

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

(Lê Phúc Lữ, SV Đại học FPT TP HCM)

I. Các kiến thức cần nhớ.

1. Tính chất đường phân giác.

Cho tam giác ABC có phân giác trong AD, phân giác ngoài AE. Khi đó

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

2. Định lý Menelaus.

Cho các điểm M, N, P lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC (cả ba hoặc có đúng một điểm nằm ngoài các đoạn thẳng này).

Khi đó, M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

3. Định lý Ceva.

Cho các điểm M, N, P lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC (cả ba hoặc có đúng một điểm thuộc các đoạn thẳng này).

Khi đó, M, N, P đồng quy khi và chỉ khi $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

4. Các công thức tính quen thuộc.

Cho tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$, p là nửa chu vi. Gọi H, D lần lượt là chân đường cao, chân đường phân giác trong góc A. Ta tính được

$$DB = \frac{ac}{b+c}, DC = \frac{ab}{b+c} \text{ và } BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, AD = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

5. Vector đơn vị.

Vector có độ dài bằng 1 là vector đơn vị. Ta biết rằng tổng của hai vector là một vector và xác định theo quy tắc hình bình hành, nếu hai vector này có độ dài bằng nhau thì hình biểu diễn tổng của chúng là hình thoi; vector tổng cũng chính là tia phân giác của góc tạo bởi hai vector ban đầu.

Như thế trong hình học giải tích, khi cần viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng ta có thể chọn trong các vector chỉ phương của hai đường thẳng ra vector đơn vị rồi tính tổng của hai vector này; khi đó, ta thu được vector chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

6. Công thức vector về toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp.

Trong tam giác ABC, ta luôn có: $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ với I là tâm đường tròn nội tiếp và a, b, c là độ dài các cạnh ứng với góc A, B, C.

Ta hãy cùng tìm hiểu cụ thể các phương pháp này để thấy rõ hiệu quả của chúng.

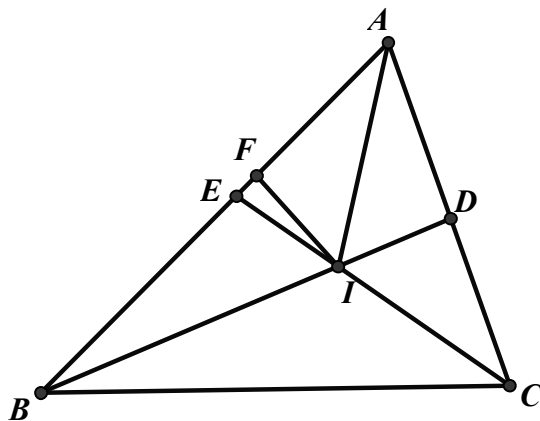
II. Các bài toán ví dụ.

Một số ví dụ dưới đây được giải bằng hai cách để có thể dễ đối chiếu được tính tự nhiên và tính hiệu quả riêng của mỗi cách tiếp cận vấn đề.

Bài 1. Cho tam giác ABC có hai phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Biết rằng $ID = IE$.

Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A hoặc $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Lời giải 1.



Ta xét hai trường hợp sau

-Nếu $AD = AE$ thì

$$\triangle AID = \triangle AIE (c.c.c) \Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AEI}.$$

Suy ra $\triangle ADB = \triangle AEC (g.c.g) \Rightarrow AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A.

-Nếu $AD \neq AE$, không mất tính tổng quát, ta giả sử $AD < AE$. Trên đoạn AE, lấy điểm F sao cho $AD = AF$; khi đó,

$$\triangle ADI = \triangle AFI (c.g.c) \Rightarrow IF = ID = IE.$$

Tam giác IEF cân tại I nên $\widehat{IFE} = \widehat{IEF} \Rightarrow \widehat{AFI} = \widehat{BEI} \Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{BEI}$.

Từ đây suy ra tứ giác ADIE nội tiếp và

$$\widehat{BAC} + \widehat{DIE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Do đó $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Từ hai trường hợp này, ta có đpcm.

Lời giải 2.

Theo công thức tính độ dài đường phân giác, ta có $BD = \frac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}$.

Vì BD là phân giác góc B nên $\frac{AD}{CD} = \frac{c}{a} \Rightarrow AD = \frac{bc}{a+c}$. Hơn nữa, AI là phân giác góc A trong

tam giác ABD nên $\frac{ID}{IB} = \frac{AD}{AB} = \frac{b}{a+c} \Rightarrow \frac{ID}{BD} = \frac{b}{a+b+c} = \frac{b}{2p}$.

$$\text{Do đó } ID = \frac{b}{2p} BD = \frac{b\sqrt{cap(p-b)}}{p(c+a)} \Rightarrow ID^2 = \frac{ab^2c(p-b)}{p(c+a)^2}.$$

Tương tự $IE^2 = \frac{abc^2(p-c)}{p(a+b)^2}$.

Từ giả thiết đã cho, ta có

$$\frac{ab^2c(p-b)}{p(c+a)^2} = \frac{abc^2(p-c)}{p(a+b)^2} \Leftrightarrow \frac{b(a+c-b)}{(c+a)^2} = \frac{c(a+b-c)}{(a+b)^2} \Leftrightarrow b(a+b)^2(a+c-b) = c(c+a)^2(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow (b-c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2+bc) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a^2 = b^2 + c^2 - bc \end{cases}$$

-Nếu $b=c$ thì tam giác ABC cân tại A.

-Nếu $a^2 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$.

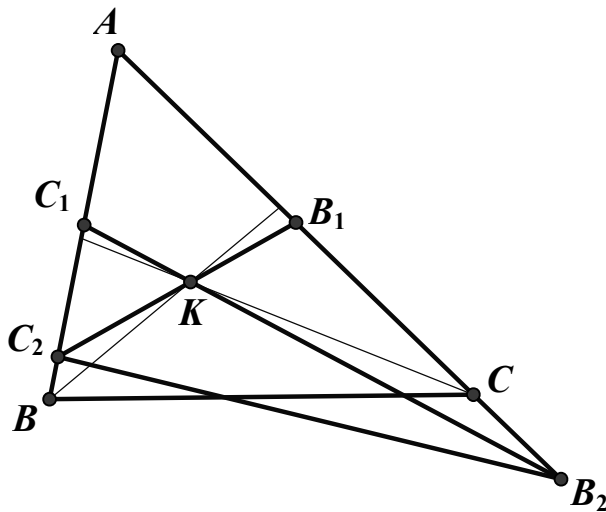
Vậy kết hợp hai trường hợp này lại, ta có đpcm.

