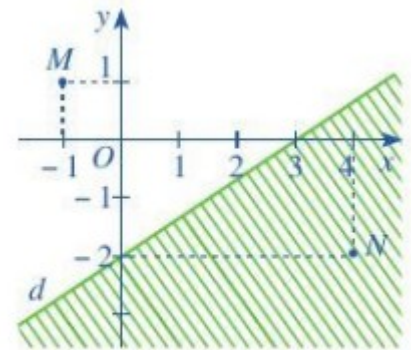
Kiến thức trọng tâm: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể d) là **miền nghiệm** của bất phương trình $ax + by < c$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể d) là **miền nghiệm** của bất phương trình $ax + by > c$.

Chú ý: Đối với bất phương trình dạng $ax + by \leq c$ hoặc $ax + by \geq c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả đường thẳng d .

Ví dụ 2: Nửa mặt phẳng không bị gạch trong Hình 4 (không kể d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi tọa độ hai điểm $M(-1; 1)$, $N(4; -2)$ có là nghiệm của bất phương trình đó không?

Giải

- Điểm $M(-1; 1)$ thuộc nửa mặt phẳng không bị gạch nên $M(-1; 1)$ là nghiệm bất phương trình đó.
- Điểm $N(4; -2)$ thuộc nửa mặt phẳng bị gạch nên $N(4; -2)$ không là nghiệm của bất phương trình đó.



Hình 4

2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc thực hành biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn như sau:

Kiến thức trọng tâm:

Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy :

Bước 1: Vẽ đường thẳng $d: ax + by = c$. Đường thẳng d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng

Bước 2: Lấy một điểm $M(x_0; y_0)$ không nằm trên d (ta thường lấy gốc tọa độ O nếu $c \neq 0$). Tính $a.x_0 + b.y_0$ và so sánh với c

Bước 3: Kết luận

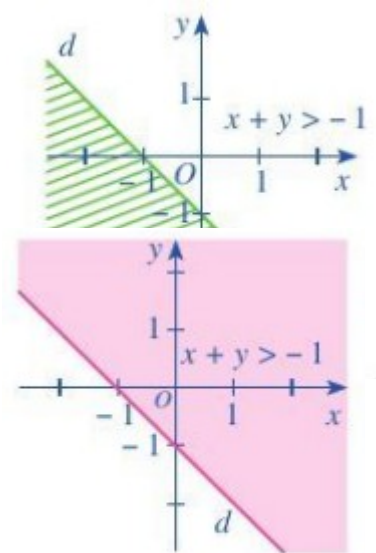
- Nếu $a.x_0 + b.y_0 < c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $a.x + b.y < c$
- Nếu $a.x_0 + b.y_0 > c$ thì nửa mặt phẳng (không kể d) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $a.x + b.y < c$.

Ví dụ 3: Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $x + y > -1$; $x + y \geq -1$.

Giải

- Vẽ đường thẳng $d: x + y = -1$.
- Lấy điểm $O(0;0)$. Ta có $0 + 0 = 0 > -1$.
- Vậy miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 5 chứa điểm $O(0;0)$ không kể đường thẳng d ; miền nghiệm của bất phương trình $x + y \geq -1$ là nửa mặt phẳng không bị gạch ở Hình 5 chứa điểm $O(0;0)$ kể đường thẳng d .

Chú ý: Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.



Hình 6

Chẳng hạn, miền nghiệm của bất phương trình $x + y > -1$ được tô màu như Hình 6.

Luyện tập 2: Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

- $x - 2y < 4$;
- $x + 3y \leq 6$.

BÀI TẬP

1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y < 3$?

- $(0; -1)$;
- $(2; 1)$;
- $(3; 1)$.

2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

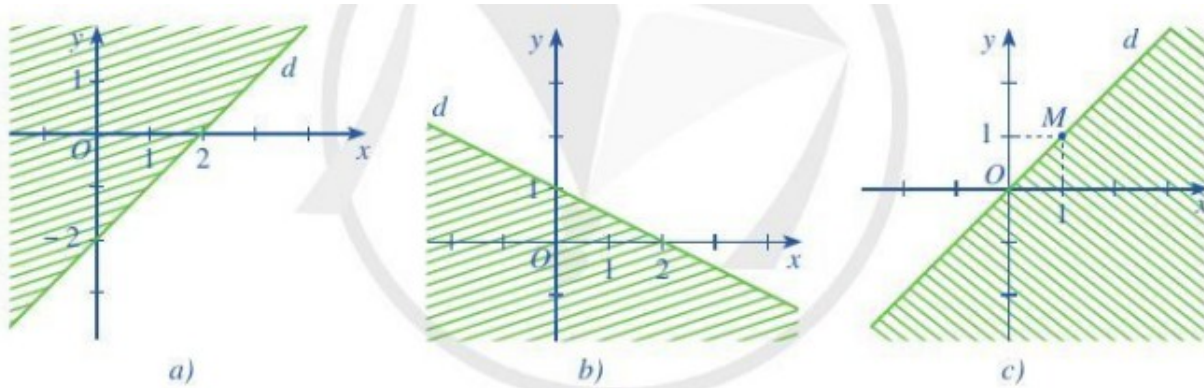
a) $x + 2y < 3$;

b) $3x - 4y \geq -3$;

c) $y \geq -2x + 4$;

d) $y < 1 - 2x$.

3. Phần không gạch (không kể d) ở mỗi Hình 7a, 7b, 7c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình 7

4. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng $60m^2$. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5m^2$, một chiếc bàn là $1,2m^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là $12m^2$.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

5. Trong 1 lạng ($100g$) thịt bò chứa khoảng $26g$ protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng $20g$ protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu $46g$ protein. (Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhnien.vn>) Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng thịt cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Quảng cáo sản phẩm trên truyền hình là một hoạt động quan trọng trong kinh doanh của các doanh nghiệp.

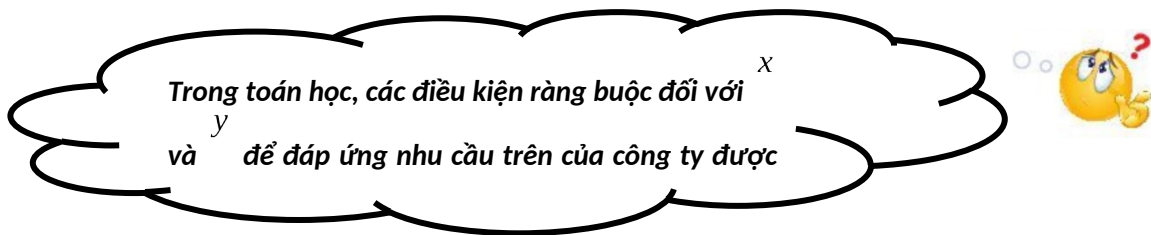
Theo Thông báo số 10/2019, giá quảng cáo trên VTV1 là 30 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khoảng 20h30; là 6 triệu đồng cho 15 giây/1 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00- 17h00.

Một công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng để quảng cáo trên VTV1 với yêu cầu quảng cáo về số lần



Sảnh “Trống đồng” ở trụ sở của VTV tại Hà Nội

phát như sau: ít nhất 10 lần quảng cáo vào khoảng 20h30 và không quá 50 lần quảng cáo vào khung giờ 16h00-17h00. Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00-17h00.



I. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Cho hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y < 3 & (1) \\ x + 2y > -2 & (2) \end{cases}$$

- a) Mỗi bất phương trình (1) và (2) có là bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?
- b) Chỉ ra một nghiệm chung của hai bất phương trình (1) và (2) trong hệ trên.

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là một hệ gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Mỗi nghiệm chung của các bất phương trình trong hệ được gọi là một *nghiệm* của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 2x - 4y \leq 6 & (1) \\ x + y > 2 & (2) \end{cases}$$

Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình trên?

$(3; 1), (1; -2), (5; -3).$

1 Chỉ ra một nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x - 3y < 6 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$$

Giải

- Thay $x = 3, y = 1$ vào hai bất phương trình của hệ, ta có:

$2.3 - 4.1 < 6$ là mệnh đề đúng; $3 + 1 > 2$ là mệnh đề đúng.

Vậy $(3; 1)$ là nghiệm chung của (1) và (2) nên $(3; 1)$ là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x = 1, y = -2$ vào bất phương trình (1) của hệ, ta có:

$2.1 - 4.(-2) < 6$ là mệnh đề sai.

Vậy $(1; -2)$ không là nghiệm của (1) nên $(1; -2)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

- Thay $x = 5, y = -3$ vào bất phương trình (2) của hệ, ta có:

$5 + (-3) > 2$ là mệnh đề sai.

Vậy $(5; -3)$ không là nghiệm của (2) nên $(5; -3)$ không là nghiệm của hệ bất phương trình.

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng tọa độ.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.



Cho hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} x - 2y \geq -2 \\ 7x - 4y \leq 16 \\ 2x + y \geq -4 \end{cases}$$

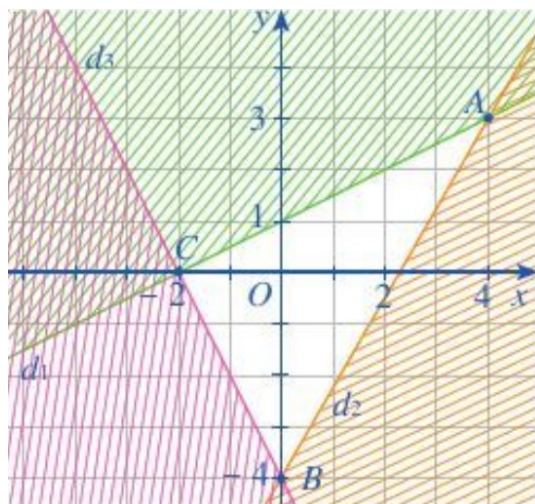
- Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bất phương trình bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho, ta làm như sau (Hình 8):

Bước 1. Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ ba đường thẳng:

$$d_1 : x - 2y = -2; \quad d_2 : 7x - 4y = 16; \quad d_3 : 2x + y = -4.$$

Do tọa độ điểm $O(0;0)$ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên miền nghiệm của từng bất phương trình trong hệ lần lượt là những nửa mặt phẳng không bị gạch chứa điểm $O(0;0)$ (kể cả đường thẳng tương ứng).



Hình 8

Bước 2. Phần không bị gạch (chứa điểm $O(0;0)$) là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cụ thể, miền nghiệm của hệ là tam giác ABC kể cả miền trong (còn gọi là miền tam giác ABC) với $A(4;3)$, $B(0;-4)$, $C(-2;0)$.

