

ĐỀ ĐỘI TUYỂN SỐ 03- A1K75 THPT NGUYỄN XUÂN ÔN

Câu 1. (6.0 điểm)

a) Giải phương trình: $3 \tan 2x - 2 \sin \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right) + \frac{2(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos 2x}$

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1) \\ x\sqrt{2x^2 - y^2 + y + 3} = -y^2 + 2x + 2 \end{cases}$$

Câu 2. (3.0 điểm) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau trong đó có ba chữ số chẵn và ba chữ số lẻ. Trong các số trên có bao nhiêu số mà các chữ số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Câu 3. (3.0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{3u_n - 1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Xét dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 4. (3.0 điểm) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O cạnh có độ dài bằng 1. Gọi M, P là hai điểm sao cho $\overline{AM} = \frac{3}{4} \overline{AA'}$, $\overline{CP} = \frac{1}{4} \overline{CC'}$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua M, P đồng thời cắt hai cạnh BB', DD' lần lượt tại N và Q . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $MNPQ$.

Câu 5. (3.0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tất cả các cạnh bên đều bằng a . Gọi điểm M thuộc cạnh SD sao cho $SD = 3SM$, điểm G là trọng tâm tam giác BCD .

a) Chứng minh rằng MG song song với mp(SBC)

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa MG và song với CD . Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mp(α)

c) Xác định điểm P thuộc MA và điểm Q thuộc BD sao cho PQ song song với SC . Tính PQ

Câu 6 (2.0 điểm) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá

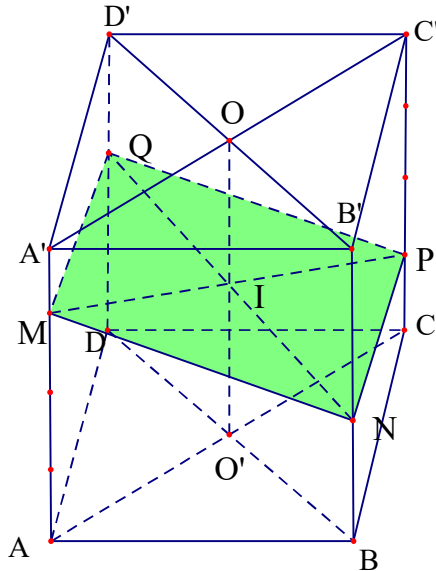
trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + \frac{y^3}{3} - 3x - 3y$.

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ 03

(Đáp án gồm 4 trang)

Câu1	Nội dung	Điểm
a)	(3.0 điểm)	
	ĐK $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$	0.5
	Với điều kiện trên PT đã cho tương đương với $3 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 2\cos 2x + \frac{2(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos 2x}$ $\Leftrightarrow 3\sin 2x - 2\cos^2 2x + 2(\cos x - \sin x)^2 = 1$	0.5
	$\Leftrightarrow 3\sin 2x - 2(1 - \sin^2 2x) + 2(1 - \sin 2x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$	0.5
	Đối chiếu với điều kiện ta thấy $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ thỏa mãn Vậy PT đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$	1.0
b)	Ta có $(1) \Leftrightarrow 2x(x^2 + 2) - 2(y + 1) = x^2(y + 1)$ $\Leftrightarrow 2x(x^2 + 2) = (y + 1)(x^2 + 2) \Leftrightarrow 2x = y + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$	1.0
	Thế vào (2) ta có	1.0

	$x\sqrt{2x^2 - (2x-1)^2} + 2x - 1 + 3 = -(2x-1)^2 + 2x + 2$ $\Leftrightarrow x\sqrt{-2x^2 + 6x + 1} = -4x^2 + 6x + 1$ $\Leftrightarrow x\sqrt{-2x^2 + 6x + 1} = (-2x^2 + 6x + 1) - 2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-2x^2 + 6x + 1} = 2x \\ \sqrt{-2x^2 + 6x + 1} = -x \end{cases}$	
	$\sqrt{-2x^2 + 6x + 1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -2x^2 + 6x + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{15}}{6} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{15}}{6}$	0.5
	$\sqrt{-2x^2 + 6x + 1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -2x^2 + 6x + 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$ Vậy nghiệm của hệ PT là: $\left(\frac{3 + \sqrt{15}}{6}; \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ và $\left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}; \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$	0.5
Câu 2	(3, 0 điểm)	
	* Có 5 số lẻ và 4 số chẵn từ chín số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Suy ra có C_5^3 cách chọn 3 số lẻ từ năm số 1, 3, 5, 7, 9 và có C_4^3 cách chọn 3 số chẵn từ bốn số 2, 4, 6, 8	0.5
	Cứ ba chữ số lẻ ghép với ba chữ số chẵn ta được một tập gồm 6 phần tử. Theo quy tắc nhân có $C_4^3 \cdot C_5^3$ cách chọn các tập hợp mà mỗi tập có 3 số chẵn và 3 số lẻ từ các số trên	0.5
	Ứng với mỗi tập có 6! cách sắp xếp thứ tự các phần tử và mỗi cách sắp xếp thứ tự đó ta được một số thỏa mãn bài toán	0.5
	Do đó theo quy tắc nhân có $C_4^3 \cdot C_5^3 \cdot 6! = 28800$ số có 6 chữ số khác nhau gồm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ từ các số trên.	0.5
	* Có $C_4^3 \cdot C_5^3$ tập hợp gồm ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn. Ứng với mỗi tập có duy nhất một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự tăng dần	0.5
	Do đó mỗi tập hợp tương ứng với một số. Vậy có $C_4^3 \cdot C_5^3 = 40$ số thỏa mãn	0.5
Câu 3	a) (3.0 điểm)	
	Ta có $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{v_n - 1}$ thay vào hệ thức truy hồi ta có	1.0

