

Chương V

Bài 16: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

ĐỀ BÀI

Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

$$\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x=1-s \\ y=2 \\ z=-2+s \end{cases}.$$

Câu 1. Cho hai đường thẳng

a) Một vector chỉ phương của đường thẳng Δ' có tọa độ là $(1; 2; -2)$;

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; -1; 3)$;

c) Gọi $\vec{u}, \vec{u}'$ lần lượt là vector chỉ phương của hai đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó, công thức tính góc giữa hai

$$\cos(\Delta, \Delta') = \cos(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|};$$

đường thẳng Δ và Δ' là

d) Góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' là 60° .

Câu 2. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

a) Đường thẳng d đi qua điểm $N(1; -1; 2)$;

b) $\vec{x} = (1; -1; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d' ;

c) Độ dài của $\vec{x}$ bằng 1;

d) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau.

Câu 3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 1$.

a) $\vec{n} = (1; -1; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ;

b) Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và trục Ox . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$;

c) $E(-1; 2; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) ;

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 30° .

$$\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{mặt phẳng } (P): x+2y+z-4=0.$$

Câu 4. Cho đường thẳng

a) $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ ;

b) $M(0;3;-2)$ không thuộc đường thẳng Δ ;

c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại $N(-1;4;1)$.

Câu 5. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - y + mz + 1 = 0$.

a) $F(0;-1;3)$ không thuộc mặt phẳng (P) ;

b) Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxz) . Khi đó: $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$;

c) Góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) bằng 60° khi $m = 2$;

d) Hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với nhau khi $m = 1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.OBCD$ có đáy là hình chữ nhật và các điểm $O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;-3)$.

a) Tọa độ điểm $C(1;-2;0)$;

b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng OB và SC . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{14}}$;

c) $\vec{n} = (6;4;3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) ;

d) Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SBD) bằng $16^\circ 36'$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;4)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;3;0)$, $D(3;0;0)$.

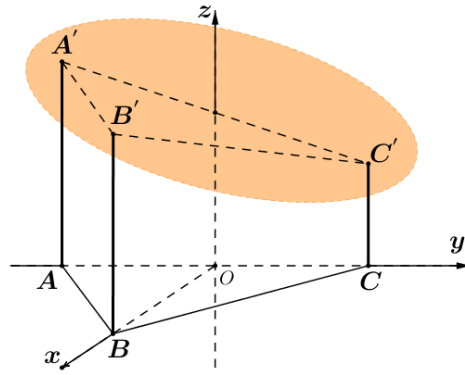
a) $\vec{n}_1 = (4;-4;3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABD) ;

b) Góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (Oyz) bằng 45° ;

c) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{9}{41}$;

d) $\angle BCD = 45^\circ$.

Câu 8. Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ (như hình vẽ). Các cây cột vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là $7m$, $6m$, $5m$. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài $4m$.



- a) Tọa độ của điểm $A(0; -2; 0)$;
- b) Tọa độ của điểm $B'(4; 0; 6)$;
- c) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ là $u = (0; 1; 2)$;
- d) Góc giữa mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà bằng $26^\circ 34'$.

ĐÁP ÁN

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 \\ z = -2 + s \end{cases}$$

Câu 1. Cho hai đường thẳng

- a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ' có tọa độ là $(1; 2; -2)$;
- b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; -1; 3)$;
- c) Gọi u, u' lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó, công thức tính góc giữa hai

$$\cos(\Delta, \Delta') = \cos(\vec{u}, \vec{u'}) = \frac{u \cdot u'}{|u| \cdot |u'|};$$

đường thẳng Δ và Δ' là

- d) Góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' là 60° .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

- a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ' có tọa độ là $(-1; 0; 1)$;
- b) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; -1; 3)$;
- c) Gọi u, u' lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó, công thức tính góc giữa hai

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u'}) \right| = \frac{|u \cdot u'|}{|u| \cdot |u'|};$$

đường thẳng Δ và Δ' là

- d) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $u = (1; 1; 0)$;

Đường thẳng Δ' có vector chỉ phương là $\vec{u}' = (-1; 0; 1)$;

$$\cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

Khi này

Do vậy, góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' là 60° .

Câu 2. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

a) Đường thẳng d đi qua điểm $N(1; -1; 2)$;

b) $\vec{x} = (1; -1; 1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d' ;

c) Độ dài của $\vec{x}$ bằng 1;

d) Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Đường thẳng d đi qua điểm $N(0; -1; 1)$;

b) Đường thẳng d' có một vector chỉ phương là $\vec{u}' = (-1; 1; 1)$. Ta thấy $\vec{x}, \vec{u}'$ không cùng phương.

Do vậy, $\vec{x} = (1; -1; 1)$ không là một vector chỉ phương của đường thẳng d' ;

c) $|\vec{x}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$;

d) Đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 2)$;

Đường thẳng d' có một vector chỉ phương là $\vec{u}' = (-1; 1; 1)$.