Bài 2. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Gọi B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm các cạnh AC, AB. Đường thẳng C_1K cắt đường thẳng AC tại B_2 , đường thẳng B_1K cắt AB tại C_2 sao cho diện tích tam giác ABC và tam giác AB_2C_2 bằng nhau. Tính góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $AB \leq AC$. Đặt $AB_2 = x, AC_2 = y, x, y > 0$. Ta tính

được: $AD = \frac{bc}{a+c}$ và D nằm giữa A và B_1 . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD với cát

tuyến B_2KC_1 , ta có $\frac{B_2D}{B_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{KB}{KD} = 1 \Rightarrow \frac{x - \frac{bc}{a+c}}{x} \cdot \frac{a+c}{b} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{bc}{a+c-b}$.



Tương tự, ta tính được: $y = \frac{bc}{a+b-c}$.

Theo giả thiết thì $S_{ABC} = S_{AB_2C_2}$ nên $xy = bc$.

Thay trực tiếp các biểu thức đã tính được vào đẳng thức này, ta có:

$$\frac{bc}{a+c-b} \cdot \frac{bc}{a+b-c} = bc$$

$$\Leftrightarrow bc = (a+c-b)(a+b-c) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Do đó:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng I nằm trong tam giác MNP và

$$\frac{S_{IMN}}{a+b-c} = \frac{S_{INP}}{b+c-a} = \frac{S_{IPM}}{c+a-b}$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh nhận xét

Nếu điểm M và tam giác ABC nằm trong mặt phẳng thỏa $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ với $x, y, z > 0$ thì M nằm trong tam giác ABC.

Thật vậy: ta lấy A' thỏa mãn $y\overrightarrow{A'B} + z\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, vì $y, z > 0$ nên A' thuộc đoạn BC. Ta có:

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} &= x\overrightarrow{MA} + y(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B}) + z(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'C}) = \\ &= x\overrightarrow{MA} + (y\overrightarrow{MA'} + z\overrightarrow{MA'}) + (y\overrightarrow{A'B} + z\overrightarrow{A'C}) = x\overrightarrow{MA} + (y+z)\overrightarrow{MA'} \end{aligned}$$

Do $x, y+z > 0$ nên M thuộc đoạn AA' hay nằm trong tam giác ABC. Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán, từ đẳng thức quen thuộc $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, ta có

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} &\Leftrightarrow ((p-b) + (p-c))\overrightarrow{IA} + ((p-c) + (p-a))\overrightarrow{IB} + ((p-a) + (p-b))\overrightarrow{IC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (p-a)(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + (p-b)(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}) + (p-c)(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (b+c-a)\overrightarrow{IM} + (c+a-b)\overrightarrow{IN} + (a+b-c)\overrightarrow{IP} = \vec{0} \end{aligned}$$

Hơn nữa: $b+c-a, c+a-b, a+b-c > 0$ nên I nằm trong tam giác MNP.

Từ đây, ta cũng có: $S_{INP}.\overrightarrow{IM} + S_{IPM}.\overrightarrow{IN} + S_{IMN}.\overrightarrow{IP} = \vec{0}$. Do các vector này không cùng phương nên

$$\text{các hệ số trong hai đẳng thức trên phải tỉ lệ với nhau, tức là: } \frac{S_{IMN}}{a+b-c} = \frac{S_{INP}}{b+c-a} = \frac{S_{IPM}}{c+a-b}.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn ngoại tiếp đường tròn (I, r) có M là trung điểm BC. Gọi E là giao điểm của IM với đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $AE = r$.

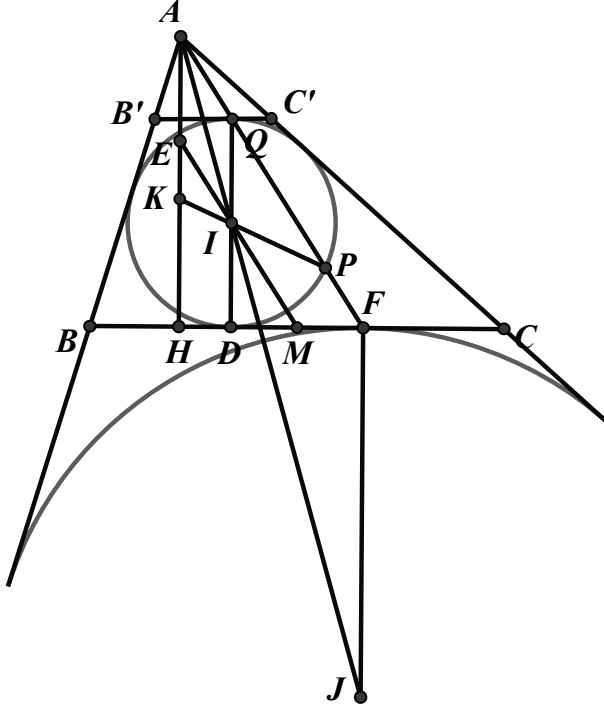
Lời giải 1.

Gọi D là tiếp điểm của (I) lên BC, F là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp (J) của góc A. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AF với (I), trong đó Q nằm giữa A và P.

Giả sử ID cắt (I) tại điểm thứ hai là Q'. Qua Q' vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại B' và C'.

Dễ thấy tồn tại một phép vị tự biến $\triangle AB'C'$ thành $\triangle ABC$.

Phép vị tự đó cũng biến tiếp điểm Q' của đường tròn bàng tiếp (I) của $\Delta AB'C'$ lên $B'C'$ thành tiếp điểm D của đường tròn bàng tiếp (J) của ΔABC lên BC.



Suy ra A, Q', F thẳng hàng hay điểm Q' trùng với điểm Q.

Để thấy D đối xứng với F qua M nên:

$MD = MF$, mà $ID = IQ$ nên IM là đường trung bình của ΔDQF hay $IM \parallel PQ$ hay tứ giác AEIQ là hình bình hành.

Do đó: $AE = IQ = r$. Ta có đpcm.