Kiến thức trọng tâm: Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta làm như sau:

- Trong cùng mặt phẳng tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

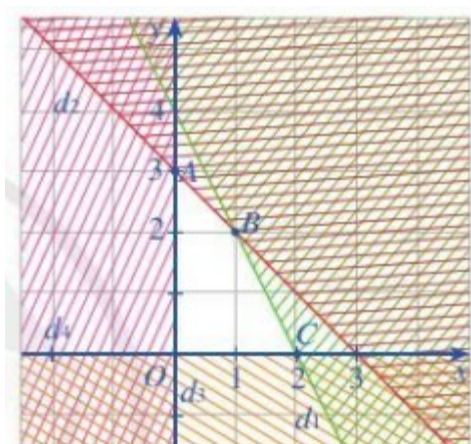
Ví dụ 2: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Giải. (Hình 9)

Vẽ các đường thẳng: $d_1 : 2x + y = 4; d_2 : x + y = 3$

; $d_3 : x = 0$ là trục tung; $d_4 : y = 0$ là trục hoành.



Hình 9

Gạch đi các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ kể cả miền

trong (còn gọi là miền tứ giác $OABC$) với $O(0;0), A(0;3), B(1;2), C(2;0)$.

Luyện tập 2: Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x - y > -3 \\ -2x + 3y < 6 \\ 2x + y > -4. \end{cases}$$

III. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Bài toán 1. Trong bài toán ở phần mở đầu, tìm x và y sao cho tổng số lần xuất hiện quảng cáo của công ty là nhiều nhất.

Giải

Gọi x, y lần lượt là số lần phát quảng cáo vào khoảng $20h30$ và vào khung giờ $16h00 - 17h00$. Theo giả thiết, ta có: $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \geq 10, 0 \leq y \leq 50$.

Tổng số lần phát quảng cáo là $T = x + y$.

Số tiền công ty cần chi là $30x + 60y$ (triệu đồng).

Do công ty dự định chi không quá 900 triệu đồng nên $30x + 60y \leq 900$ hay $5x + y \leq 150$.

Ta có hệ bất phương trình:

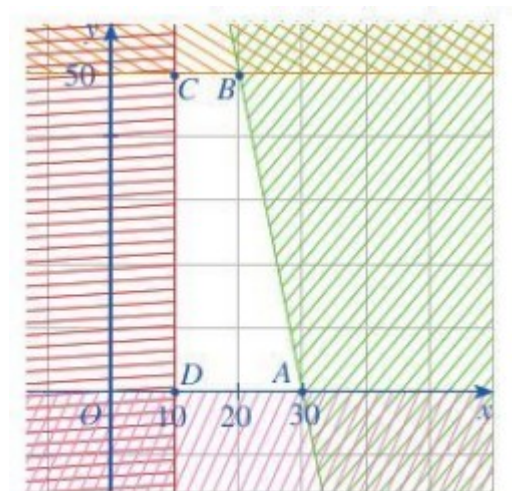
$$\begin{cases} 5x + y \leq 150 \\ x \geq 10 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \quad (I)$$

Bài toán đưa về tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (I) sao cho $T = x + y$ có giá trị lớn nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) .

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(30;0), B(20;50), C(10;50), D(10;0)$ (Hình 10).

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = x + y$ đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.



Hình 10

Tính giá trị của biểu thức $T = x + y$ tại cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20, y = 50$ ứng với tọa độ đỉnh B .

Vậy để phát được số lần quảng cáo nhiều nhất thì số

lần phát quảng cáo vào khoảng 20h30 và vào khung giờ 16h00 — 17h00 lần lượt là 20 và 50 lần.

Bài toán 2. Người ta dự định dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 140 kg chất A và 9 kg chất B .

Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 4 triệu đồng, có thể chiết xuất được 20 kg chất A và 0,6 kg chất B .

Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 3 triệu đồng, có thể chiết xuất được 10 kg chất A và 1,5 kg chất B .

Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất? Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 10 tấn nguyên liệu loại I và không quá 9 tấn nguyên liệu loại II .

Giải

Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I , loại II cần sử dụng.

Khi đó, ta chiết xuất được $20x + 10y$ (kg) chất A và $0,6x + 1,5y$ (kg) chất B .

Theo giả thiết, x và y phải thỏa mãn các điều kiện:

$$0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 9;$$

$$20x + 10y \geq 140 \text{ hay } 2x + y \geq 14;$$

$$0,6x + 1,5y \geq 9 \text{ hay } 2x + 5y \geq 30.$$

Tổng số tiền cần mua nguyên liệu là

$$T = 4x + 3y.$$

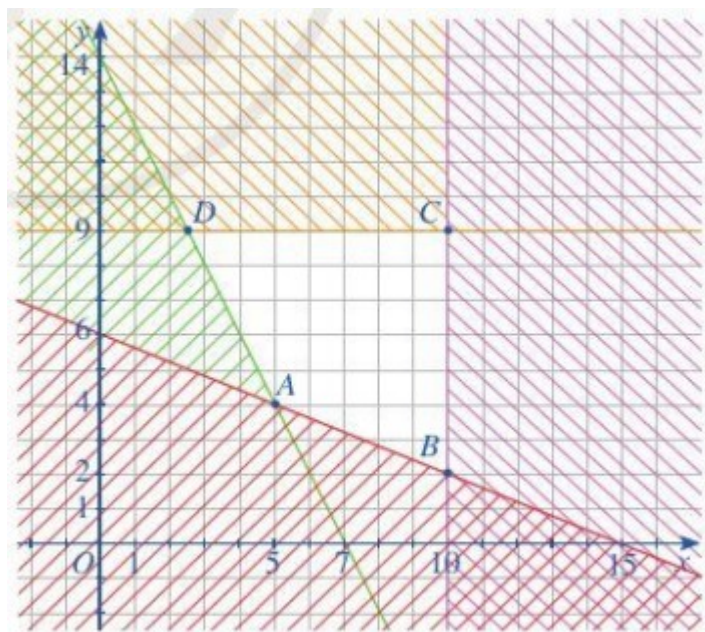
Bài toán đưa về: Tìm x, y là nghiệm

của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases} \quad (II)$$

sao cho $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (II).



Hình 11

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tứ giác $ABCD$ với

$$A(5;4), B(10;2), C(10;9), D\left(\frac{5}{2};9\right) \quad (\text{Hình 11}).$$

Người ta chứng minh được: Biểu thức $T = 4x + 3y$ có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Tính giá trị của biểu thức $T = 4x + 3y$ tại cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó. Ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 32 khi $x = 5, y = 4$ ứng với tọa độ đỉnh A .

Vậy để chi phí nguyên liệu là ít nhất, cần sử dụng 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II; khi đó chi phí là 32 triệu đồng.

BÀI TẬP

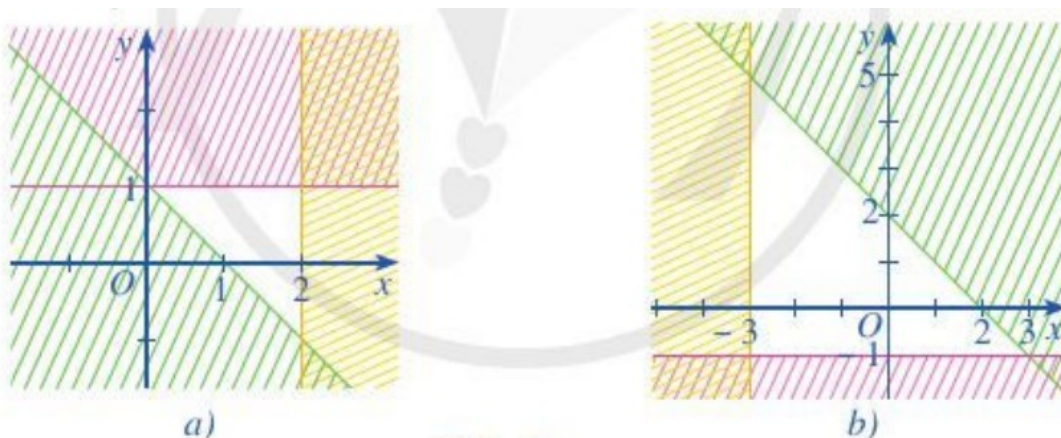
1. Kiểm tra xem mỗi cặp số $(x; y)$ đã cho có là nghiệm của hệ bất phương trình tương ứng không.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 3x + 2y \geq -6 \\ x + 4y > 4 \end{cases} & (0; 2), (1; 0) ; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{b) } \begin{cases} 4x + y \leq -3 \\ -3x + 5y \geq -12 \end{cases} & (-1; -3), (0; -3) . \end{array}$$

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y < -4 \\ y \geq x + 5; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

3. Miền không bị gạch ở mỗi Hình $12a, 12b$ là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào cho ở dưới đây?



Hình 12

a)
$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x > -3 \\ y \geq -1; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y < x \\ x \leq 0 \\ y > -3; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y > -x + 1 \\ x \leq 2 \\ y < 1. \end{cases}$$

4. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra một chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

1. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình:

a) $3x - y > 3;$

b) $x + 2y \leq -4;$

c) $y \geq 2x - 5.$

2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 2x + y < 2; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 10y \leq 20 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq -2; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3. \end{cases}$$

3. Nhu cầu canxi tối thiểu cho một người đang độ tuổi trưởng thành trong một ngày là 1300mg . Trong 1lạng đậu nành có 165mg canxi, 1 lạng thịt có 15mg canxi. (Nguồn: <https://hongngochospital.vn>)

Gọi x, y lần lượt là số lượng đậu nành và số lượng thịt mà một người đang độ tuổi trưởng thành ăn trong một ngày.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng canxi cần thiết trong một ngày của một người trong độ tuổi trưởng thành.

b) Chỉ ra một nghiệm $(x_0; y_0)$ với $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ của bất phương trình đó.

4. Bác Ngọc thực hiện chế độ ăn kiêng với yêu cầu tối thiểu hằng ngày qua thức uống là 300 ca-lo, 36 đơn vị vitamin A và 90 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ nhất cung cấp 60 ca-lo, 12 đơn vị vitamin A và 10 đơn vị vitamin C. Một cốc đồ uống ăn kiêng thứ hai cung cấp 60 ca-lo, 6 đơn vị vitamin A và 30 đơn vị vitamin C.

a) Viết hệ bất phương trình mô tả số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai mà bác Ngọc nên uống mỗi ngày để đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

b) Chỉ ra hai phương án mà bác Ngọc có thể chọn lựa số lượng cốc cho đồ uống thứ nhất và thứ hai nhằm đáp ứng nhu cầu cần thiết đối với số ca-lo và số đơn vị vitamin hấp thụ.