	$\frac{v_{n+1}+1}{v_{n+1}-1} = \frac{5 \cdot \frac{v_n+1}{v_n-1} - 3}{3 \cdot \frac{v_n+1}{v_n-1} - 1} \Rightarrow \frac{v_{n+1}+1}{v_{n+1}-1} = \frac{2v_n+8}{2v_n+4} \Rightarrow \frac{v_{n+1}+1}{2} = \frac{2v_n+8}{4}$	
	hay $v_{n+1} = v_n + 3$ và $v_1 = 2$. Suy ra dãy số (v_n) là một cấp số cộng có $v_1 = 2$ và công sai $d = 3$	0.5
	Ta có $v_n = v_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$	0.5
	Do đó $u_n = \frac{3n-1+1}{3n-1-1} = \frac{3n}{3n-2}$. Thử lại thấy dãy số này thỏa mãn Vậy số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \frac{3n}{3n-2} \quad n \in \mathbb{N}^*$	1.0
4(3.0 điểm)		
	Gọi $I = MP \cap QN \Rightarrow I$ là trung điểm của MP. Do đó trong hình thang $AMPC$ ta có $AM + CP = 1$, tương tự $DQ + BN = 2.OI = 1$ Đặt $BN = x, DQ = y$ thì $x, y \in [0;1]$ và $x + y = 1$.	1.0

$$\left. \begin{array}{l} (MNPQ) \cap (ABB'A') = MN \\ \text{Ta có } (MNPQ) \cap (CDD'C') = QP \\ (ABB'A') // (CDD'C') \end{array} \right\} \Rightarrow MN // QP$$

Chứng minh tương tự $MQ // NP$, suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Suy ra của chu vi tứ giác $MNPQ = 2MN + 2MQ$.

$$\text{Ta tính được } MN = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2}; MQ = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - y\right)^2}.$$

$$\text{chu vi tứ giác } MNPQ = 2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - y\right)^2} \right] (*).$$

$$*) \text{ Áp dụng BĐT } \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - y\right)^2} \geq \sqrt{4 + \left(\frac{3}{2} - x - y\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác } MNPQ = \sqrt{17}.$$

) Thế $y = 1 - x$ vào () ta có

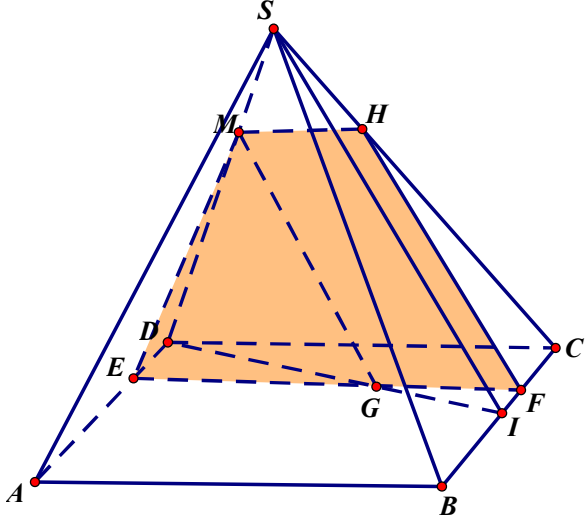
$$\text{chu vi tứ giác } MNPQ = 2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2} \right] = 2f(x).$$