Lời giải 2.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$AB \leq AC \Leftrightarrow c \leq b$. Dễ dàng chứng minh được trên đoạn BC, các điểm B, H, D, M, C nằm thẳng hàng theo thứ tự đó. Ta có:

$$DM = DC - MC = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$$

$$MH = HC - MC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{b^2 - c^2}{2a}$$

Theo định lí Thales thì:

$$\frac{ID}{HE} = \frac{DM}{MH} = \frac{b-c}{2} : \frac{b^2 - c^2}{2a} = \frac{a}{b+c}$$

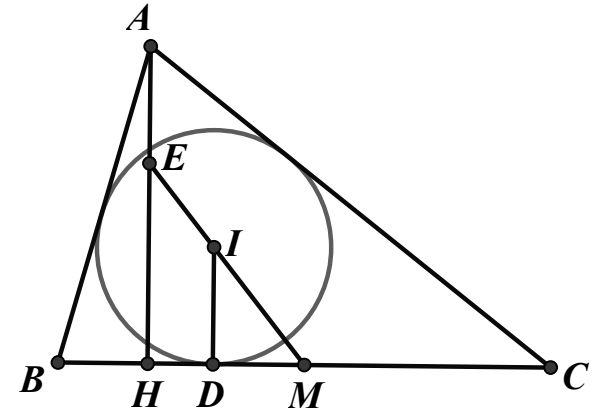
$$\Rightarrow HE = \frac{(b+c)r}{a}$$

Ta cũng có:

$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2pr}{a} = \frac{(a+b+c)r}{a}$$

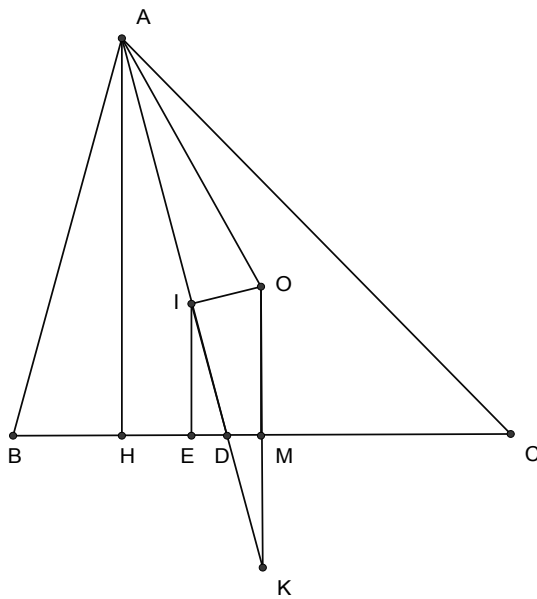
$$\Rightarrow AE = AH - HE = \frac{(a+b+c)r}{a} - \frac{(b+c)r}{a} = r$$

Ta có đpcm.



Bài 5. Cho tam giác ABC có $2BC = AB + AC$. Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh tam giác AIO vuông tại I.

Lời giải 1. Gọi H, D, M lần lượt là chân đường cao, phân giác và trung tuyến ứng với đỉnh A của tam giác ABC. E là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp lên B. Giả sử AD cắt OM tại K.



Ta thấy: $\widehat{HAB} = \widehat{OAC} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}$, mà AI là phân giác $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IAC}$ nên: $\widehat{IAH} = \widehat{IAO}$.
 Mặt khác: $AH \parallel OK$ nên: $\widehat{IAH} = \widehat{IKO}$, do đó: $\widehat{IAO} = \widehat{IKO}$ hay tam giác AOK cân tại O. Ta dễ dàng tính được $DE = DM$ nên $DI = DK$ hay $IK = 2ID$.
 Đồng thời, theo định lý Thales $\frac{DA}{DI} = \frac{HA}{IE} = \frac{AB + BC + CA}{BC} = 3 \Rightarrow \frac{AI}{DI} = 2$.
 Do đó: $AI = IK$ hay I là trung điểm của đoạn AK, suy ra: OI là trung tuyến của tam giác cân AOK nên OI cũng là đường cao của $\triangle AOK$.
 Do đó, tam giác AOI vuông tại I (đpcm).

Lời giải 2. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

Ta có: $AO^2 = R^2, IO^2 = R^2 - 2Rr$. Theo định lý Pythagores, ta chỉ cần chứng minh $AI^2 = 2Rr$.

Ta tính được $BD = \frac{ac}{b+c}$. Xét tam giác ABD, ta thấy AI chính là phân giác của tam giác này nên

$$AI = \frac{AB \cdot AD}{AB + BD} = \frac{c \cdot \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}}{c + \frac{ac}{b+c}} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{a+b+c} \Rightarrow AI^2 = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}.$$

Mặt khác: $R = \frac{abc}{4S}, r = \frac{S}{p} \Rightarrow 2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} = \frac{abc}{a+b+c} \Leftrightarrow b+c-a = a \Leftrightarrow 2a = b+c. \text{ Đẳng thức này đúng nên ta có đpcm.}$$

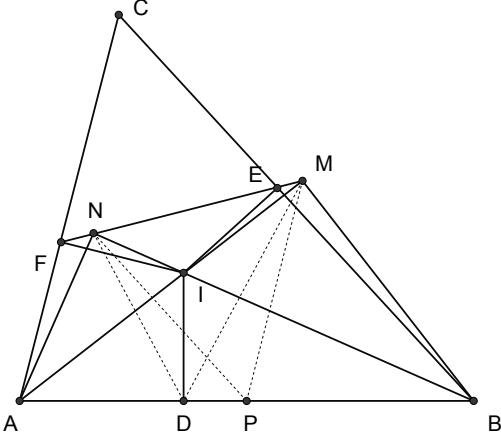
Bài 6. Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B cố định (A khác B). Một điểm C di động trong mặt phẳng sao cho góc $\widehat{ACB} = \alpha$ không đổi ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI, BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M, N.

Chứng minh rằng

1. Đoạn MN có độ dài không đổi.
2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi học sinh giỏi quốc gia 2009)

Lời giải 1.



Ta có: $\widehat{MEB} = \widehat{CEF} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$, $\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} =$
 $= \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \frac{180 - \widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MIB}$, do đó:

Tứ giác EMBI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{IEB} = 90^\circ$ hay tam giác AMB vuông ở M.

Tương tự, ta cũng có tam giác NAB vuông tại N.
 Từ đó, ta được tứ giác ANMB nội tiếp đường tròn đường kính AB. Ta có:

$$\Delta AIB \sim \Delta NIM (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{IA}{NI}$$

$$\Rightarrow MN = AB \cdot \frac{IN}{IA} = AB \cdot \sin \widehat{NAI}$$

$= AB \cdot \sin \frac{\widehat{C}}{2} = AB \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, không đổi. Hơn nữa, ta thấy:

$$\widehat{MDN} = \widehat{IDN} + \widehat{IDM} = 2(90^\circ - \frac{\widehat{CAB} + \widehat{CBA}}{2}) = \widehat{C}.$$

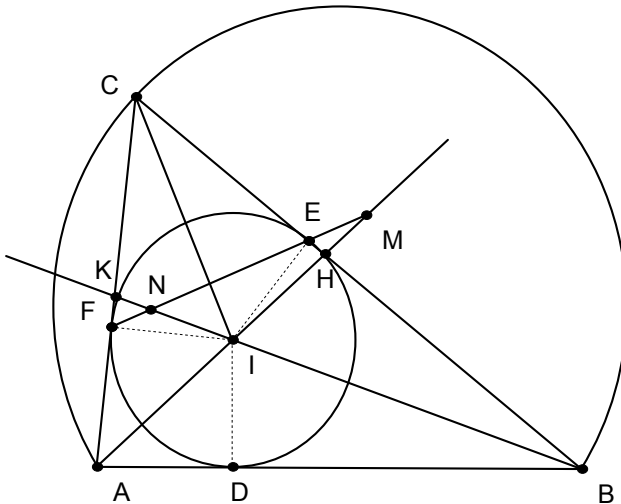
Gọi P là trung điểm của AB thì P chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ANMB:

$$\widehat{MPN} = \widehat{MPA} - \widehat{NPA} = 2(\widehat{MBA} - \widehat{NBA}) = 2(90^\circ - \widehat{MAB} - \widehat{NBA}) = 2(90^\circ - \frac{\widehat{CAB} + \widehat{CBA}}{2}) = \widehat{C}.$$

Do đó: $\widehat{MPN} = \widehat{MDN} \Rightarrow$ Tứ giác MNDP nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua P cố định. Đây chính là đpcm.