Ta thấy $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$

Do vậy, hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau.

Câu 3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 1$.

a) $\vec{n} = (1; -1; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ;

b) Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và trục Ox . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$;

c) $E(-1; 2; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) ;

d) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 30° .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) $n = (1; -1; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ;

b) Trục Ox có vector đơn vị $i = (1; 0; 0)$

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u = (1; 2; -1)$

Khi đó $\cos \varphi = \frac{|1|}{1 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$;

c) Thay tọa độ của điểm $E(-1; 2; 1)$ vào phương trình của mặt phẳng (P) , ta thấy: $-1 - 2 + 2 \cdot 1 \neq 1$

Do đó, $E(-1; 2; 1)$ không thuộc mặt phẳng (P) ;

d) Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $u = (1; 2; -1)$

$n = (1; -1; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P)

Khi đó $\sin(\Delta, (P)) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

Do vậy, góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 30° .

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 4. Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

a) $u = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ ;

b) $M(0; 3; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ ;

c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại $N(-1; 4; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Dựa vào phương trình đường thẳng, một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $x = (1; -1; 1)$.

Ta thấy x, u cùng phương. Do đó, $u = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ ;

b) Thay tọa độ của điểm M vào x, y, z của đường thẳng Δ , ta thấy:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 3 = 2 - t \\ -2 = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -5 \end{cases}$$

Do vậy, $M(0;3;-2)$ không thuộc đường thẳng Δ ;

c) Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $x=(1;-1;1)$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $n=(1;2;1)$.

Ta thấy x, n không cùng phương. Do vậy, đường thẳng Δ không vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$\Delta: \begin{cases} x=1+t & (1) \\ y=2-t & (2) \\ z=3+t & (3) \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (P): x+2y+z-4=0 \quad (4)$$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được: $1+t+2(2-t)+3+t-4=0 \Leftrightarrow 0t+4=0$ - phương trình vô nghiệm

Do vậy, Đường thẳng Δ không cắt mặt phẳng (P) .

Câu 5. Cho mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$ và mặt phẳng $(Q): x-y+mz+1=0$.

a) $F(0;-1;3)$ không thuộc mặt phẳng (P) ;

b) Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxz) . Khi đó: $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$;

c) Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ bằng 60° khi $m=2$;

d) Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau khi $m=1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Thay tọa độ của điểm $F(0;-1;3)$ vào phương trình của mặt phẳng (P) , ta thấy:

$$0+2.(-1)-3+1=-4 \neq 0$$

Do vậy, $F(0;-1;3)$ không thuộc mặt phẳng (P) ;

b) Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n=(1;2;-1)$

Mặt phẳng (Oxz) có vector pháp tuyến $j=(0;1;0)$

$$\text{Khi này, } \cos \varphi = \frac{|2|}{1 \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

c) Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n=(1;2;-1)$

Khi $m=2$, mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến $n'=(1;-1;2)$

$$\text{Do đó } \cos((P), (Q)) = \frac{|1.1+2.(-1)+2.(-1)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) bằng 60° khi $m=2$;

d) Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $n=(1;2;-1)$

Khi $m=1$, mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến $n'=(1;-1;1)$

Khi đó $n.n'=1.1+2.(-1)+(-1).1=-2 \neq 0$.

Do vậy, hai mặt phẳng (P) , (Q) không vuông góc với nhau khi $m=1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.OBCD$ có đáy là hình chữ nhật và các điểm $O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;-3)$.

a) Tọa độ điểm $C(1;-2;0)$;

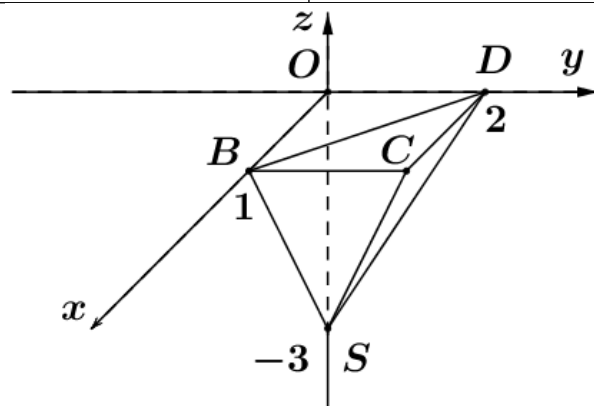
b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng OB và SC . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{14}}$;

c) $n=(6;4;3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) ;

d) Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SBD) bằng $16^\circ 36'$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------



a) Gọi $C(x;y;z)$

Vì đáy $OBCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-0=2 \\ z-0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$

Vậy $C(1;2;0)$.