5. Một chuỗi nhà hàng ăn nhanh bán đồ ăn từ 10h00 sáng đến 22h00 mỗi ngày. Nhân viên phục vụ của nhà hàng làm việc theo hai ca, mỗi ca 8 tiếng, ca I từ 10h00 đến 18h00 và ca II từ 14h00 đến 22h00.

Khoảng thời gian làm việc	Tiền lương/ giờ
10h00 – 18h00	20 000 đồng
14h00 – 22h00	22 000 đồng

Tiền lương của nhân viên được tính theo giờ (bảng bên).

Để mỗi nhà hàng hoạt động được thì cần tối thiểu 6 nhân viên trong khoảng 10h00 – 18h00, tối thiểu 24 nhân viên trong thời gian cao điểm 14h00 – 22h00 và không quá 20 nhân viên trong khoảng 18h00 – 22h00. Do lượng khách trong khoảng 14h00 – 22h00 thường đông hơn nên nhà hàng cần số nhân viên ca II ít nhất phải gấp đôi số nhân viên ca I. Em hãy giúp chủ chuỗi nhà hàng chỉ ra cách huy động số lượng nhân viên cho mỗi ca sao cho chi phí tiền lương mỗi ngày là ít nhất.



§1 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Galile

o Galilei (1564 – 1642), sinh ra tại thành phố Pisa (Italia), là nhà bác học vĩ đại của thời kì Phục Hưng. Ông được mệnh danh là “cha đẻ của khoa học hiện đại”. Trước Galileo, người ta tin rằng vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ, ông bác bỏ điều này bằng thí nghiệm nổi tiếng ở tháp nghiêng Pisa. Từ thí nghiệm của Galileo, các nhà khoa học sau này được truyền cảm hứng rằng chúng ta chỉ có thể rút ra tri thức khoa học từ các quy luật khách quan của tự nhiên, chứ không phải từ niềm tin.

Làm thế nào để mô tả được mối liên hệ giữa thời gian t và quãng đường đi được S của vật rơi tự do?
Làm thế nào để có được hình ảnh hình học minh họa mối liên hệ giữa hai đại lượng đó?

I. HÀM SỐ

Tháp nghiêng Pisa (Italia)

(Nguồn: <https://prnterest.com>)

1. Định nghĩa

HOẠT ĐỘNG 1. Trong bài toán ở phần mở đầu, ta đã biết công thức tính quãng đường đi được S (m)

của vật rơi tự do theo thời gian t (s) là $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Với mỗi giá trị $t = 1, t = 2$, tính giá trị tương ứng của S .

b) Với mỗi giá trị của t có bao nhiêu giá trị tương ứng của S ?

HOẠT ĐỘNG 2. Để xây dựng phương án kinh doanh một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm loại đó được bán ra.

a) Với mỗi giá trị $x = 100, x = 200$, tính giá trị tương ứng của y .

b) Với mỗi giá trị của x có bao nhiêu giá trị tương ứng của y ?

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Kiến thức trọng tâm: Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một *hàm số*.

Ta gọi x là *biến số* và y là *hàm số* của x .

Tập hợp D được gọi là *tập xác định* của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in D$.

Ví dụ 1:

a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải hàm số của r hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải là hàm số của x hay không? Giải thích.

Giải

a) S là hàm số của r vì mỗi giá trị của r chỉ cho đúng một giá trị của S .

b) y không phải là hàm số của x vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của y là 1 và -1.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

1. Trong y học, một người cân nặng 60 kg chạy với vận tốc 6,5 km/h thì lượng ca-lo tiêu thụ được tính theo công thức $c = 4,7t$ (Nguồn: <https://irace.vn>), trong đó thời gian t được tính theo phút. Hỏi c có phải là hàm số của t không? Vì sao?

2. Cách cho hàm số

a) **Hàm số cho bằng một công thức**

cùng với cách nói hàm số cho bằng công thức, ta cũng nói hàm số cho bằng biểu thức.

HOẠT ĐỘNG 3. Cho hai hàm số $y = 2x + 1$ (1) và $y = \sqrt{x - 2}$ (2)

a) Nêu biểu thức xác định mỗi hàm số trên.

b) Tìm x sao cho mỗi biểu thức trên có nghĩa.

Kiến thức trọng tâm: Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x}$; b) $y = \sqrt{x-1}$.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

2. Tìm tập xác định của hàm số: $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$

ra được những số liệu bất thường (hay còn gọi là dị biệt, trong tiếng Anh là Outliers). Ta có thể sử dụng các số liệu đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu không ghép nhóm để thực hiện điều đó.

Ví dụ 5: Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 40 bạn học sinh lớp 10 của một trường trung học phổ thông (đơn vị: ki-lô-gam):

30	32	45	45	45	47	48	44	44	49
49	49	52	51	50	50	53	55	54	54
54	56	57	57	58	58,5	58,5	60	60	60
60	63,5	63	62	69	58,5	88	85	72	71

a) Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Từ kết quả câu a), bước đầu xác định những số liệu bất thường trong mẫu số liệu trên.

Giải

a) Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần như sau:

30	32	44	44	45	45	45	47	48	49
49	49	50	50	51	52	53	54	54	54
55	56	57	57	58	58,5	58,5	60	60	60
60	62	63	63,5	68,5	69	71	72	85	88

- Trung vị của mẫu số liệu trên là: $\frac{54 + 55}{2} = 54,5$

- Trung vị của nửa dãy phía dưới 30 32 44 44 45 45 45 47 48 49 49 49 50 50 51 52

53 54 54 54 là: $\frac{49+49}{2}=49$.

- Trung vị của nửa dãy phía trên 55 56 57 57 58 58,5 58,5 60 60 60

60 62 63 63,5 68,5 69 71 72 85 88 là: $\frac{60+60}{2}=60$.

Vậy $Q_1=49; Q_2=54,5; Q_3=60$

b) Dựa vào trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho, bước đầu ta có thể thấy những số liệu bất thường trong mẫu số liệu đó là: 30 32 85 88.

Chú ý: Trong thực tiễn, những số liệu bất thường của mẫu số liệu được xác định bằng những công cụ toán học sâu sắc hơn.

BÀI TẬP

1. Chiều cao (đơn vị: xăng-ti-mét) của các bạn tổ I ở lớp $10A$ lần lượt là:

165 155 171 167 159 175 165 160 158

Đối với mẫu số liệu trên, hãy tìm:

a) Số trung bình cộng; b) Trung vị; c) Mốt; d) Tứ phân vị.

2. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau:

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

a) Mốt của mẫu số liệu trên là bao nhiêu?

b) Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?

3. Bảng 2 cho biết nhiệt độ trung bình các tháng trong năm ở Hà Nội.

Thán	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

g												
Nhiệt độ	16,4	17,0	20,2	23,7	27,3	28,8	28,9	28,2	27,2	24,6	21,4	18,2

(Nguồn: Tập bản đồ Địa lí 6, NXB Giáo dục Việt Nam, 2020)

Bảng 2

- a) Nhiệt độ trung bình trong năm ở Hà Nội là bao nhiêu?
- b) Nhiệt độ trung bình của tháng có giá trị thấp nhất là bao nhiêu độ C? Cao nhất là bao nhiêu độ C ?

4. Bảng 3 cho biết tổng diện tích rừng từ năm 2008 đến năm 2019 ở nước ta.

Năm	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Tổng diện tích rừng (triệu ha)	13,1	13,2	13,4	13,5	13,9	14,0	13,8	14,1	14,4	14,4	14,5	14,6

(Nguồn: <https://baodantoc.vn>)

Bảng 3

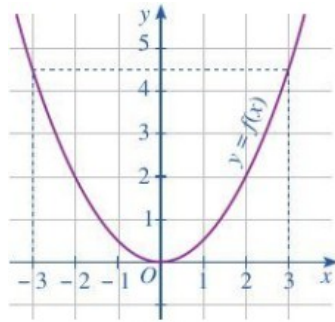
- a) Diện tích rừng trung bình của nước ta từ năm 2008 đến năm 2019 là bao nhiêu?
- b) Từ năm 2008 đến năm 2019 , diện tích rừng của năm có giá trị thấp nhất là bao nhiêu triệu héc-ta? Cao nhất là bao nhiêu triệu héc-ta?
- c) So với năm 2008 , tỉ lệ tổng diện tích rừng của nước ta năm 2019 tăng lên được bao nhiêu phần trăm? Theo em, tỉ lệ tăng đó là cao hay thấp?
- d) Hãy tìm hiểu số liệu về tổng diện tích rừng của tỉnh em đang sống trong một số năm gần đây.

Để chứng tỏ điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng tọa độ *không thuộc* đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Chứng tỏ rằng $a \notin D$.

Khả năng 2: Khi $a \in D$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 3



Hình 3

a) Trong các điểm có tọa độ $(-2; 2), (0; 0), (0; 1), (2; 2), (1; 1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.

Giải

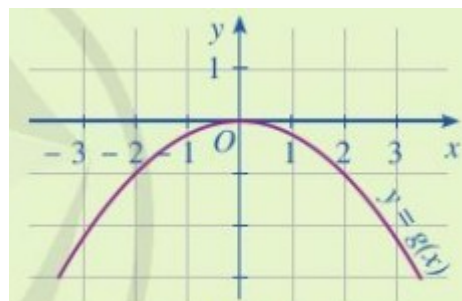
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có tọa độ là: $(-2; 2), (0; 0), (2; 2)$.

Các điểm không thuộc đồ thị có tọa độ là: $(0; 1), (1; 1)$.

b) Quan sát đồ thị. Ta có : $f(3) = \frac{9}{2}$.

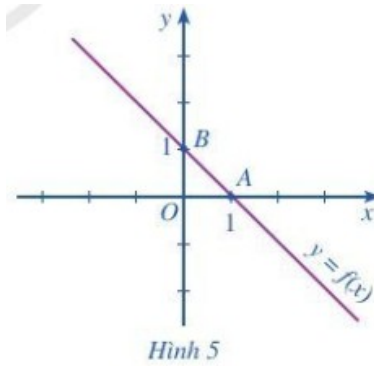
Tọa độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3; \frac{9}{2}\right), \left(3; \frac{9}{2}\right)$

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG 5: Dựa vào Hình 4, xác định $g(-2), g(0), g(2)$.