Lời giải 2.

1. Đặt $AB = c$ (không đổi), $BC = a$, $CA = b$. Do $\widehat{ACB} = \alpha$ không đổi nên C di động trên cung chứa góc α dựng trên đoạn AB. Gọi AH, BK là các đường phân giác của ΔABC .



Ta sẽ tính MN trong trường hợp N thuộc đoạn EF và M nằm ngoài đoạn EF.

Khi đó, E nằm giữa C và H; K nằm giữa F và C.

Ta cũng có: $AC \leq AB \Leftrightarrow b \leq c$,

$AB \leq BC \Leftrightarrow c \leq a$ hay $b \leq c \leq a$.

Các trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự.

Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{HC}{HB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{b}{b+c} \Leftrightarrow HC = \frac{ab}{b+c}$$

Do E là tiếp điểm của (I) lên BC, F là tiếp điểm của (I) lên CA nên:

$$CE = CF = \frac{CA + CB - AB}{2} = \frac{a + b - c}{2},$$

$$AF = AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{c + b - a}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } HE &= HC - CE = \left(\frac{ab}{b+c} \right) - \left(\frac{a+b-c}{2} \right) = \frac{2ab - (b+c)(a+b-c)}{2(b+c)} = \\ &= \frac{ab - b^2 + c^2 - ca}{2(b+c)} = \frac{(c-b)(b+c-a)}{2(b+c)}. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự, ta tính được: } KC = \frac{ab}{a+c}, \quad KF = \frac{(a-c)(a+c-b)}{2(a+c)}.$$

$$\text{Ta cũng có: } EF = 2CF \cdot \sin \widehat{ECI} = (a+b-c) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Do A, H, M thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh của $\triangle CEE$ nên theo định lý Menelaus:

$$\begin{aligned} \frac{AF}{AC} \cdot \frac{HC}{HE} \cdot \frac{ME}{MF} &= 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{b+c-a}{2}}{b} \cdot \frac{\frac{ab}{b+c}}{(c-b)(b+c-a)} \cdot \frac{ME}{MF} = 1 \\ \Leftrightarrow \frac{b+c-a}{2b} \cdot \frac{2ab}{(c-b)(b+c-a)} \cdot \frac{MF-EF}{MF} &= 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{EF}{MF} = \frac{c-b}{a} \Leftrightarrow MF = EF \cdot \frac{a}{a+b-c} \end{aligned}$$

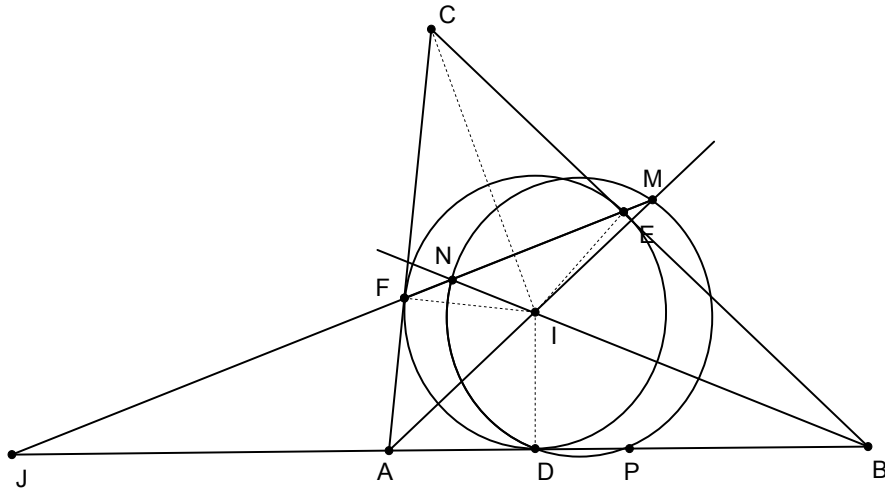
Tương tự: K, N, B thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa cạnh của $\triangle CEF$ nên:

$$\begin{aligned} \frac{KC}{KF} \cdot \frac{NF}{NE} \cdot \frac{BE}{BC} &= 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{ab}{a+c}}{(a-c)(a+c-b)} \cdot \frac{NF}{EF-NF} \cdot \frac{\frac{c+a-b}{2}}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{NF}{EF-NF} = \frac{a-c}{b} \\ \Leftrightarrow NF(a+b-c) &= EF(a-c) \Leftrightarrow NF = EF \cdot \frac{a-c}{a+b-c} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } MN = MF - NF = EF \cdot \frac{a}{a+b-c} - EF \cdot \frac{a-c}{a+b-c} = (a+b-c) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{c}{a+b-c} = c \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Do c và góc α không đổi nên MN không đổi. Vậy ta có đpcm.

2.



Gọi P là trung điểm của AB. Ta sẽ chứng minh P chính là điểm cố định cần tìm.

-Nếu $CA = CB$, nghĩa là tam giác ABC cân tại C thì D trùng với P và (DMN) đi qua P.

Ta có đpcm.

-Nếu $CA \neq CB$, giả sử $BC > AC$ ($a > b$) thì đường thẳng MN cắt đường thẳng AB tại J.

