Đề 64

ĐỀ HSG TOÁN 9 LAI CHÂU 2023-2024

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $P=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm x để $\frac{1}{P}\le -\frac{5}{2}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a. Tìm số chính phương có bốn chữ số, chữ số hàng đơn vị khác 0, biết rằng số tạo bởi hai chữ số đầu (không đổi thứ tự) và tạo bởi hai chữ số cuối (không đổi thứ tự) đều là các số chính phương.

b. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$.

Câu 3. (5,0 điểm)

a. Tìm m sao cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1=2x_2$

b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R, AB là đường kính cố định và MN là đường kính thay đổi sao cho MN không vuông góc với AB và $M\neq A, M\neq B$. Các đường thẳng AM, AN cắt tiếp tuyến tại B lần lượt tại C và D. Gọi I là trung điểm của CD, Hlà giao điểm của AIvà MN.

a. Chứng minh tứ giác $CMND$ nội tiếp.

b. Chứng minh rằng$AI\perp MN$.

c. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHBI. Chứng minh rằng J luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{z+x}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\right)$

---Hết---

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4,0 điểm)

a. ĐKXĐ: $x\ge 0;x\ne 4;x\ne 9$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}+2+\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}+2+x-9+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$$

b. Với $x\ge 0;x\ne 4;x\ne 9$, ta có

$$\frac{1}{P}\le -\frac{5}{2}\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+1}\le -\frac{5}{2}\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+1}+\frac{5}{2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-8+5\sqrt{x}+5}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\le 0\Leftrightarrow \frac{2x+5\sqrt{x}-3}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2\sqrt{x}-1\le 0 \end{cases} \text{ vì } \sqrt{x}+3\ge 0 \text{ và } 2\sqrt{x}-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2\sqrt{x}\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4x\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{1}{4}$$ \(thỏa mãn điều kiện\)

Câu 2. (4,0 điểm)

a. Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}=n^2$

Đặt $\overline{ab}=x^2\left(4\le x\le 9\right)$. *Đặt* $\overline{cd}=y^2$*, do* $d\ne 0$ *nên* $1\le y\le 9$

Ta có $n^2=100.\overline{ab}+\overline{cd}=100x^2+y^2\ge 100x^2\Rightarrow n>10x\Rightarrow n\ge 10x+1$

Do $x\ge 4$ nên $n\ge 41$. (1)

Do $n\ge 10x+1$ nên $y^2=n^2-100x^2\ge \left(10x+1\right)^2-100x^2=20x+1$

Kết hợp với $y\le 9$ ta có: $20x+1\le 81\Rightarrow x\le 4$

Ta lại có $x\ge 4$ nên $x=4$.

Do $y\le 9$ *nên* $n^2=100x^2+y^2\le 100.4^2+9^2=1681=41^2\Rightarrow n\le 41\left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra n = 41. Khi đó $n^2=¿1681$

b. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3.$

Điều kiện: $x\ge -2$

Đặt $\sqrt{x+5}=a;\sqrt{x+2}=b\left(a,b\ge 0\right)$*, ta có:*

$a^2-b^2=x+5-\left(x+2\right)=3,\sqrt{x^2+7x+10}=\sqrt{\left(x+5\right)\left(x+2\right)}=a.b$

$(1) \Leftrightarrow (a-b)(1+ab)=a^2-b^2$

$\Leftrightarrow (a-b)(1-a+ab-b)=0$

$\Leftrightarrow (a-b)(1-a)(1-b)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 1-a=0 \\ 1-b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=1 \\ b=1 \end{array}\right. \text{Do đó} \left[\begin{array}{c} \sqrt{x+2}=\sqrt{x+5} \\ \sqrt{x+2}=1 \\ \sqrt{x+5}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}(VN) \\ x=-4(L) \\ x=-1(TM) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm x = −1.

Câu 3. (5,0 điểm)

a. Tìm m sao cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1=2x_2$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2-4(m^2+1)\ge 0 \Leftrightarrow 4m-3\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \frac{3}{4}$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1.x_2=m^2+1 \end{cases}$

Do $x_1=2x_2$ nên $\begin{cases} 3x_2=2m+1(1) \\ 2x_2^2=m^2+1(2) \end{cases}$

Từ (1) ta có: $x_2=\frac{2m+1}{3}$ *thay vào* (2) *ta được*: $2.\left(\frac{2m+1}{3}\right)^2=m^2+1$

$\Leftrightarrow 2.(2m+1)^2=9m^2+9 \Leftrightarrow 8m^2+8m+2=9m^2+9 \Leftrightarrow m^2+8m+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=7 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m sao cho phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1=2x_2$ là $m=1; m=7$.

b. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-xy=7 \\ (x^2+y^2)^2-x^2y^2=21 \end{cases}$

Đặt $x^2+y^2=a, xy=b$ HPT trên trở thành:

$\begin{cases} a-b=7 \\ a^2-b^2=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ (a-b)(a+b)=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=7 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2xy=-4 \end{cases}$

Cộng theo từng vế hai phương trình của hệ ta được:

