

Câu 1: (5.0 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x-18)\sqrt{x^2+16}$ trên đoạn $[0;3]$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + 2022$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có ba góc nhọn.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho đa giác đều 21 đỉnh. Gọi Ω là tập tất cả các tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác đều này. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập Ω . Tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác nhọn.

b) Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{m-6}{4}x^4 - (2m+1)x^3 + 9x^2 + 2022$ với m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m sao cho tổng độ dài của các khoảng nghịch biến của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; +\infty)$ là

Câu 3(2điểm)

Một cơ sở sản xuất khẩu trang y tế với giá bán mỗi hộp khẩu trang 30000 đồng và mỗi tháng cơ sở bán ra thị trường trung bình 3000 hộp. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30 000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 hộp. Biết vốn sản xuất một hộp khẩu trang không thay đổi là 18 000 đồng. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

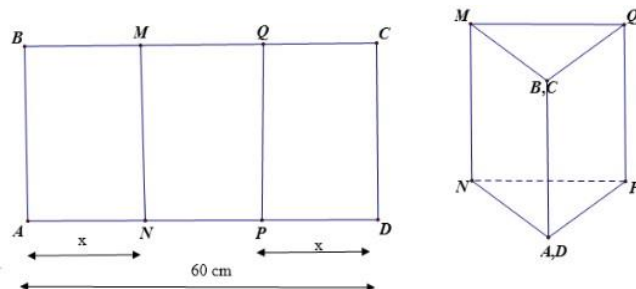
Câu 4. (5,0 điểm)

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $ABC = 60^\circ$. Cạnh $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM = x, (x > 0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB . Đường thẳng qua hai điểm E và F cắt d tại N . Xác định x để khối tứ diện $BCMN$ có thể tích nhỏ nhất.

Câu 5(2 điểm)

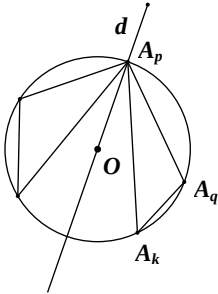
Một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60$ cm. Người ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh MN và PQ (MN và PQ song song với AB) vào phía trong đến khi AB và CD trùng nhau (như hình vẽ minh họa) để được một hình lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Biết $AN = PD = x$, tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



.....HẾT.....

ĐÁP ÁN

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x - 18)\sqrt{x^2 + 16}$ trên đoạn $[0; 3]$.	
	Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0; 3]$.	
	Ta có $y' = \frac{2x^2 - 18x + 16}{\sqrt{x^2 + 16}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 8 \text{ (loại)} \end{cases}$.	
	Lại có $y(0) = -72, y(1) = -17\sqrt{17}, y(3) = -75$.	
	Vậy $\min_{[0;3]} y = -75, \max_{[0;3]} y = -17\sqrt{17}$.	
	b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (m + 1)x^2 + 2022$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có ba góc nhọn.	
	Ta có $y' = 4x^3 - 2(m + 1)x = 2x(2x^2 - m - 1)$.	
	Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.	
	Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị của hàm số là $A(0; 2022)$, $B\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}}; 2022 - \frac{(m+1)^2}{4}\right)$ và $C\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}}; 2022 - \frac{(m+1)^2}{4}\right)$. Suy ra $\overline{AB}\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4}\right), \overline{AC}\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}}; -\frac{(m+1)^2}{4}\right)$.	
	Tam giác ABC luôn cân tại A . Do đó tam giác ABC nhọn khi và chỉ khi góc BAC nhọn $\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} > 0 \Leftrightarrow -\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16} > 0 \Leftrightarrow (m+1)\left[(m+1)^3 - 8\right] > 0$	
	Kết hợp điều kiện $m > -1$, ta được $(m+1)^3 > 8 \Leftrightarrow m > 1$. Vậy $m > 1$ là giá trị cần tìm.	

Câu 2b (2,0đ)	Cho đa giác đều 21 đỉnh. Gọi Ω là tập tất cả các tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác đều này. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập Ω. Tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác nhọn.	
		
	Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{21}^3$	0,25
	+ Tính số tam giác tù có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác. Xét đỉnh A_p . Ta đếm số tam giác tù nhận A_p làm đỉnh của góc nhọn (với A_p là một trong các đỉnh của đa giác). Gọi d là đường thẳng đi qua A_p và tâm O của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Ta thấy: Tam giác tù nhận A_p làm đỉnh của góc nhọn thì hai đỉnh còn lại phải cùng phía so với d .	0,5
	Số cách chọn 2 đỉnh cùng phía với d là $2C_{10}^2$ và có 21 cách chọn đỉnh A_p suy ra số tam giác tù là $2.21C_{10}^2$. Do mỗi tam giác tù có hai góc nhọn nên số tam giác tù được đếm lặp 2 lần. Do đó số tam giác tù là: $21C_{10}^2$.	0,5
	+ Tính số tam giác vuông có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác. Cạnh huyền của tam giác vuông là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Mà đa giác đều có lẻ đỉnh nên không tồn tại hai đỉnh của đa giác đối xứng nhau qua O. Vậy số tam giác vuông là 0.	0,5
	Số tam giác nhọn là: $C_{21}^3 - 21.C_{10}^2$. Vậy $P = \frac{C_{21}^3 - 21.C_{10}^2}{C_{21}^3}$.	0,25

Câu 2b (2điểm) Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{m-6}{4}x^4 - (2m+1)x^3 + 9x^2 + 2022$ với m là tham số

Tìm tất các giá trị của m sao cho tổng độ dài của các khoảng nghịch biến của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; +\infty)$ là 2.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= x^4 + (m-6)x^3 - 3(2m+1)x^2 + 18x \\
 &= x(x-6)(x^2 + mx - 3).
 \end{aligned}$$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6$ và $x^2 + mx - 3 = 0$.

Đề hàm số có các khoảng nghịch biến thì $f'(x)$ phải có 4 nghiệm phân biệt. Ta thấy phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu là $x_1 < 0 < x_2$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 = -m \text{ và } x_1 x_2 = -3.$$

Ta xét các trường hợp sau:

(1) Nếu $0 < x_2 < 6$ thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên $(x_1; 0)$ và $(x_2; 6)$. Tổng độ dài hai khoảng này là

$$|0 - x_1| + |6 - x_2| = 6 - (x_1 + x_2) = 6 + m$$

nên $m + 6 = 2$ hay $m = -4$. Thử lại ta có $x_2 = 2 + \sqrt{7} < 6$, thỏa mãn.

(2) Nếu $x_2 > 6$ thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên $(x_1; 0)$ và $(6; x_2)$. Tổng độ dài hai khoảng này là

$$|0 - x_1| + |6 - x_2| = x_2 - x_1 - 6$$

nên $x_2 - x_1 = 8$. Bình phương lên, ta được

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \text{ hay } m^2 + 12 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{13}.$$

- Với $m = 2\sqrt{13}$ thì ta tính được $x_2 = 4 - \sqrt{13} < 6$, không thỏa mãn.
- Với $m = -2\sqrt{13}$ thì ta tính được $x_2 = 4 + \sqrt{13} > 6$, thỏa mãn.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm của m là -4 và $-2\sqrt{13}$.

Câu 3 Gọi số tiền cần tăng giá mỗi hộp khẩu trang là x (nghìn đồng)

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số hộp khẩu trang bán ra giảm 100 hộp nên khi tăng x (nghìn đồng) thì số hộp khẩu trang bán ra thị trường giảm $100x$ hộp. Do đó tổng số hộp khẩu trang bán ra mỗi tháng là $3000 - 100x$ hộp.