Do các điểm E, F, J thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa cạnh của tam giác ABC nên theo định lý Menelaus:

$$\begin{aligned} \frac{EC}{EB} \cdot \frac{FA}{FC} \cdot \frac{JB}{JA} &= 1 \Leftrightarrow \frac{JB}{JA} = \frac{EB}{FA} = \frac{a+c-b}{b+c-a} \Leftrightarrow \frac{JA+AB}{JA} = \frac{a+c-b}{b+c-a} \Leftrightarrow \frac{AB}{JA} = \frac{a+c-b}{b+c-a} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{AB}{JA} = \frac{2(a-b)}{b+c-a} \Leftrightarrow JA = \frac{c(b+c-a)}{2(a-b)} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } JD = JA + AD = \frac{c(b+c-a)}{2(a-b)} + \frac{b+c-a}{2} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{2(a-b)}$$

$$JP = JA + AD = \frac{c(b+c-a)}{2(a-b)} + \frac{c}{2} = \frac{c^2}{2(a-b)}.$$

$$\text{Do đó: } JD \cdot JP = \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{2(a-b)} \cdot \frac{c^2}{2(a-b)} = \frac{c^2(b+c-a)(c+a-b)}{4(a-b)^2} \quad (1)$$

Tương tự, do J, A, B thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác CEF nên:

$$\begin{aligned} \frac{JE}{JF} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \frac{BC}{BE} &= 1 \Leftrightarrow \frac{JF+EF}{JF} \cdot \frac{\frac{b+c-a}{2}}{b} \cdot \frac{a}{\frac{a+c-b}{2}} = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{EF}{JF} = \frac{b(a+c-b)}{a(b+c-a)} \\ &\Leftrightarrow \frac{EF}{JF} = \frac{(a-b)(a+b-c)}{a(b+c-a)} \Leftrightarrow JF = EF \cdot \frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a+b-c)}. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$JM = JF + MF = EF \cdot \frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a+b-c)} + EF \cdot \frac{a}{a+b-c} = EF \cdot \frac{ac}{(a-b)(a+b-c)}.$$

$$JN = JF + FN = EF \cdot \frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a+b-c)} + EF \cdot \frac{a-c}{a+b-c} = EF \cdot \frac{bc}{(a-b)(a+b-c)}.$$

$$\begin{aligned} JM \cdot JN &= EF^2 \cdot \frac{ac}{(a-b)(a+b-c)} \cdot \frac{bc}{(a-b)(a+b-c)} = (a+b-c)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{abc^2}{(a+b-c)^2(a-b)^2} \\ &= \frac{(1-\cos \alpha)}{2} \cdot \frac{abc^2}{(a-b)^2} = \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \cdot \frac{abc^2}{2(a-b)^2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4ab} \cdot \frac{abc^2}{(a-b)^2} \\ &= \frac{c^2(b+c-a)(c+a-b)}{4(a-b)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

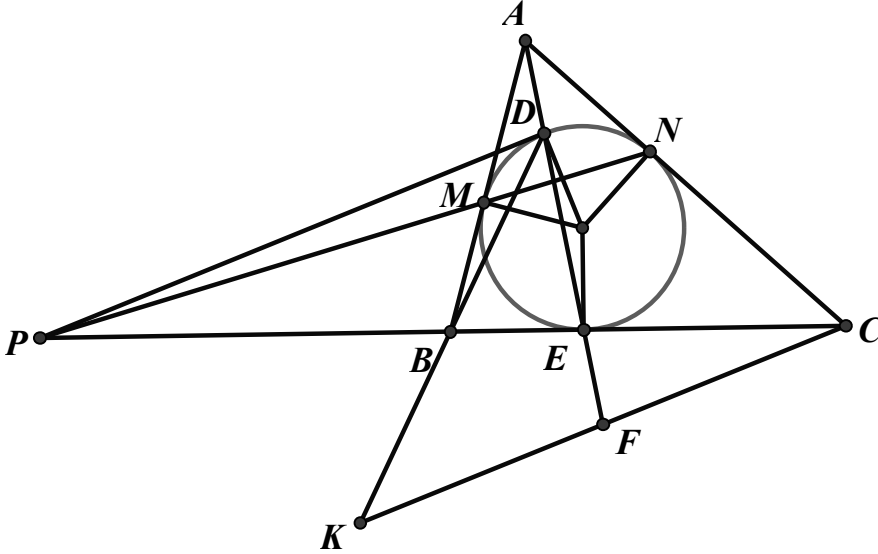
Từ (1) và (2), suy ra: $JD \cdot JP = JE \cdot JF$; do đó: tứ giác DPEF nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua P.

Ta có đpcm.

Bài 7. Cho tam giác nhọn không cân ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi E là tiếp điểm của (I) trên các cạnh BC , đoạn thẳng AE cắt (I) tại điểm thứ hai khác E là D . Trên đường thẳng AE lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Đường thẳng BD cắt đường thẳng CF tại K . Chứng minh rằng: $KF = CE$.

(Đề chọn đội tuyển Trung Quốc dự thi IMO 2008)

Lời giải 1.



Không mất tính tổng quát, giả sử $B < C$. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) lên các cạnh AB, AC . Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và BC .

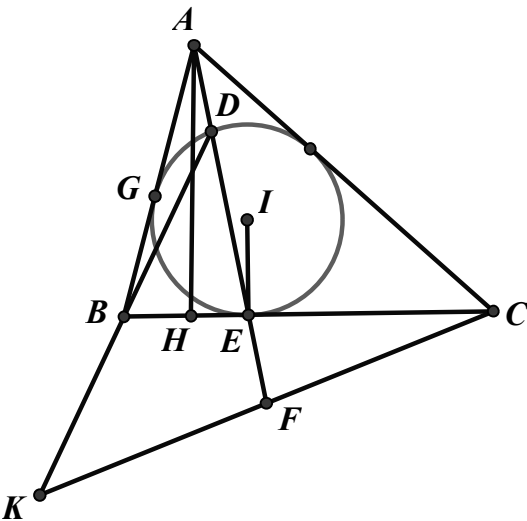
Theo một tính chất quen thuộc về cực và đối cực, ta thấy rằng PD chính là tiếp tuyến của (I) , suy ra: $\widehat{PED} = \widehat{PDE}$.

Hơn nữa, $\widehat{PED} = \widehat{CEF} = \widehat{CFE}$ nên suy ra PD và CF song song với nhau. Dễ thấy:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{EB}{EC} \text{ nên } P, B, E, C \text{ là}$$

một hàng điểm điều hòa. Suy ra D cùng với P, B, E, C lập thành một chùm điều hòa. Do PD song song với CF , đồng thời K thuộc DB , F thuộc DE nên theo tính chất về chùm điều hòa, ta có được F là trung điểm của KC . Ta có đpcm.

Lời giải 2. Gọi H là hình chiếu của A lên BC , M là trung điểm của BC .



Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB < AC$, tức là $c < b$.