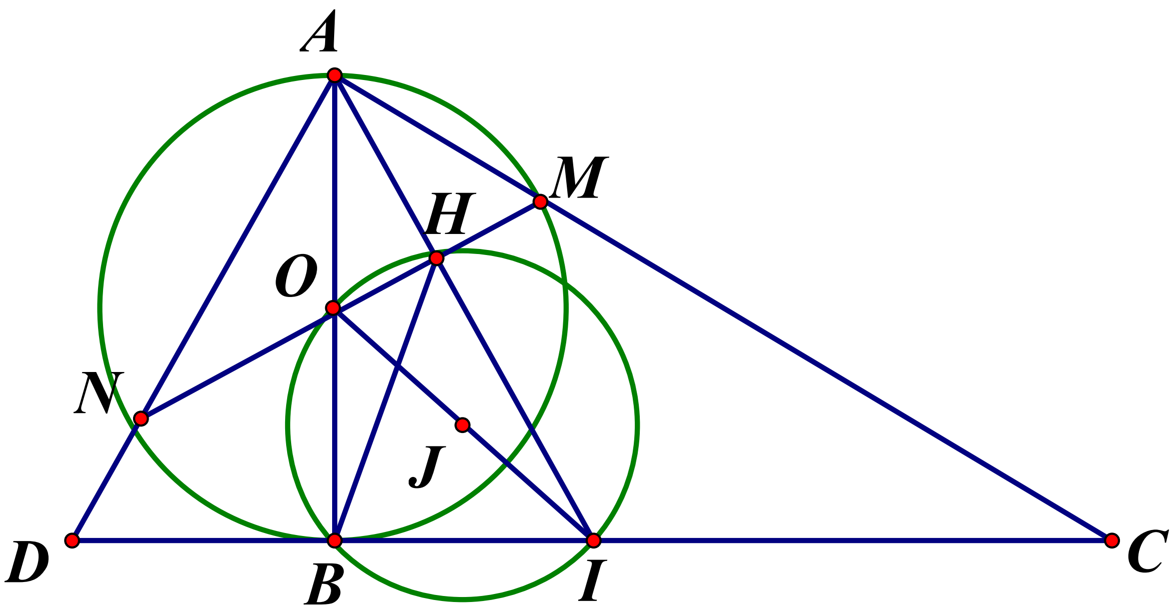
$x^2+y^2+2xy=1 \Leftrightarrow (x+y)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=-1 \end{array}\right.$

* Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$ x, y là nghiệm của phương trình: $t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-1 \\ t_2=2 \end{array}\right.$

* Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$ x, y là nghiệm của phương trình: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=-2 \end{array}\right.$

Vậy HPT có 4 nghiệm: $(x;y)\in\{(-1;2);(2;-1);(1;-2);(-2;1)\}$

Câu 4. (5,0 điểm)



a. Có ΔACD vuông tại A nên $\widehat{ACD}+\widehat{ADC}=90°$

ΔABC vuông tại B nên $\widehat{ACD}+\widehat{BAC}=90°$

Nên $\widehat{BAC}=\widehat{ADC}$ hay $\widehat{OAM}=\widehat{ADC}$

Vì ΔOAM cân tại O nên $\widehat{OAM}=\widehat{OMA}$. Do đó $\widehat{ADC}=\widehat{OMA}$

Mà $\widehat{OMA}+\widehat{CMN}=180°$

Suy ra tứ giác CMND nội tiếp

b. Vì ΔADC vuông tại A, AI là đường trung tuyến nên ΔAID cân tại I

Nên $\widehat{IAD}=\widehat{IDA}$. Lại có $\widehat{ANH}=\widehat{C}$ **(1)**\(cùng bù với $\widehat{MND}$)

Mà $\widehat{IDA}+\widehat{C}=90°$ nên $\widehat{IAD}+\widehat{C}=90°$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IDA}+\widehat{ANH}=90°$

Suy ra tam giác AHN vuông tại H, hay AH ⊥ MN. Vậy AI ⊥ MN.

c. Ta có tứ giác OBIH nội tiếp đường tròn đường kính OI. Vì J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHBI nên JO = JI = JB = JC.

Suy ra J thuộc đường trung trực của BC

Do A, O, B cố định nên đường trung trực của OB cố định

Vậy J luôn thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực của OB.

Câu 5. (2,0 điểm)

$$Ta\,có: P=\frac{(2x+y+z)(2y+z+y)(2z+x+y)}{8(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$Mà: 2x+y+z=(x+y)+(x+z)\geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} \ (1)$$

$$2y+x+z=(y+z)+(x+y)\geq 2\sqrt{(y+z)(x+y)} \ (2)$$

$$2z+x+y=(x+z)+(y+z)\geq 2\sqrt{(x+z)(y+z)} \ (3)$$

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta được:

$$\left(2x+y+z\right)\left(2y+x+z\right)\left(2z+x+y\right)\geq 8\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(x+z\right)$$

Suy ra $P \geq 1$ Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow x=y=z$