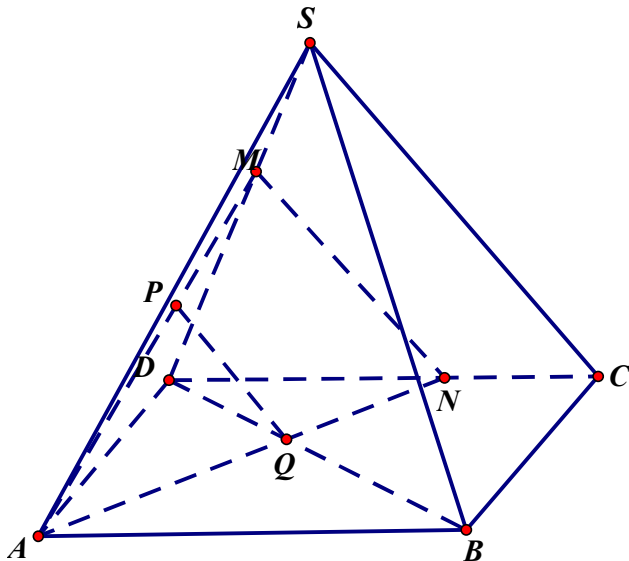
$$\text{Với } f(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} - \left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{4}x + \frac{5}{4} \right) + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2} - \left(\frac{-5 - \sqrt{17}}{4}x + \frac{\sqrt{17}}{4} \right) + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$= \frac{\frac{-13 + 5\sqrt{17}}{8}(x^2 - x)}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} - x\right)^2} + \frac{5(1-x) + \sqrt{17}x}{4}} + \frac{\frac{-13 + 5\sqrt{17}}{8}(x^2 - x)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2} + \frac{5x + \sqrt{17}(1-x)}{4}} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{Do } x^2 - x \leq 0, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow f(x) \leq \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$$

	Suy ra $\max f(x) = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$ khi $x=0$ hoặc $x=1$ Suy ra giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác $MNPQ = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$. Ta có : $x - \frac{3x^2}{4} = \frac{1}{4}x(4-3x) = \frac{1}{12} \cdot 3x \cdot (4-3x) \leq \frac{1}{12} \left(\frac{3x+4-3x}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}$. Do đó : $S_{MNPQK} \leq \frac{1}{3} \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow S_{MNPQK}$ lớn nhất bằng $\frac{1}{3} \cdot SB \cdot AC \cdot \sin \alpha$ $\Leftrightarrow 3x = 4 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$.	
Câu 5 a) (0.5)		
	Gọi I là trung điểm của BC Ta có $\frac{DG}{DI} = \frac{DM}{DS} = \frac{2}{3} \Rightarrow MG \parallel SI$	0.25
	Mà $SI \subset (SBC)$ nên $MG \parallel (SBC)$	0.25
b) (1.5)		
	Qua G kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD và BC lần lượt tại E và F. Qua M kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại H	0.25
	Thiết diện của hình chóp với mp(α) là tứ giác EFHM	0.25
	Ta có $HM \parallel EF$ vì cùng song song với CD	0.25

	$MD = HC = \frac{2a}{3}, \quad DE = CF = \frac{a}{3}, \quad \angle MDE = \angle HCF = 60^\circ$ nên tam giác DME bằng tam giác CHF suy ra ME = HF do đó EFHM là hình thang cân	
	Ta có: $EM^2 = DM^2 + DE^2 - 2DM.DE.\cos 60^\circ = \frac{4a^2}{9} + \frac{a^2}{9} - 2\frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{3}$ $MH = \frac{a}{3}, EF = a$	0.25
	Gọi h là độ dài đường cao của hình thang ta có $h = \sqrt{EM^2 - \left(\frac{EF - HM}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$	0.25
	Diện tích thiết diện là $S_{EFHM} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (EF + HM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4a}{3} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$	0.25
c) (1.0)		
	Qua M dựng đường thẳng song song với SC cắt CD tại N. Nối A với N cắt BD tại Q. Trong mp (AMN) từ Q dựng đường thẳng song song với MN cắt AM tại P. Ta có PQ//MN, MN//SC nên PQ//MN Suy ra hai điểm P, Q thỏa mãn điều kiện bài toán.	0.5
	Ta có $\frac{MN}{SC} = \frac{DM}{DS} = \frac{2}{3}, \quad \frac{AQ}{QN} = \frac{AB}{DN} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{3}{5}$	0.5

	$\frac{PQ}{MN} = \frac{AQ}{AN} = \frac{3}{5}, \quad \frac{PQ}{SC} = \frac{PQ}{MN} \cdot \frac{MN}{SC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$ Suy ra $PQ = \frac{2a}{5}$	
--	---	--

Câu 6	Từ giả thiết ta có $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{12} = 1$ Đặt $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = \sin \alpha \\ \frac{y}{2\sqrt{3}} = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha \\ y = 2\sqrt{3} \cos \alpha \end{cases}$	0.5
	$A = x^3 + \frac{y^3}{3} - 3x - 3y$ $= (\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha)^3 + 8\sqrt{3} \cos^3 \alpha - 3(\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha) - 6\sqrt{3} \cos \alpha$ $= \left(2 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right)^3 - 6 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3}(4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha)$ $= -2 \sin(3\alpha - \pi) + 2\sqrt{3} \cos 3\alpha = 2 \sin 3\alpha + 2\sqrt{3} \cos 3\alpha$ $= 4 \sin\left(3\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$	1.0
	GTLN của A bằng 4 khi và chỉ khi $\sin\left(3\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ GTLN của A bằng -4 khi và chỉ khi $\sin\left(3\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$	0.5

Chú ý : Nếu học sinh giải cách khác vẫn đạt điểm tối đa theo các phần trên