Khi đó: M nằm giữa C và E . Vì E là tiếp điểm của (I) lên BC nên ta có các kết quả:

$$BE = \frac{c+a-b}{2}, CE = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\Rightarrow ME = CE - CM = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{b-c}{c+a-b} \quad (1)$$

Do AH là đường cao của tam giác ABC nên:

$$CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}. \text{ Suy ra:}$$

$$HE = HC - EC = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}.$$

Do $CE = CF$ nên tam giác CEF cân ở C, ta có:

$$\cos AEH = \frac{HE}{AE}, \cos CEF = \frac{EF}{2CE} \Rightarrow \frac{HE}{AE} = \frac{EF}{2CE} \Rightarrow EF = \frac{2HE.CE}{AE}$$

Gọi G là tiếp điểm của (I) lên cạnh AB, theo tính chất phương tích, ta có:

$$AG^2 = AD.AE \Rightarrow AD = \frac{AG^2}{AE} \Rightarrow DE = AE - AD = \frac{AE^2 - AG^2}{AE}$$

$$\text{Do đó: } \frac{EF}{DE} = \frac{2HE.CE}{AE} : \frac{AE^2 - AG^2}{AE} = \frac{2HE.CE}{(AE^2 - AG^2)} = \frac{(b-c)(b+c-a)(a+b-c)}{a(AE^2 - AG^2)}$$

$$AE^2 - AG^2 = AH^2 + HE^2 - AG^2 = \frac{4S^2}{a^2} + \frac{(b-c)^2(b+c-a)^2}{4a^2} - (b+c-a)^2 =$$

$$= \frac{16S^2 + (b-c)^2(b+c-a)^2 - 4a^2(b+c-a)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) + (b+c-a)^2[(b-c)^2 - a^2]}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) - (b+c-a)^2(a+b-c)(c+a-b)}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(a+b+c-b-c+a)}{4a^2} =$$

$$= \frac{2a(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4a^2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{2a}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{EF}{DE} = \frac{(b-c)(b+c-a)(a+b-c)}{2a} : \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2a} = \frac{b-c}{c+a-b} \quad (2)$$

Từ (1), (2), ta được: $\frac{ME}{BE} = \frac{EF}{DE}$, theo định lí Thalès đảo, ta có: MF//BD hay MF // BK.

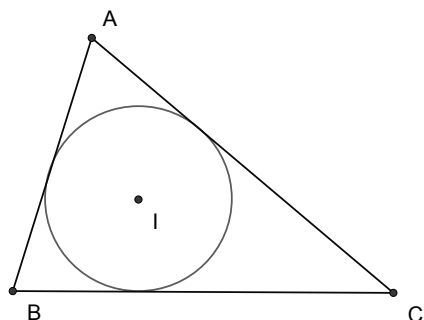
Trong tam giác BCK có MF đi qua trung điểm của BC và song song với BK nên cũng đi qua trung điểm của CK, suy ra F là trung điểm của CK hay $CF = KF$, mà $CE = CF$ (giả thiết) nên $KF = CE$. Đây chính là đpcm.

Nhận xét. Trong các bài toán đã nêu, đôi khi việc dùng cách tìm trực tiếp độ dài các đoạn thẳng khá phức tạp, đòi hỏi kĩ năng tính toán và biến đổi nhiều; thế nhưng cách tiếp cận và giải bài toán theo kiểu này rất tự nhiên và không đòi hỏi hiểu biết về các định lí về đường phân giác. Ta cũng biết rằng, việc ứng dụng tọa độ vào giải các bài toán dạng này thường không khả thi và ý tưởng đã nêu trên chính là một cách giải quyết khá hữu hiệu khi gặp bế tắc trong việc kẻ các đường phụ, vận dụng một định lí nào đó khi gặp một bài toán liên quan.

Trong phần tiếp theo, ta sẽ xét một số bài toán hình học giải tích và tìm hiểu ứng dụng của vector đơn vị, tâm tỉ cự trong việc viết phương trình đường phân giác cũng như tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(3,4)$ và $B(6,0)$.

Viết phương trình phân giác trong của góc AOB của tam giác OAB .



Lời giải 1. Ta có: $\overrightarrow{OA} = (3; 4)$, $\overrightarrow{OB} = (6; 0)$

Phương trình đường thẳng qua O và A là:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y = 0.$$

Phương trình đường thẳng qua O và B là: $y = 0$.

Theo công thức đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng OA và OB:

$$\frac{4x-3y}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm \frac{y}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow \frac{4x-3y}{5} = \pm y \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8y=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \quad (*) \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

Thay tọa độ A và B vào (*) và nhân lại: $(3-2.4)(6-2.0) = -12 < 0$, suy ra A, B nằm khác phía với nhau so với đường thẳng (*), vậy $x-2y=0$ chính là đường phân giác cần tìm.

Lời giải 2. Vector chỉ phương của OA và OB lần lượt là $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right), (1; 0)$. Tổng của chúng là:

$\vec{u} = \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Đường phân giác cần tìm đi qua O có vector chỉ phương là $\vec{u}$ nên phương trình là:

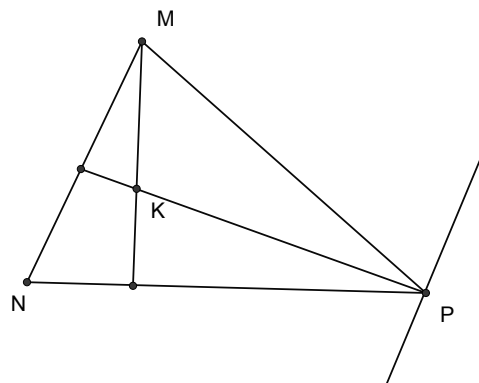
$$\frac{x-0}{8/5} = \frac{y-0}{4/5} \Leftrightarrow x-2y=0.$$

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $N(2, -1)$. Viết phương trình các cạnh của $\triangle MNP$ biết rằng đường cao hạ từ M của tam giác có phương trình $3x-4y+27=0$, đường phân giác ngoài vẽ từ P có phương trình là $x+2y-5=0$.

Lời giải. Phương trình NP là $4(x-2)+3(y+1)=0$

hay $4x+3y-5=0$. Do P là giao điểm của đường phân giác ngoài tại đỉnh P và đường NP nên tọa độ P là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 4x+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$



Ta có được: $P(-1,3)$. Phương trình đường phân giác trong tại đỉnh P: $2(x+1)-(y-3)=0$ hay $2x-y+5=0$.

Đến đây, ta có hai hướng giải như sau.

Hướng giải 1.

Tọa độ giao điểm K của phân giác trong tại P và đường cao kẻ từ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{5} \\ y=\frac{39}{5} \end{cases}.$$

Khoảng cách từ K đến NP là: $\frac{\left|4 \cdot \frac{7}{5} + 3 \cdot \frac{39}{5} - 5\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5}.$

Gọi $\vec{u}(a;b)$ là vectơ chỉ phương của MP, khi đó phương trình MP là:

$a(x+1)+b(y-3)=0$. Khoảng cách từ K đến MP:

$$\frac{\left|a\left(\frac{7}{5}+1\right)+b\left(\frac{39}{5}-3\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{24}{5} \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow (a+2b)^2 = 4(a^2+b^2) \Leftrightarrow 3a^2-4ab=0 \Leftrightarrow a=0 \vee a=\frac{4}{3}$$

Do đó phương trình của MP là: $y-3=0$. Suy ra: tọa độ M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y-3=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$$

Từ đó ta có phương trình của MN là: $\frac{x-2}{-5-2} = \frac{y+1}{3+1} \Leftrightarrow 4x+7y-1=0$.