Lúc đầu bán ra với giá 30 (nghìn đồng), mỗi hộp khẩu trang có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi hộp khẩu trang thu được số lãi là $12 + x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ với } x > 0$$

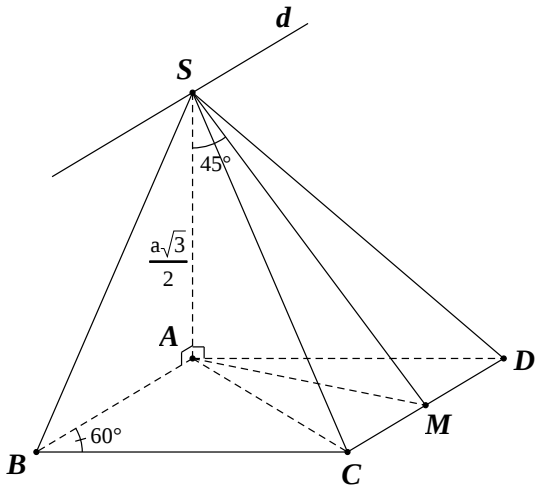
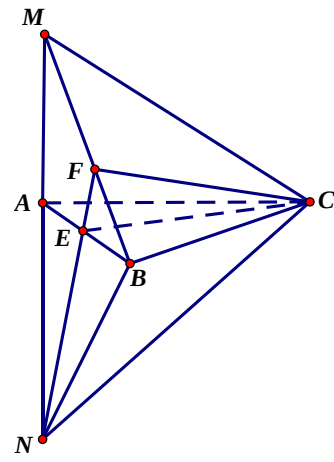
$$\text{Xét hàm số } f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ với } x > 0$$

$$\text{Ta có: } f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x-9)^2 + 44100 \leq 44100$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=9$

Vậy cơ sở bán mỗi hộp 39000 thì lợi nhuận là cao nhất

Câu 4 (5,0đ)	a) (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $ABC = 60^\circ$. Cạnh $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.	
--------------------------------	---	--

		0,25
	Giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD	0,25
	$SA \perp AB \Rightarrow SA \perp d$ Tam giác ABC có $AB = BC$ và $ABC = 60^\circ$ $\Rightarrow AC = BC = AD \Rightarrow \triangle SAC = \triangle SAD (c-g-c) \Rightarrow SC = SD \Rightarrow \triangle SCD$ cân tại S. Gọi M là trung điểm của CD suy ra $SM \perp CD$, mà $d \parallel CD$ suy ra $SM \perp d$.	0,5
	Vì $SA \perp d$ và $SM \perp d$ nên $((SAB), (SCD)) = \angle ASM = 45^\circ$. $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM \Rightarrow \triangle SAM$ vuông cân tại A $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = BC = AC = a$	0,5
	Vậy, $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot BA \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^3}{4}$.	0,5
	b) (3,0 điểm). Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM = x, (x > 0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB. Đường thẳng qua hai điểm E và F cắt d tại N. Xác định x để khối tứ diện $BCMN$ có thể tích nhỏ nhất.	
		0,25

	Ta có $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp EC$, kết hợp $EC \perp AB \Rightarrow EC \perp MB$	0,25
	$\begin{cases} MB \perp FC \\ MB \perp EC \end{cases} \Rightarrow MB \perp EF.$	0,5
	Ta có $\triangle NAE \sim \triangle BAM \Rightarrow \frac{NA}{BA} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM \cdot AN = AE \cdot BA = 2.$	0,5
	$V_{BCMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot (AM + AN) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot (AM + AN) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$	0,5
	$V_{BCMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow AM = AN.$	0,5
	Vậy $\min V_{BCMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ khi $AM = AN = \sqrt{2}$ hay $x = \sqrt{2}.$	0,5

Câu 5 Ta có $PN = 60 - 2x$, gọi H là trung điểm của PN suy ra $AH = \sqrt{60x - 900}$

Diện tích tam giác ANP là

$$S_{ANP} = \frac{1}{2} AH \cdot PN = \frac{1}{2} (60 - 2x) \sqrt{60x - 900} = (60 - 2x) \sqrt{15x - 225}$$

Do chiều cao của khối lăng trụ không đổi nên thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi diện tích tam giác ANP lớn nhất

Xét hàm số $f(x) = (60 - 2x) \sqrt{15x - 225}$ trên khoảng (15;30) có

$$f'(x) = \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=20$$

Lập bảng biến thiên và kết luận $x=20$