Hình 4

Ví dụ 7: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 5.



Hình 5

a) Xác định tọa độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục tọa độ.

b) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

Giải

a) Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1; 0)$. Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 1)$.

b) Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y = f(x) = ax + b (a \neq 0)$. Giao điểm của đồ thị đó với trục Oy là điểm có tọa độ $(0; b)$ nên $b = 1$. Suy ra $y = f(x) = ax + 1$. Khi đó, giao điểm của đồ thị đó với trục Ox là điểm có tọa độ $\left(-\frac{1}{a}; 0\right)$ nên $-\frac{1}{a} = 1$, tức là $a = -1$. Vậy $y = f(x) = -x + 1$.

III. SỬ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm

HOẠT ĐỘNG 5: Cho hàm số $f(x) = x + 1$.

a) So sánh $f(1)$ và $f(2)$.

b) Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Như vậy, hàm số $f(x) = x + 1$ có tính chất sau đây: Khi x tăng thì $f(x)$ cũng tăng. Ta nói hàm số trên là *đồng biến* trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là *ngịch biến* trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 8: Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Xét hai số bất kì $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

Ta có: $0 < x_1 < x_2$ nên $6x_1^2 < 6x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG 6: Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Nhận xét: Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên*.

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

- Dấu mũi tên đi xuống (từ $-\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

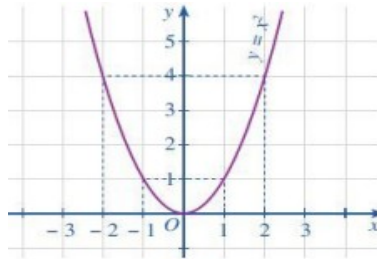
- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

HOẠT ĐỘNG 6: Cho đồ thị hàm số: $y = f(x) = x^2$ như Hình 6.

a) So sánh $f(-2), f(-1)$. Nêu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ -2 đến -1 .

b) So sánh $f(1), f(2)$. Nêu nhận xét về sự biến thiên của giá trị hàm số khi giá trị biến x tăng dần từ 1 đến 2 .

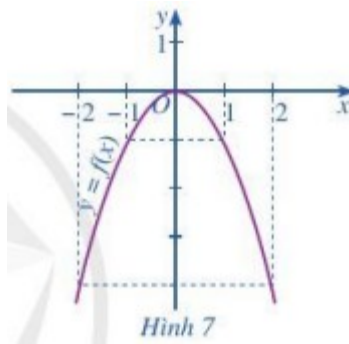


Hình 6

Nhận xét

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi lên” trên khoảng đó.
 - Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi xuống” trên khoảng đó.
- Khi nói đồ thị “đi lên” hay “đi xuống”, ta luôn kể theo chiều tăng của biến số, nghĩa là kể từ trái qua phải.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 7. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.



Hình 7

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Giải

- Phát biểu “Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$ ” là đúng vì đồ thị hàm số đã cho “đi lên” trên khoảng đó.
- Phát biểu “Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ ” là đúng vì đồ thị hàm số đã cho “đi xuống” trên khoảng đó.
- Phát biểu “Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ ” là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần “đi lên” vừa có phần “đi xuống” trên khoảng đó.

BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = -x^2$; b) $y = \sqrt{2-3x}$; c) $y = \frac{4}{x+1}$; d) $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in Q \\ 0 & \text{nếu } x \in R \setminus Q \end{cases}$

2. Bảng 1 dưới đây cho biết chỉ số $PM_{2,5}$ (bụi mịn) ở Thành phố Hà Nội từ tháng 1 đến tháng 12 của năm 2019.

	Trung bình năm 2019	Tháng											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$PM_{2,5}$ ($\mu g/m^3$)	46,9	59,3	36,0	50,2	40,3	45,8	36,5	30,4	33,1	48,3	43,2	66,3	72,7

(Nguồn: Báo cáo chất lượng không khí thế giới 2019)

Bảng 1

- a) Nêu chỉ số $PM_{2,5}$ trong tháng 2, tháng 5, tháng 10.
b) Chỉ số $PM_{2,5}$ có phải là hàm số của tháng không? Tại sao?

3. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

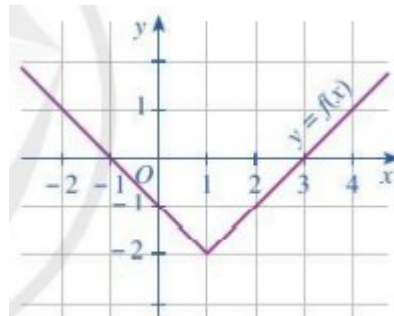
Khối lượng đến 250 g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g đến 100 g	6 000
Trên 100 g đến 250 g	8 000

- a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản $x(g)$ hay không? Nếu đúng, hãy xác định những công thức tính y .
b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150g, 200g.

4. Cho hàm số $y = -2x^2$.

- a) Điểm nào trong các điểm có tọa độ $(-1; -2), (0; 0), (0; 1), (2021; 1)$ thuộc đồ thị của hàm số trên?
b) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt bằng -2, 3 và 10.
c) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -18.

5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 8.



Hình 8

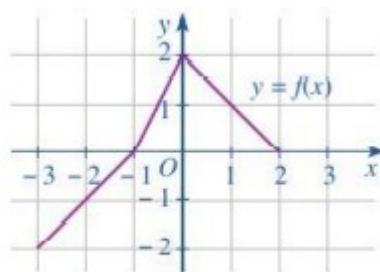
- a) Trong các điểm có tọa độ $(1; -2), (0; 0), (2; -1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?
b) Xác định $f(0); f(3)$.
c) Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 0.

6. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho:

a) Nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$;

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 9.



Hình 9

Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

8. Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần đi chuyển trong khoảng từ 550km đến 600km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá. Công ty A có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5000 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Công ty B có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7500 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe. Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

§2 HÀM SỐ BẬC HAI. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ỨNG DỤNG

Cầu cảng Sydney là một trong những hình ảnh biểu tượng của thành phố Sydney và

nước Australia. Độ cao của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney có thể biểu thị theo độ dài x (m)

tính từ chân cầu bên trái dọc theo đường nối với chân cầu bên phải như sau (Hình 10):

$$y = -0,00188(x - 251,5)^2 + 118.$$

$$y = -0,00188(x - 251,5)^2 + 118$$

Hàm số

có gì đặc biệt?



(Nguồn: Passy's World of Mathematics)

Hình 10

I. HÀM SỐ BẬC HAI



Cho hàm số $y = -0,00188(x - 251,5)^2 + 118$.

a) Viết công thức xác định hàm số trên về dạng đa thức theo lũy thừa với số mũ giảm dần của x .

b) Bậc của đa thức trên bằng bao nhiêu?

c) Xác định hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

Ví dụ 1:

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

- a) $y = 8x^2 - 6x + 1$; b) $y = 2x + 2021$.

Giải

a) Hàm số $y = 8x^2 - 6x + 1$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 bằng 8, hệ số của x bằng -6, hệ số tự do bằng 1.

b) Hàm số $y = 2x + 2021$ không phải là hàm số bậc hai.

II. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI



$$y = x^2 + 2x - 3$$

Cho hàm số $y = \dots$ trong bảng sau:

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	-3	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?	?

$$A(-3; 0), B(-2; -3), C(-1; -4)$$

b) Vẽ các điểm

$$D(0; -3), E(1; 0)$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

của đồ thị hàm số

trong

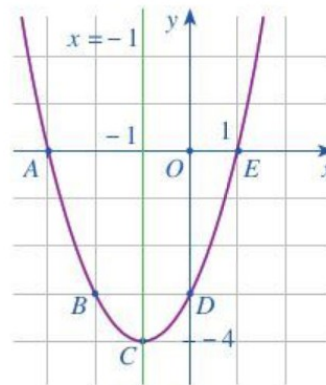
Oxy

độ.

A, B, C, D, E

c) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm

. Đường



Hình 11

mặt phẳng tọa

cong đó là

$$y = x^2 + 2x - 3$$

đường parabol và cũng chính là đồ thị hàm số (Hình 11).

d) Cho biết tọa độ của điểm thấp nhất và phương trình của parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?

Nhận xét: Đường cong (liền nét) đi qua 5 điểm

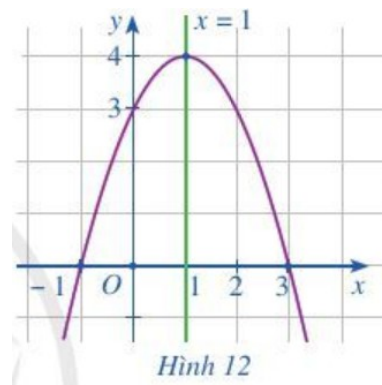
$$y = x^2 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$$

(Hình 11) cho ta đồ thị hàm số

parabol quay bề lõm lên trên, có tọa độ của điểm thấp nhất $(-1; -4)$

$$x = -1$$

và có trục đối xứng là đường thẳng



Hình 12

trục đối xứng
hay xuống

A, B, C, D, E

Đó là đường
nhất là



$$y = -x^2 + 2x + 3$$

Cho hàm số

$$-1, 0, 1, 2, 3$$

a) Tìm tọa độ 5 điểm thuộc đồ thị hàm số trên có hoành độ lần lượt là $-1, 0, 1, 2, 3$ rồi vẽ chúng trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Vẽ đường cong đi qua 5 điểm trên. Đường cong đó cũng là đường parabol và là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$

(Hình 12)

$$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

Đồ thị hàm số bậc hai

là một đường parabol có đỉnh là

$$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$b$$

c) Cho biết tọa độ của điểm cao nhất và phương trình trục đối xứng của

parabol đó. Đồ thị hàm số đó quay bề lõm lên trên hay xuống dưới?

$$f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0) \quad -\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Nhận xét: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta có: $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Để vẽ đồ thị hàm số

$$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

, ta thực hiện các bước:

- Xác định tọa độ đỉnh: $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$;

- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

- Xác định một số điểm đặc biệt, chẳng hạn: giao điểm với trục tung (có tọa độ $(0; c)$) và trục hoành (nếu có), điểm đối xứng với điểm có tọa độ $(0; c)$ qua trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Vẽ đường parabol đi qua các điểm đã xác định ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Chú ý: Nếu $a > 0$ thì parabol có bề lõm quay lên trên, nếu $a < 0$ thì parabol có bề lõm quay xuống dưới.