Hướng giải 2.

Vectơ chỉ phương của NP: $(3;-4) // \vec{u} = \left(\frac{3}{5}; \frac{-4}{5}\right), |\vec{u}| = 1$. Gọi $\vec{v} = (a;b)$ là vectơ chỉ phương đơn

vị của MP, tức là: $a^2+b^2=1$ (*). Ta có: $\vec{u}+\vec{v} = \left(a+\frac{3}{5}; b-\frac{4}{5}\right)$ chính là vectơ chỉ phương của

phân giác trong tại P nên : $\frac{a+\frac{3}{5}}{1} = \frac{b-\frac{4}{5}}{2} \Leftrightarrow 2a+2=b$. Thay vào (*), ta có:

$$5a^2 + 8a + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = 0 \\ a = \frac{-3}{5} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Từ đó, suy ra phương trình của MP là: $y - 3 = 0$, phương trình của MN là: $4x + 7y - 1 = 0$.

Bài 10. Trong không gian cho các điểm $A(2; -1; 0), B(2, 3, 2), C(1, -1, -2)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0, 4, 2), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, -2)$. Ta chọn tương ứng hai vector đơn vị của hai đoạn này là $\vec{u} = (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \vec{v} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

Do đó, vector chỉ phương của phân giác trong góc A chính là $\vec{u} + \vec{v} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, vecto này song song với $(1, -2, 1)$.

Vậy phương trình đường phân giác trong góc A chính là $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$.

Bài 11. Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1, 2, 3), B(4, 2, 5), C(4, 6, 5)$.

Tìm tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta dễ dàng tính được độ dài các cạnh của tam giác ABC là $AB = \sqrt{13}, BC = 4, CA = \sqrt{29}$.

Từ đó suy ra $4\overrightarrow{IA} + \sqrt{29}\overrightarrow{IB} + \sqrt{13}\overrightarrow{IC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{4\overrightarrow{OA} + \sqrt{29}\overrightarrow{OB} + \sqrt{13}\overrightarrow{OC}}{4 + \sqrt{29} + \sqrt{13}}$.

Do đó, tọa độ của I là (x_0, y_0, z_0) trong đó x_0, y_0, z_0 xác định như sau:

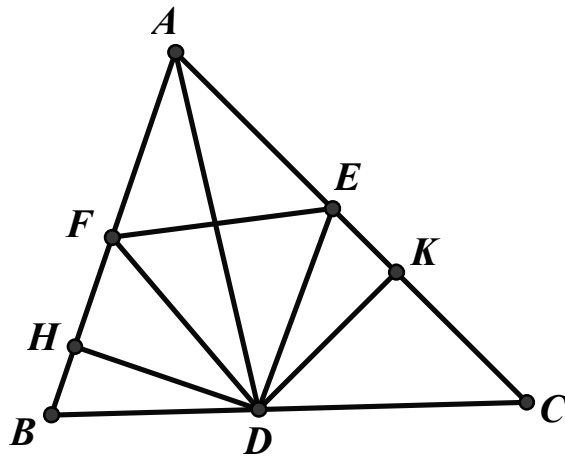
$$x_0 = \frac{4(\sqrt{13} + \sqrt{29} + 1)}{4 + \sqrt{29} + \sqrt{13}}, y_0 = \frac{6\sqrt{13} + 2\sqrt{29} + 8}{4 + \sqrt{29} + \sqrt{13}}, z_0 = \frac{5\sqrt{13} + 5\sqrt{29} + 12}{4 + \sqrt{29} + \sqrt{13}}.$$

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $D(0,2), E(2,5), F(3,0)$. Dựng tam giác ABC sao cho D, E, F lần lượt là chân đường phân giác góc A, B, C trong tam giác ABC.

Lời giải. Ta tính được $DE^2 = DF^2 = 13, EF^2 = 26$ nên tam giác DEF vuông cân tại D.

Ta sẽ chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A bằng cách chứng minh các nhận xét sau

“Tam giác ABC có D, E, F lần lượt là chân đường phân giác ứng với góc A, B, C. Khi đó $DE = DF$ khi và chỉ khi tam giác ABC cân tại A hoặc tứ giác ADEF nội tiếp.”



Hướng giải 1. Thật vậy, gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC. Do $DH = DK$ nên $\triangle DHF = \triangle DKE$, suy ra $\widehat{HFD} = \widehat{KED}$ (*).

Ta xét ba trường hợp sau

-Nếu H, K lần lượt thuộc BF và CF thì từ (*), ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ADF} \Rightarrow \triangle ADE = \triangle ADF$ (g.c.g), do đó

$$AE = AF, \text{ mà } AE = \frac{bc}{a+c}, AF = \frac{bc}{a+b} \text{ nên ta}$$

được $AB = AC$ hay tam giác ABC cân tại A.

-Nếu H không thuộc BF và K không thuộc CE thì chứng minh tương tự.

-Nếu H thuộc BF nhưng K không thuộc CE (trường hợp ngược lại tương tự) thì từ (*), dễ thấy rằng tứ giác AEDF nội tiếp.

Nhận xét được chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh nhận xét rằng “Nếu ABC là tam giác vuông nhưng không cân tại A với D, E, F lần lượt là chân đường phân giác góc A, B, C thì tam giác DEF không cân.”

Thật vậy, trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các điểm $A(0,0), B(b,0), C(0,c), b, c > 0$.

Phương trình đường thẳng BC là $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1 \Leftrightarrow cx + by - bc = 0$, phương trình phân giác góc A là

$x - y = 0$ nên tọa độ điểm D là $D(\frac{bc}{b+c}, \frac{bc}{b+c})$.

Ta có $BC = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow AE = \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow E(0, \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}})$, do đó

$$DE^2 = \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}}\right)^2.$$

Tương tự, ta cũng có $DF^2 = \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2$. Suy ra

$$\begin{aligned} DE = DF &\Leftrightarrow \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}}\right)^2 = \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{c + \sqrt{b^2 + c^2}} \vee \frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b + \sqrt{b^2 + c^2}} = -\frac{bc}{b+c} + \frac{bc}{c + \sqrt{b^2 + c^2}} \\ &\Leftrightarrow b = c \vee b + c = 2\sqrt{b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Dễ thấy cả hai đẳng thức đều không thể xảy ra nên nhận xét được chứng minh.