b) $\overrightarrow{OB}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{SC}=(1;2;3)$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng OB và SC . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{|\vec{1}|}{1 \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$;

c) $\vec{SB} = (1; 0; 3)$, $\vec{SD} = (0; 2; 3)$

Khi đó một vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) là $\left[\vec{SB}, \vec{SD} \right] = (-6; -3; 2)$;

d) $\vec{SO} = (0; 0; 3)$

Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SBD) : $\sin(SO, (SBD)) = \frac{|2 \cdot 3|}{3 \cdot 7} = \frac{2}{7}$

Do vậy, góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SBD) bằng $16^\circ 36'$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 0; 4)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(3; 0; 0)$.

a) $n_1 = (4; -4; 3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABD) ;

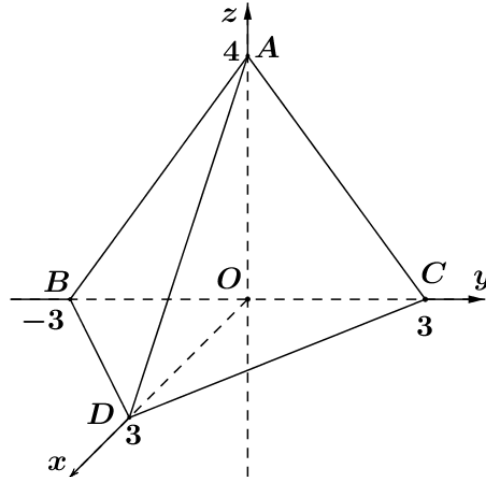
b) Góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (Oyz) bằng 45° ;

c) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{9}{41}$;

d) $\angle BCD = 45^\circ$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) $\vec{AB} = (0; -3; -4)$, $\vec{AD} = (3; 0; -4)$

Khi đó $\left[\vec{AB}, \vec{AD} \right] = (12; -12; 9) = 3(4; -4; 3)$.

Do vậy $n_1 = (4; -4; 3)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABD) ;

b) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABD) là $n_1 = (4; -4; 3)$

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là $i = (1; 0; 0)$

Khi đó $\cos((ABD), (Oyz)) = \frac{|4|}{1 \cdot \sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow ((ABD), (Oyz)) \approx 51^\circ 20'$

c) $\vec{AC} = (0; 3; -4)$, $\vec{AD} = (3; 0; -4)$

Khi đó $[\vec{AC}, \vec{AD}] = (-12; -12; -9) = -3(4; 4; 3)$

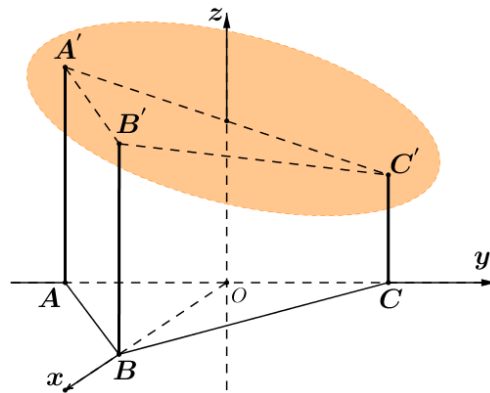
Vector pháp tuyến của mặt phẳng (ACD) là $n_2 = (4; 4; 3)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) . Khi đó: $\cos \varphi = \frac{|4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3|}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{41}} = \frac{9}{41}$;

d) $\vec{CB} = (0; -6; 0)$, $\vec{CD} = (3; -3; 0)$

$\cos \widehat{BCD} = \cos(\vec{CB}, \vec{CD}) = \frac{0 \cdot 3 - 6 \cdot (-3)}{6 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BCD} = 45^\circ$.

Câu 8. Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ (như hình vẽ). Các cây cột vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là $7m$, $6m$, $5m$. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài $4m$.



a) Tọa độ của điểm $A(0; -2; 0)$;

b) Tọa độ của điểm $B'(4; 0; 6)$;

c) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ là $u = (0; 1; 2)$;

d) Góc giữa mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà bằng $26^\circ 34'$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) $A \in Oy \Rightarrow A(0; -2; 0)$

b) Vì OB là đường cao của tam giác ABC nên $OB = 2\sqrt{3} \Rightarrow B'(2\sqrt{3}; 0; 6)$;

$$c) A'(0; -2; 7), B'(2\sqrt{3}; 0; 6), C'(0; 2; 5)$$

$$\overrightarrow{A'B'} = (2\sqrt{3}; 2; -1), \overrightarrow{A'C'} = (0; 4; -2)$$

$$\text{Khi đó } [\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}] = (0; 4\sqrt{3}; 8\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} (0; 1; 2)$$

Do đó một vector pháp tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ là $u = (0; 1; 2)$;

d) Vector pháp tuyến của mặt phẳng sàn nhà $j = (0; 0; 1)$

Gọi φ là góc giữa mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà. Khi đó $\cos \varphi = \frac{|0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1|}{1 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \approx 26^\circ 34'$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>