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 2x - 3$

Giải

2 Vẽ đồ thị mỗi hàm số bậc hai sau:

a) $y = x^2 - 4x - 3$

b) $y = x^2 + 2x + 1$

Ta có: $a = 1, b = -2, c = -3, \Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16$

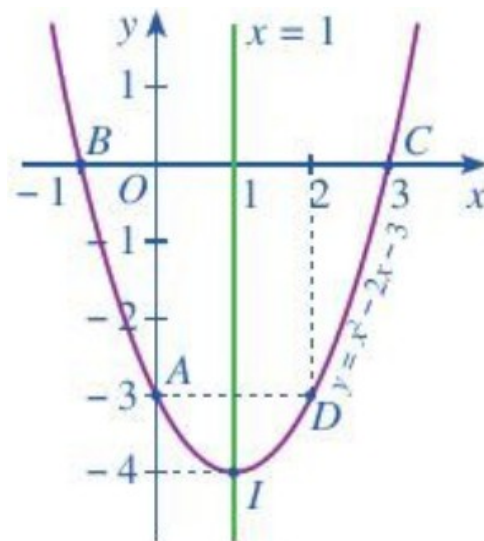
- Tọa độ đỉnh $I(1; -4)$

- Trục đối xứng $x = 1$

- Giao điểm của parabol với trục tung là $A(0; -3)$.

- Giao điểm của parabol với trục hoành là $B(-1; 0)$ và $C(3; 0)$

- Điểm đối xứng với điểm $A(0; -3)$ qua trục đối xứng $x = 1$ là $D(2; -3)$



Hình 13

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ như Hình 13.

Hoạt động 4:

a) Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x - 3$ trong Hình 11. Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

b) Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = -x^2 + 2x + 3$ trong Hình 12. Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

Nhận xét: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$

+ Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

+ Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số bậc hai như sau:

$a > 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

$a < 0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Ví dụ 3: Nêu khoảng đồng biến, nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3x^2 + 5x - 2$

b) $y = -4x^2 + 6x + 3$

Giải

a) Ta có: $a = 3 > 0, b = 5, \frac{-b}{2a} = -\frac{5}{6}$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right)$;
đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{6}; +\infty\right)$

b) $a = -4 < 0, b = 6, \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$

3 Lập bảng biến thiên của các hàm số sau:

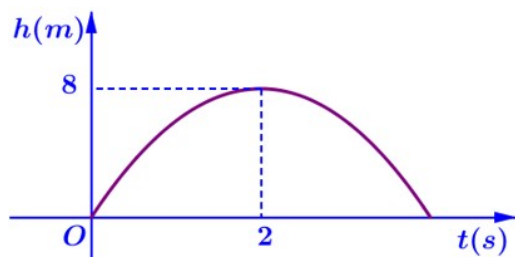
a) $y = x^2 - 3x + 4$

$\therefore v = -2x^2 + 5$

III. ỨNG DỤNG

Các hàm số bậc hai có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết những vấn đề thực tiễn. Chẳng hạn, ta sẽ tìm hiểu ứng dụng đó thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt cao nào đó rồi rơi xuống. Hình 14 minh họa quỹ của quả bóng là một phần của cung parabol trong phẳng tọa độ Oth , trong đó t là thời gian (tính bằng kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá đất. Sau khoảng 2s, quả bóng đó lên đến vị trí cao 8 m.



Hình 14

đến độ
đạo
mặt
giây)
bằng
từ mặt
nhất là

a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.

b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3 s.

c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Giải:

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao h (m) theo thời gian t (s) là: $h = f(t) = at^2 + bt + c$ ($a < 0$).

Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c = 0$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.

Sau 2 s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8 m nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{2}=2 \\ f(2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ 4a+2b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ -4a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$.

b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s là: $h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6(\text{m})$.

c) *Cách 1.* Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h=0$, tức là: $\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$.

Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

Cách 2. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một phần của cung parabol có trục đối xứng là đường thẳng $t=2$. Điểm xuất phát và điểm quả bóng chạm đất (trở lại) đối xứng nhau qua đường thẳng $t=2$. Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên.

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG

4. Trong bài toán ở phần mở đầu, độ cao $y(\text{m})$ của một điểm thuộc vòng cung thành cầu cảng Sydney đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

BÀI TẬP

1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai? Với những hàm số bậc hai đó, xác định a, b, c lần lượt là hệ số của x^2 , hệ số của x và hệ số tự do.

a) $y = -3x^2$;

b) $y = 2x(x^2 - 6x + 1)$;

c) $y = 4x(2x - 5)$.

2. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 4$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $M(1; 12)$ và $N(-3; 4)$;

b) Có đỉnh là $I(-3; -5)$.

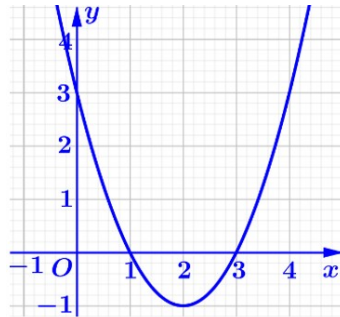
3. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - 6x + 4$;

b) $y = -3x^2 - 6x - 3$.

4. Cho đồ thị hàm số bậc hai ở Hình 15.

- Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số.
- Xác định khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.
- Tìm công thức xác định hàm số.

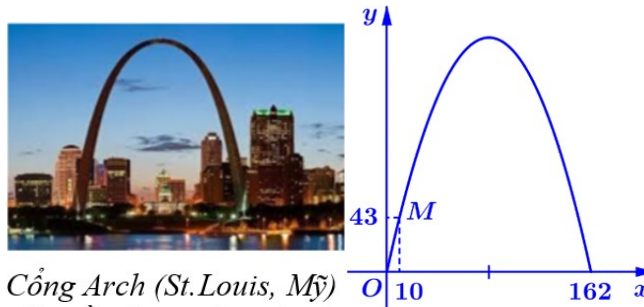


Hình 15

5. Nêu khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của mỗi hàm số sau:

a) $y = 5x^2 + 4x - 1$; b) $y = -2x^2 + 8x + 6$.

6. Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như Hình 16 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có tọa độ $(162; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có tọa độ là $(10; 43)$. Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



Cổng Arch (St. Louis, Mỹ)
(Nguồn: <https://visaf.vn>)

Hình 16

BÀI 3. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

Để xây dựng phương án kinh doanh cho một loại sản phẩm, doanh nghiệp tính toán lợi nhuận y (đồng) theo công thức sau: $y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, trong đó x là số sản phẩm được bán ra. Như vậy, việc đánh giá hiệu quả kinh doanh loại sản phẩm trên dẫn tới việc xét dấu của

$y = -200x^2 + 92000x - 8400000$, tức là ta cần xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92000x - 8400000$.

Làm thế nào để xét dấu của tam thức bậc hai?

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ còn gọi là tam thức bậc hai. Sau đây, ta sẽ làm quen với việc xét dấu của tam thức bậc hai.

I. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

Ta đã biết:

- $ax^2 + bx + c > 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.

- $ax^2 + bx + c < 0$ ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

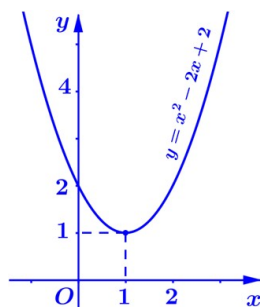
Như vậy, ta có thể nhận ra dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ là "+" (hoặc "-")

thông qua việc nhận ra phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên (hoặc phía dưới) trục hoành.

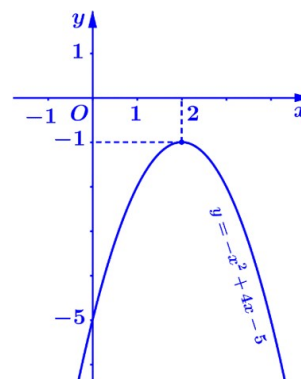
a) Quan sát *Hình 17* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

b) Quan sát *Hình 18* và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta < 0$.



Hình 17



Hình 18

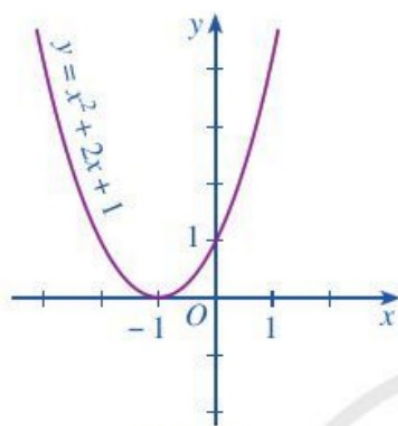
Nhận xét: Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

HOẠT ĐỘNG 2.

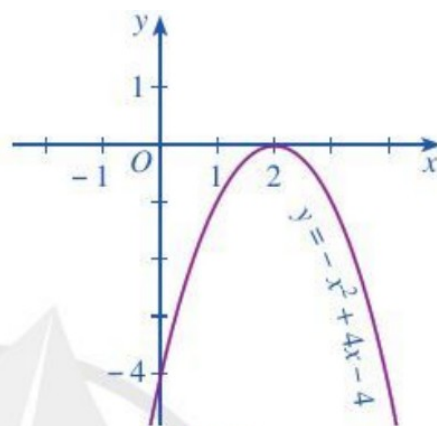
a) Quan sát Hình 19 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

b) Quan sát Hình 20 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a trong trường hợp $\Delta = 0$.



Hình 19



Hình 20

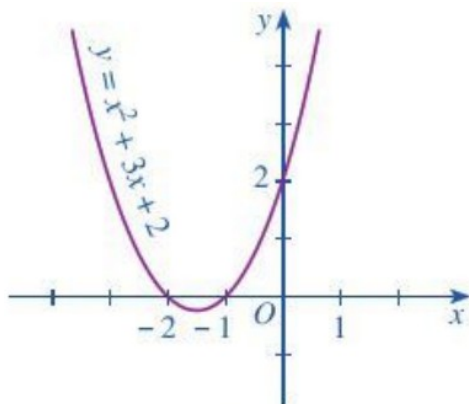
Nhận xét: Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.

HOẠT ĐỘNG 3.