Từ hai điều này, ta thấy rằng nếu tam giác DEF ban đầu vuông cân thì tam giác ABC phải cân, vì nếu xảy ra trường hợp tam giác ABC không cân thì tứ giác AEDF nội tiếp, mà góc D vuông nên góc A cũng phải vuông, theo nhận xét thứ hai thì đây là điều vô lí.

Hướng giải 2. Ta sẽ chứng minh các nhận xét trực tiếp bằng cách biến đổi đại số. Ta có

$$\begin{aligned} DE^2 &= CD^2 + CF^2 - 2CD.CF.\cos C = \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c+a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ab}{c+a} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{a^2 b^2 [(b+c)^2 + (c+a)^2] - ab(b+c)(c+a)(a^2 + b^2 - c^2)}{(b+c)^2 (c+a)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có } DF^2 = \frac{a^2 c^2 [(b+c)^2 + (a+b)^2] - ac(b+c)(a+b)(c^2 + a^2 - b^2)}{(b+c)^2 (a+b)^2}$$

Nếu $DE = DF$ thì cho hai biểu thức trên bằng nhau, quy đồng và phân tích thành nhân tử, ta có

$$\begin{aligned} abc(b-c)(b+c)(a^3 + a^2b + a^2c - b^3 - ab^2 - c^3 - ac^2 - bc^2 - b^2c - abc) &= 0 \\ \Leftrightarrow b = c \vee (a+b+c)(a^2 - b^2 - c^2) &= abc \end{aligned}$$

Đến đây, ta thấy rằng tam giác ABC phải cân hoặc tù tại A, tiếp tục chứng minh nhận xét thứ hai để suy ra tam giác ABC cân tại A.

Trở lại bài toán đã cho, ta có cách dựng hình như sau

-Đường thẳng d qua D, song song với EF chính là đường thẳng chứa cạnh BC. Ta có $\overrightarrow{EF} = (1, -5)$ nên đường thẳng BC là $5(x-0) + (y-2) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 2 = 0$.

-Tam giác BEF cân tại F (do $\widehat{EBF} = \widehat{FEB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$) nên B chính là giao điểm của đường tròn (E, EF) với d. Ta xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + y - 2 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5x + 2 \\ (x-3)^2 + (5x-2)^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-1+5\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-1-5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ta cần chọn điểm nằm khác phía với D so với hình chiếu của F lên d. Dễ thấy góc $\widehat{BDF} = 45^\circ$ nên $BD > DF \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{26}}{2}$. Thử trực tiếp, ta được $B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-5\sqrt{3}}{2}\right)$.

-Do C đối xứng với B qua D nên $C\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{9+5\sqrt{3}}{2}\right)$.

-Điểm A là giao điểm của trung trực EF với đường thẳng BF, mà trung trực EF là

$(x-0) - 5(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 10 = 0$, đường thẳng BF là $x + \frac{10-13\sqrt{3}}{37}y = 3$. Ta có hệ phương

trình sau
$$\begin{cases} x - 5y + 10 = 0 \\ x + \frac{10-13\sqrt{3}}{37}y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15+5\sqrt{3}}{6} \\ y = \frac{15+\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác ABC cần tìm là

$$A\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{6}, \frac{15+\sqrt{3}}{6}\right), B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-5\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{9+5\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nhận xét. Ta thấy rằng trong các bài toán nêu trên, nếu không sử dụng phương pháp vector mà dùng công thức đường phân giác thì việc viết được phương trình đó cũng là chuyện không đơn giản; hơn nữa, để tìm giao điểm của hai đường thẳng trong không gian khó hơn trong mặt phẳng rất nhiều. Thậm chí cách dùng các vector như trên là cách duy nhất dùng để giải quyết các bài toán liên quan đến đường phân giác và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác trong không gian.

III. Bài tập áp dụng.

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các phân giác AD, BE, CF (với D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB). Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AD, BE, CF với (O).

Chứng minh rằng: $\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} \geq \frac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2. Cho tam giác ABC có các phân giác AD, BE, CF. Chứng minh rằng $4S_{DEF} \leq S_{ABC}$.

Bài 3. Chứng minh các tính chất về đường đối trung.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM, phân giác AD và AS đối xứng với AM qua AD. Khi đó, AR được gọi là đường đối trung của tam giác ABC.

- Chứng minh rằng: $\frac{RB}{RC} = \frac{c^2}{b^2}, \frac{AR}{AM} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$.
- Các đường đối trung BS, CT được xác định tương tự. Chứng minh rằng: AR, BS, CT đồng quy tại một điểm.
- Chứng minh tia AS đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (ABC).

Bài 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn $2(\sin A + \sin B + \sin C) + \tan A = 0$. Chứng minh rằng chân đường phân giác góc A cách đều chân đường phân giác góc B và góc C.

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, ngoại tiếp đường tròn (I) có H là chân đường cao ứng với góc A. Gọi M là trung điểm BC. Biết rằng trung trực HM đi qua I. Chứng minh rằng độ dài các cạnh của tam giác lập thành một cấp số cộng.

Bài 6. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tiếp điểm của (I) lên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Đoạn AD cắt (I) tại M. Đường thẳng qua M vuông góc với AD cắt EF ở N.

Chứng minh rằng AN song song với BC.

Bài 7. Cho tam giác ABC có BC là cạnh nhỏ nhất; các đường phân giác trong AA', BB', CC' đồng quy tại I và theo thứ tự cắt các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C'. Giả sử bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác $IA'B', IA'C'$ bằng nhau. Chứng minh tam giác ABC cân tại A.

Bài 8. Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp. Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi M, N, P lần lượt là điểm chung của các cặp đường thẳng $(EF, BC), (DF, CA), (DE, AB)$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ với BD là đường trung tuyến, đường phân giác BE. Đường thẳng qua C vuông góc với BE ở F và cắt BD ở G. Gọi K là trung điểm của GE.

Chứng minh rằng D, K, F thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn, đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại K, L, M. Đường thẳng qua B và song song với MK cắt LM, LK lần lượt ở R, S. Chứng minh rằng góc RIS nhọn.

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $M(1,0), N(5,0), P(3,2\sqrt{3})$.

Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC nhận các điểm M, N, P làm chân các đường phân giác trong ứng với các đỉnh A, B, C.

Bài 12. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $(d_1) \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $(d_2) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases}$.

Viết phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng này.

*** Tài liệu tham khảo.**

- (1) NXB Giáo dục, “Tuyển tập 10 năm Olympic 30-4”.
- (2) Nguyễn Minh Hà, “Chuyên đề nâng cao hình học 10”.
- (3) Hoàng Quốc Khánh, “Ứng dụng của cực và đối cực”.
- (4) Tài liệu trên các diễn đàn <http://mathlinks.ro>, <http://mathscope.org>, <http://math.vn>