

Người làm: Nguyễn Dương Quang Minh
Zalo: Nguyễn Dương Quang Minh - số đt zalo: 0913625455
Email: nguyenduongquangminh08@gmail.com

CĐ12: NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Dạng 1. Sử dụng trong bài toán chia hết

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 TRƯỜNG THCS VÕ THỊ SÁU 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $2^n - 1$; 2^n ; $2^n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp theo Dirichlet có một trong ba số sẽ chia hết cho 3

Mà $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) nên $2^n - 1$ không chia hết cho 3.

Mặt khác: với $n > 2$ thì 2^n không là bội của 3, nên 2^n không chia hết cho 3.

Suy ra: $2^n + 1$ chia hết cho 3 và $2^n + 1 > 3$ với mọi $n > 2$.

Vậy $2^n + 1$ là hợp số (đpcm).

Câu 2. (HSG 7 LIÊN TRƯỜNG 2022 - 2023)

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2007.

Lời giải

Xét 2008 số sau: $1; 11; 111; \dots; \underbrace{111\dots1}_{2008}$

Theo Dirichle tồn tại ít nhất 2 số chia cho 2007 có cùng số dư

Giả sử hai số đó là

$$A = \underbrace{111\dots1}_n$$

$$B = \underbrace{111\dots1}_k \quad (n > k)$$

$$\Rightarrow A - B = \underbrace{111\dots1}_n - \underbrace{111\dots1}_k = 10^k \cdot \underbrace{111\dots1}_{n-k}$$

$$(10^k; 2007) = 1 \Rightarrow \underbrace{111\dots1}_{n-k} : 2007$$

Mà

Dạng 2. Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 THÀNH PHỐ NINH BÌNH 2022 - 2023)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải

Mỗi số trong 5 số có dạng $2^x \cdot 3^y$ trong đó x, y là số tự nhiên khác 0.

(x, y) chỉ có thể (Chẵn, Chẵn); (Lẻ, Lẻ); (Chẵn, Lẻ); (Lẻ, Chẵn) vì có 5 số mà chỉ có 4 dạng nên tồn tại 2 số cùng một dạng nên tích 2 số này là số chính phương.

Dạng 3. Sử dụng trong một số bài toán thực tế

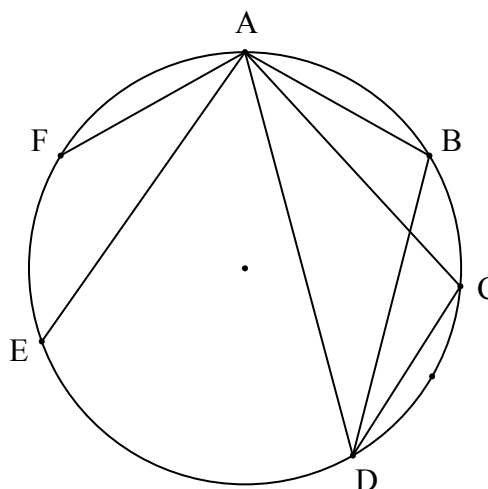
Dạng 4. Sử dụng trong một số bài toán về hình học

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 TRƯỜNG THCS YÊN PHONG 2022 - 2023)

Trên một đường tròn có 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kỳ trong 6 điểm này đều được nối với nhau bởi một đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

Lời giải



Xét 6 điểm phân biệt A, B, C, D, E, F trên một đường tròn

Nối điểm A với 5 điểm còn lại ta được 5 đoạn thẳng.

Vì các đoạn thẳng chỉ có màu xanh hoặc đỏ nên theo nguyên lý Diriclet thì có ít nhất

$\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ ba đoạn thẳng có cùng một màu.

Giả sử ba đoạn AB, AC, AD có cùng màu và là màu đỏ.

Khi đó luôn tồn tại một trong ba tam giác ABC, ACD, BCD có ba cạnh cùng màu.

Thật vậy:

+ Nếu tam giác BCD có ít nhất một cạnh là màu đỏ, giả sử là cạnh BC , thì tam giác ABC có ba cạnh màu đỏ (thỏa mãn đề bài).

+ Nếu tam giác BCD không có cạnh nào màu đỏ thì tức là cả ba cạnh của tam giác BCD cùng màu xanh (thỏa mãn đề bài).

Vậy luôn tồn tại ít nhất một tam giác được tạo thành từ ba đoạn thẳng đó sẽ có ba cạnh cùng màu.