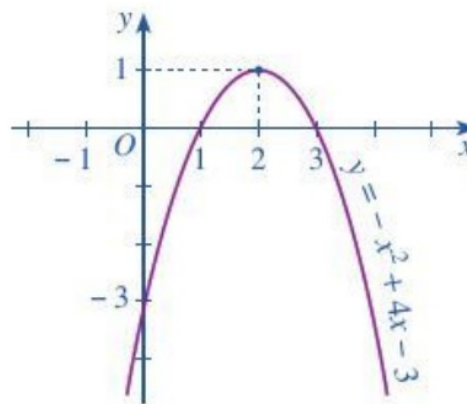
a) Quan sát Hình 21 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 3x + 2$ tùy theo các khoảng của x .

b) Quan sát Hình 22 và cho biết dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tùy theo các khoảng của x .

c) Từ đó rút ra mối liên hệ về dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với dấu của hệ số a tùy theo các khoảng của x trong trường hợp $\Delta > 0$.



Hình 21



Hình 22

Nhận xét: Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(x_1; x_2)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $f(x)$ và $x_1 < x_2$.

Kiến thức trọng tâm

Người ta đã chứng minh được định lí về dấu của tam thức bậc hai như sau:

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$.

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó:

$f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$;

$f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc các khoảng $(x_1; x_2)$.

Nhận xét: Trong định lí, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$ với $b = 2b'$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$;

b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$;

b) $f(x) = -x^2 + 64x - 9$.

Ví dụ 2. Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ và hệ số $a = 1 > 0$.

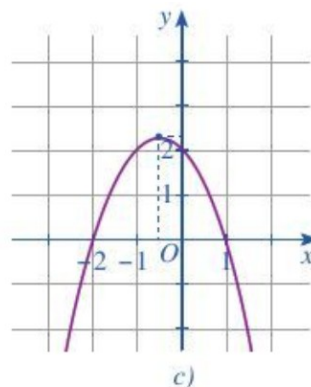
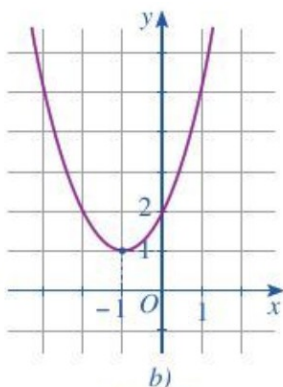
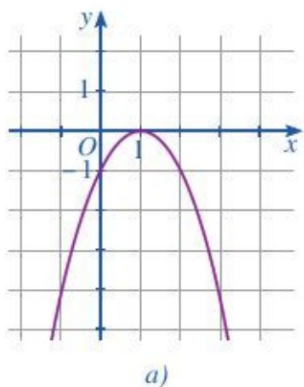
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG

Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho ở mỗi Hình 23a, 23b, 23c.



Hình 23

Giải

- a) Từ đồ thị Hình 23a ta có nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ là $x = 1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

- b) Từ đồ thị Hình 23b ta có tam thức bậc hai $f(x)$ vô nghiệm. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

- c) Từ đồ thị Hình 23c ta có tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Bảng xét dấu tam thức $f(x)$ là:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Ví dụ 4. Trong bài toán ở phần mở đầu, dựa theo số sản phẩm bán ra, cho biết doanh nghiệp có lãi khi nào, bị lỗ khi nào.

Giải

Xét tam thức bậc hai $f(x) = -200x^2 + 92000x - 8400000$.

Nhận thấy $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{-460 + \sqrt{43600}}{-2} \approx 125,6$; $x_2 = \frac{-460 - \sqrt{43600}}{-2} \approx 334,4$

và hệ số $a = -200 < 0$. Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vì x là số nguyên dương nên:

+) Doanh nghiệp có lãi khi và chỉ khi $f(x) > 0$, tức là $126 \leq x \leq 334$.

+) Doanh nghiệp bị lỗ khi và chỉ khi $f(x) < 0$, tức là $x \leq 125$ hoặc $x \geq 335$.

Vậy doanh nghiệp có lãi khi bán từ 126 đến 334 sản phẩm, doanh nghiệp bị lỗ khi bán tối đa 125 sản phẩm hoặc bán tối thiểu 335 sản phẩm.

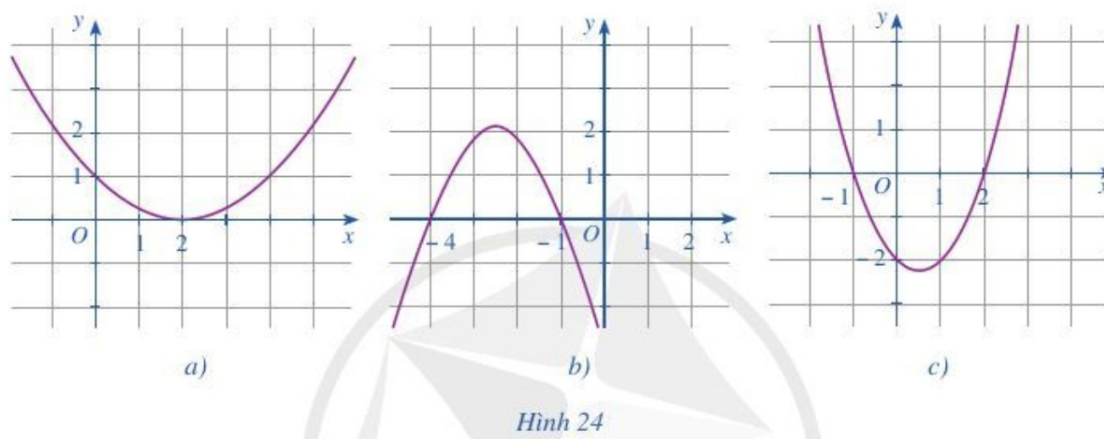
BÀI TẬP

Bài 1. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

b) $x^2 - 2x - 3 < 0$ khi và chỉ khi $x \in [-1; 3]$.

Bài 2. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ với đồ thị được cho ở mỗi Hình $24a, 24b, 24c$.



Bài 3. Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; b) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$; c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$;

d) $f(x) = -5x^2 + 2x + 3$; e) $f(x) = -4x^2 + 8x - 4$; g) $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$

Bài 4. Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau:

50 khách đầu tiên có giá là 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 51 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ?

Biết rằng chi phí thực sự cho chuyển đi là 15080000 đồng.

Bài 5. Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2 + 180Q + 140000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng.

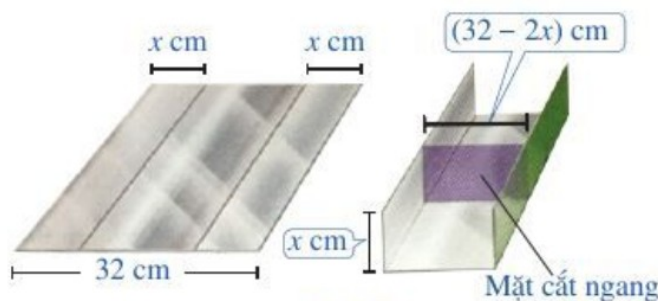
a) Xác định lợi nhuận xí nghiệp thu được sau khi bán hết Q sản phẩm đó, biết rằng lợi nhuận là hiệu của doanh thu trừ đi tổng chi phí để sản xuất.

b) Xí nghiệp sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì hoà vốn?

c) Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm là bao nhiêu để không bị lỗ?

BÀI 4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32 cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách.....



Hình 25

Rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất bao nhiêu xăng ti mét?

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

HOẠT ĐỘNG 1. Quan sát và nêu đặc điểm của biểu thức ở vế trái của bất phương trình $3x^2 - 4x - 8 < 0$.

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.

Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1: Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ ⁽¹⁾. Trong các giá trị sau đây của x , giá trị nào là nghiệm của bất phương trình ⁽¹⁾?

- a) $x = 2$; b) $x = 0$; c) $x = 3$.

Giải

a) Với $x = 2$, ta có: $2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình ⁽¹⁾.

b) Với $x = 0$, ta có: $0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình ⁽¹⁾.

c) Với $x = 3$, ta có: $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$. Vậy $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình ⁽¹⁾.

Chú ý: Giải bất phương trình bậc hai ẩn x là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

a) Cho hai ví dụ về bất phương trình bậc hai một ẩn.

b) Cho hai ví dụ về bất phương trình mà không phải là bất phương trình bậc hai một ẩn..

II. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

HOẠT ĐỘNG 2.

a) Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - x - 2$.

b) Giải bất phương trình $x^2 - x - 2 > 0$.

Nhận xét: Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu “+”. Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1: Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2: Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu “+”.

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$;

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $2x^2 - 5x + 2$ mang dấu “+” là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$ là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2 - 2x + 8$ có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$.

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 2x + 8$ mang dấu “+” là $(-4; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 > 0$ là $(-4; 2)$.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $3x^2 - 2x + 4 \leq 0$;

b) $-x^2 + 6x - 9 > 0$.

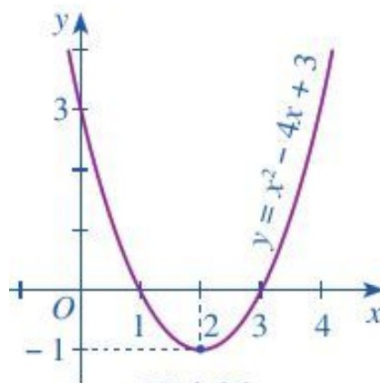
2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị

HOẠT ĐỘNG 3.

Cho bất phương trình $x^2 - 4x + 3 > 0$ (2).

Quan sát parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ ở Hình 26 và cho biết:

- a) Bất phương trình ⁽²⁾ biểu diễn phần parabol ^(P) nằm ở phía nào của trục hoành?
- b) Phần parabol ^(P) nằm phía trên trục hoành ứng với những giá trị nào của x ?



Hình 26

Kết quả: Bất phương trình ⁽²⁾ biểu diễn phần parabol ^(P) nằm phía trên trục hoành tương ứng với $x < 1$ hoặc $x > 3$.

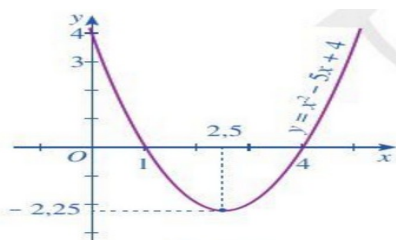
Nhận xét

- Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.
- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

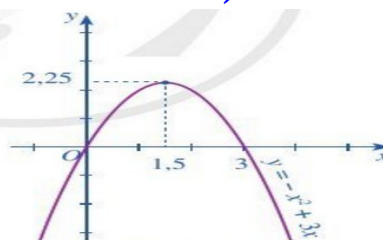
Ví dụ 3. Quan sát đồ thị ở Hình 27, Hình 28 và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$.



Hình 27

b) $-x^2 + 3x > 0$.



Hình 28

Giải

- a) Quan sát đồ thị ở Hình 27, ta thấy $x^2 - 5x + 4 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 - 5x + 4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1 < x < 4$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 4 < 0$ là khoảng $(1; 4)$.

b) Quan sát đồ thị ở Hình 28, ta thấy $-x^2 + 3x > 0$ biểu diễn phần parabol $y = -x^2 + 3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0 < x < 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x > 0$ là khoảng $(0; 3)$.

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

3. Giải mỗi bất phương trình bậc hai sau bằng cách sử dụng đồ thị:

a) $x^2 + 2x + 2 > 0$;

b)

$-3x^2 + 2x - 1 > 0$.

III. ỨNG DỤNG CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4. Giải bài toán phần mở đầu.

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như Hình 25 thì kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32 - 2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x)x$ (cm²).

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120 (cm²) khi và chỉ khi $(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0$.

Tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ có hai nghiệm $x_1 = 6, x_2 = 10$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ mang dấu “+” là $(6; 10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0$ là $[6; 10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6 cm.

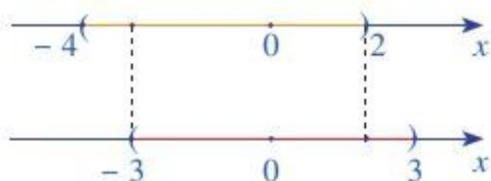
Ví dụ 5. Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau: $x^2 + 2x - 8 < 0$ (3) và $x^2 - 9 < 0$ (4).

Giải

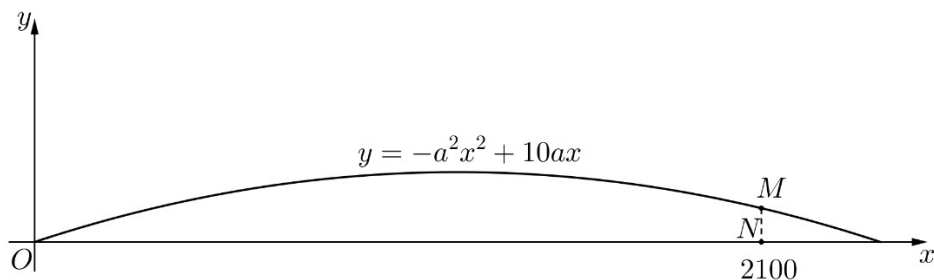
Ta có (3) $\Leftrightarrow -4 < x < 2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3 = (-4; 2)$.

(4) $\Leftrightarrow -3 < x < 3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4 = (-3; 3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là: $S = S_3 \cap S_4 = (-4; 2) \cap (-3; 3) = (-3; 2)$.



Ví dụ 6: Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100; 25)$ và $N(2100; 15)$ (xem Hình 29).



Hình 29

Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.

Giải

Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là: $y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a$. Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thỏa mãn các bất phương trình sau:

$$2100 \leq \frac{10}{a} \quad (5); \quad -4410000a^2 + 21000a \leq 25 \quad (6); \quad -4410000a^2 + 21000a \geq 15 \quad (7).$$

$$\bullet \quad (5) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a \in \left(0; \frac{1}{210}\right].$$

$$\bullet \quad (6) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a - 5)^2 \geq 0. \text{ Bất phương trình này đúng với mọi } a > 0.$$

$$\bullet \quad (7) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \leq a \leq \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$$

$$\text{Do } \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0 \text{ và } \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210} \text{ nên}$$

$$\left(0; \frac{1}{210}\right] \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$$

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}\right]$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } a \text{ là } \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}.$$

LUYỆN TẬP - VẬN DỤNG

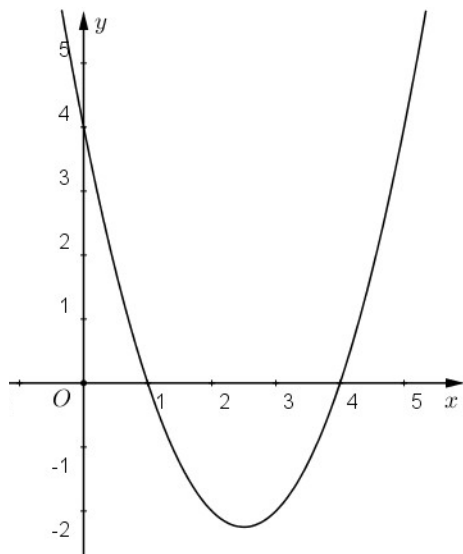
4. Tổng chi phí T (đơn vị tính: nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 30Q + 3300$, giá bán của 1 sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo không bị lỗ (giả thiết các sản phẩm được bán hết)?

BÀI TẬP

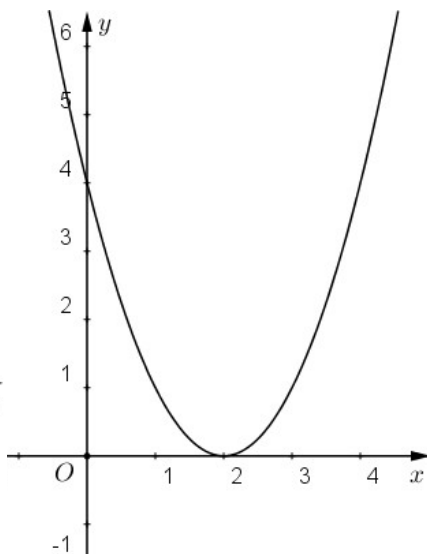
1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn? Vì sao?

$$\text{a) } -2x + 2 < 0; \quad \text{b) } \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}(y+1) \leq 0; \quad \text{c) } y^2 + x^2 - 2x \geq 0.$$

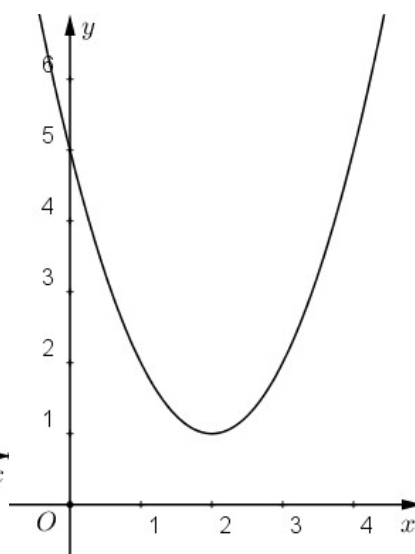
2. Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x)$ trong mỗi hình 30a, 30b, 30c, hãy viết tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.



a)



b)



c)

Hình 30

3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$;

b) $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$;

c) $4x^2 - 12x + 9 < 0$;

d) $-3x^2 + 7x - 4 \geq 0$.

4. Tìm m để phương trình $2x^2 + (m+1)x + m - 8 = 0$ có nghiệm.

5. Xét hệ toạ độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0; 0, 2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đạt độ cao $8,5$ m sau 1 giây và đạt độ cao 6 m sau 2 giây.

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.

b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

6. Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau: 10 khách đầu tiên có giá là 800 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x .

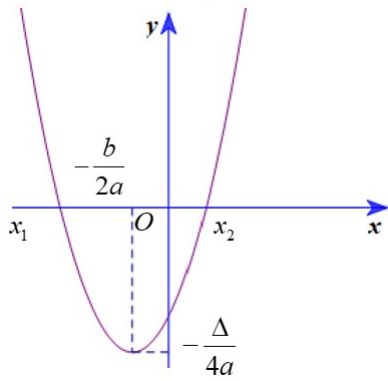
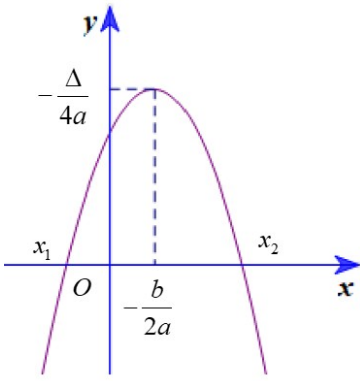
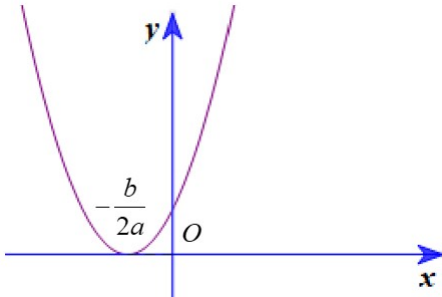
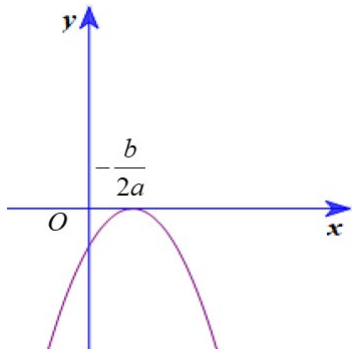
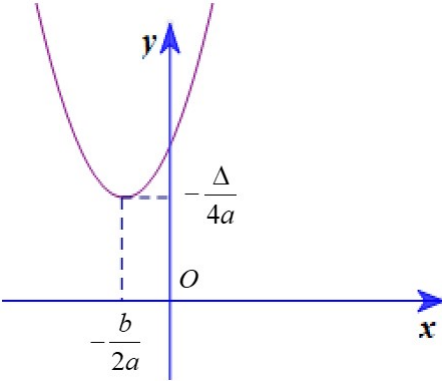
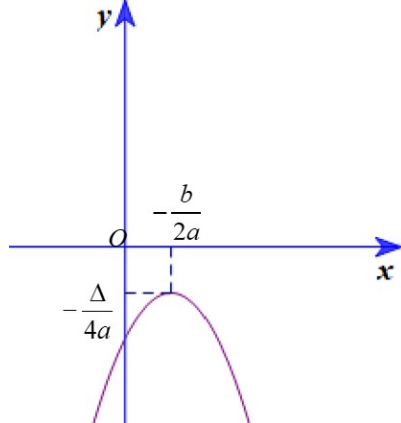
b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700 000 đồng/người.

TÌM HIỂU THÊM

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0 (*) (a \neq 0)$.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

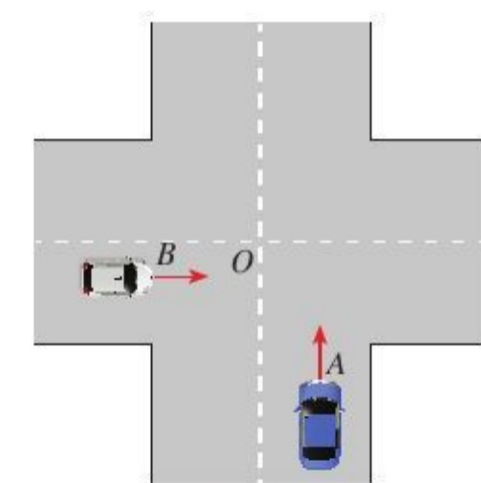
Dấu của a		
-------------	--	--

Dấu của Δ	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$ 	$(*) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$ 
$\Delta = 0$ $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$	$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ 	$(*)$ vô nghiệm 
$\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm	$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ 	$(*)$ vô nghiệm 

Tương tự, em hãy lập bảng tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải các bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($a \neq 0$).

BÀI 5: HAI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến O là giao của hai con đường. Vị trí A cách bến 8 km , vị trí B cách bến 7 km . Gọi x là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km (Hình 31).



Hình 31

Bạn Dương xác định được x thoả mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$.

CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG: Làm thế nào để tìm được giá trị của x .

I. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (I)

$(f(x) = ax^2 + bx + c \text{ và } g(x) = mx^2 + nx + p \text{ với } a \neq m)$

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

Bước 1. Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

Bước 2. Thay từng nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ vào bất phương trình $f(x) \geq 0$ (hoặc $g(x) \geq 0$). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

Bước 3. Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện Bước 2.
- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (1).

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = \sqrt{x - 4}$ (1)

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2 - 6x - 4 = x - 4$ (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thỏa mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

Ví dụ 2 Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ (3)

Giải:

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$ (4).

Ta có: (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x^2 + 4x + 3 \geq 0$, ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Bài tập tương tự : Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

$$(f(x) = ax^2 + bx + c; g(x) = dx + e; a \neq d^2)$$

Để giải phương trình (II), ta làm như sau :

Bước 1: Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2: Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3: Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 3 Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$ (5)

Giải:

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ (6).

Ta có: $(6) \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2 - 6x + 6 = (2x - 1)^2$ (7).

Ta có: $(7) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -\frac{5}{3}$.

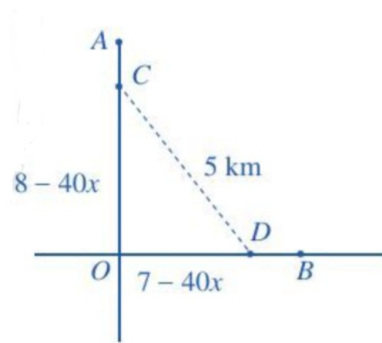
Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x = 1$ là thỏa mãn $x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x = 1$.

Bài tập tương tự : Giải phương trình $\sqrt{3x - 5} = x - 1$.

Ví dụ 4 Trong bài toán ở phần mở đầu, hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

Giải: (Hình 32)



Hình 32

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ A, B đi được sau x giờ là $40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 40x$ (km).

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí B đến D cách O một khoảng $OD = 7 - 40x$ (km).

Để $8 - 40x \geq 0$ và $7 - 40x \geq 0$ thì $0 \leq x \leq 0,175$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2}.$$

Ta có phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$.

Bình phương hai vế ta có: $(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2 = 25$.

$$\Leftrightarrow 1600x^2 - 640x + 64 + 1600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3200x^2 - 1200x + 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0,1$ hoặc $x = 0,275$. Đối chiếu với điều kiện $0 \leq x \leq 0,175$, ta chọn $x = 0,1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau 5 km là 0,1 giờ.

BÀI TẬP :

1. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{2x + 3};$

b) $\sqrt{4x^2 - 6x - 6} = \sqrt{x^2 - 6};$

c) $\sqrt{x+9} = 2x - 3$;

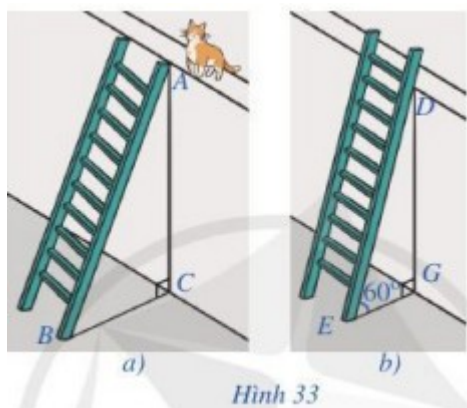
d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 2} = 2 - x$

2. Giải các phương trình sau:

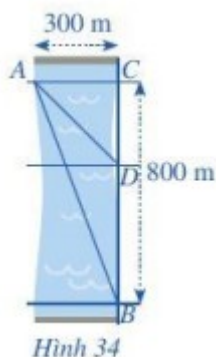
a) $\sqrt{2-x} + 2x = 3$;

b) $\sqrt{-x^2 + 7x - 6} + x = 4$.

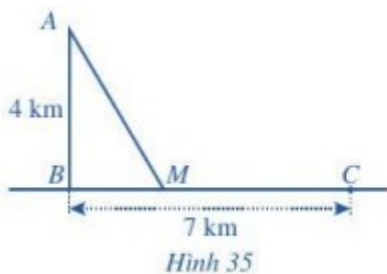
3. Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1m . Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên bức tường (Hình 33a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm $0,5\text{m}$ thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (Hình 33b). Bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



4. Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300m chèo thuyền đến vị trí D , sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800m như Hình 34. Vận tốc chèo thuyền là 6km/h , vận tốc chạy bộ là 10km/h và giả sử vận tốc của dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D , biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là $7,2$ phút.



5. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km . Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5km/h như hình 35. Tính khoảng cách từ vị trí B đến vị trí M , biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.



Hình 35



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

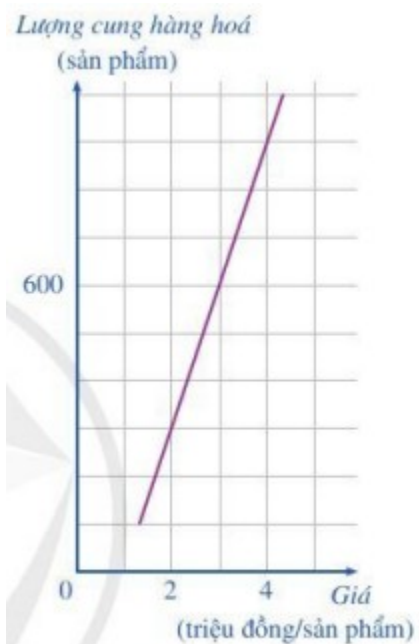
1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x^2 - x};$

b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3};$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}.$

2. Đồ thị ở Hình 36 cho thấy sự phụ thuộc của lượng hàng hóa được sản xuất (cung) (đơn vị: sản phẩm) bởi giá bán (đơn vị: triệu đồng/sản phẩm) đối với một loại hàng hóa.



Hình 36

a) Xác định lượng hàng hóa được sản xuất khi mức giá bán 1 sản phẩm là 2 triệu đồng; 4 triệu đồng.

b) Biết nhu cầu thị trường đang cần là 600 sản phẩm. Hỏi với mức giá bán là bao nhiêu thì thị trường cân bằng (thị trường cân bằng khi sản lượng cung bằng sản lượng cầu)?

3. Một nhà cung cấp dịch vụ Internet đưa ra hai gói khuyến mãi cho người dùng như sau:

Gói A: Giá cước 190 000 đồng/tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 6 tháng thì sẽ được tặng thêm 1 tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 12 tháng thì sẽ được tặng thêm 2 tháng.

Gói B: Giá cước 189 000 đồng/tháng.

Nếu trả tiền cước ngay 7 tháng thì số tiền phải trả cho 7 tháng đó là 1 134 000 đồng.

Nếu trả tiền cước ngay 15 tháng thì số tiền phải trả cho 15 tháng đó là 2 268 000 đồng.

Giả sử số tháng sử dụng Internet là x (x nguyên dương)

a) Hãy lập các hàm số thể hiện số tiền phải trả ít nhất theo mỗi gói A, B nếu thời gian dùng không quá 15 tháng.

b) Nếu gia đình bạn Minh dùng 15 tháng thì nên chọn gói nào?

4. Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ở Hình 37a và Hình 37b rồi nêu:

a) Dấu của các hệ số a ;

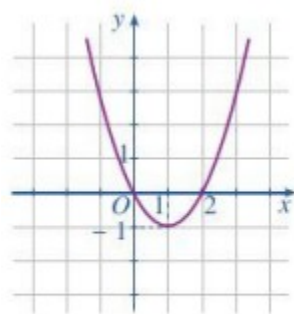
b) Tọa độ đỉnh và trục đối xứng;

c) Khoảng đồng biến;

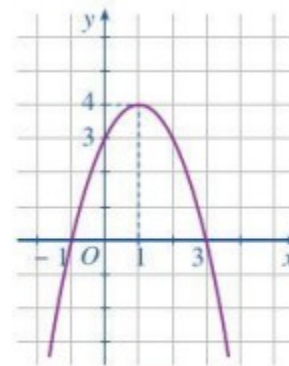
d) Khoảng nghịch biến;

e) Khoảng giá trị x mà $y > 0$;

f) Khoảng giá trị x mà $y \leq 0$.



a)



b)

Hình 37

5. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a) $y = x^2 - 3x - 4$;

b) $y = x^2 + 2x + 1$;

c) $y = -x^2 + 2x - 2$.

6. Lập bảng xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$;

b) $f(x) = x^2 - x - 12$;

c) $f(x) = 16x^2 + 24x + 9$.

7. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$;

b) $-3x^2 + x + 1 > 0$;

c) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$; d) $-16x^2 + 8x - 1 < 0$;

e) $2x^2 + x + 3 < 0$ g) $-3x^2 + 4x - 5 < 0$.

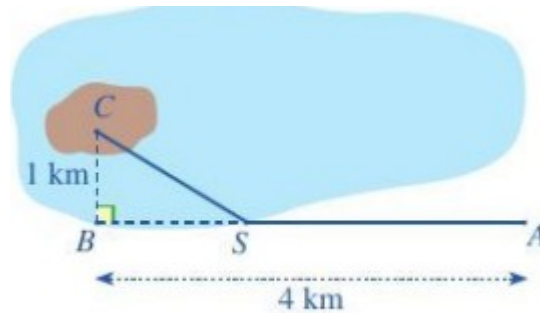
8. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2} = x$;

b) $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 + x + 6}$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = x + 3$.

9. Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C trên cù lao như *Hình 38*. Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 5 triệu đồng. Biết rằng tổng tiền công là 16 triệu đồng. Tính tổng số ki-lô-mét đường dây điện đã thiết kế.



Hình 38