Một thoáng về phương trình ?
NgayMaiTuoiSang(Lê Văn Chánh)
Lời mở đầu và chút tự sự

Sau khi chuyên đề này hoàn tất , tôi sẽ gác kiếm nghe theo lời thầy 2M: " Đừng quá mê toán sơ cấp !". Và cũng đáp lại câu hỏi của thầy tôi :" Em có thích toán cao cấp không?". " Sao này , em sẽ chọn toán hay tin?".Và cả lời hứa của tôi , và cả mong muốn tôi muốn làm gì đó cho cộng đồng.

Trước khi bắt đầu tôi xin lưu ý vài điều :

1. Có những ý kiến mang tính chủ quan của tác giả
2.Cách trình bày sẽ thiếu logiç .Vì có 2 người thầy cho tôi 2 lời khuyên : học lại tiếng Việt , học cách trình bày....Thật tệ hại.
3. Có thể có nhiều lỗi tính toán do bản thân tôi tính toán rất dở. Và cả sai xót về chính tả

Những điều tôi quan tâm: Bạn giải như thế nào ? Câu hỏi này hoàn toàn khác : Lời giải như thế nào ? . Với câu hỏi trên , tôi đòi hỏi : Cả một quá trình tím kiếm lời giải , chứ không phải là cái đích sau cùng (không phải là hỏi-trả lời mà là : hỏi -suy nghĩ- trả lời ").Đôi khi , nhiều vấn đề mà các bậc tiền bối đã làm , khi chúng ta tiếp nhận không biết được quá trình , vì sao họ đến với kết quả như vậy ? (Có lẽ có những điều không nên viết ra. Vì rất ngây ngô ?).Đối với tôi điều đó rất quan trọng.Bởi vì thời THPT, tôi tự hỏi : Vì sao bạn đó có thể làm bài khó đến như vậy ? Đến bây giờ , khi biết được những bài toán đó gắn liền với lịch sử và nó không nhiều lời giải thì tôi mới hiểu ra : Phải học tập và liên kết nhiều vấn đề , không đơn giản là suy nghĩ một cách rời rạc

Một số nội dung sẽ trình bày :

I.Một số phương pháp giải hệ phương trình (kèm ví dụ minh họa)

1. Phương pháp đặt ẩn phụ (cần giải quyết các câu hỏi : khi nào ? tại sao và làm thế nào đặt ẩn phụ)

2.Phương pháp hàm số

Tận dụng tính biến thiên

Khảo sát số nghiệm (có thể dùng tính lồi ,lỏm)

Dùng định lý Lagrange,Rolle

....

3.Trục căn

4.Đánh giá bất đẳng thức.

5.Lượng giác hóa

6.Qui về ptr đẳng cấp

7.Hệ đối xứng ,vòng

8. Qui về hệ đối xứng từ hệ vòng (bất đối xứng),..

II.Kinh nghiệm và cách ứng phó với các dạng phương trình khác nhau

1.PTr Đa thức

2.Pt chứa căn

3.Ptr mũ

4. Ptr tổ hợp

....

III.Một số bài toán cụ thể

IV. Kết thúc

I.Một số phương pháp giải hệ phương trình (kèm ví dụ minh họa)

II.Kinh nghiệm và cách ứng phó với các dạng phương trình khác nhau

III.Một số bài toán cụ thể

IV. Kết thúc

III.Một số bài toán cụ thể

Các bài toán :

Bài 1:[tt_vnhn] Giải phương trình :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1 \end{cases}$$

http://www.maths.vn/forums/showthread.php?t=27562

Bài 2: ['ZenBi' date='Oct 27 2009, 05:33 PM'] Giải pt : $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=4-2x$

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=48286

Bài 3: [quote name='Nguyen Ngoc Thanh' post='226858' date='Jan 22 2010, 05:16 PM']

$\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-1$

Bài toán 4:

[quote name='kummer' date='Aug 22 2005, 02:36 PM' post='32019'] Giải phuong trình:

$\sqrt{\frac{2x}{x^2-1}}+\sqrt{5x-3}=2\sqrt{3}$

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=9088 Bài toán 5:

$3x^2+11x-1=13\sqrt{2x^3+2x^2+x-1}$

Bài toán 6:

$3^{2(x^2-1)}-36.3^{x-3}+3=0$

Bài toán 7: [quote name='kummer' date='Oct 5 2005, 06:32 PM' post='37137'] Cho

$$a, b \in [1, \infty]$$

và'

$$a \ne b$$

Giải phương trình sau:

$$(2^x+x)(a^x+b^x)=2(a+b)^x+x(a+b)$$

Lấy từ :

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=7205

Bài toán 8:

[quote name='kummer' date='Sep 13 2005, 05:01 PM' post='34841']

Giải phương trình: $\frac{3x^4+9x^3+17x^2+11x+8}{3x^2+4x+5}=(x+1)\sqrt{x^2+3}$

Bài toán 9:

[quote name='kummer' date='Sep 21 2005, 07:15 PM' post='35635'] Giải phương trình :

$(a+b)^{2sin^2x}-a^{2sin^2x}-b^{2sin^2x}=a^{2cos^2x}+b^{2cos^2x}-(a+b)^{2cos^2x}$ Với

$$a, b$$

là hai số thực dương cho trước

MM [/quote] http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=6877

Giải và biện luận hệ : $\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = z + a \\ z^2 = x + a \end{cases}$

Bài 11 [quote name='Karl Friedrich Gauss' date='Dec 11 2005, 10:47 PM' post='46922'] $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[4]{15+x^3} = x^2 + 2$ [/quote]

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=9088

Bài 12

[quote name='tropicalgarden' date='Nov 10 2005, 10:30 AM' post='41554'] Giải hệ : $\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0 \\ y + z^2 + x^4 = 0 \\ z + x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$ [/quote]

Bài 15: [QUOTE=xyzt;151904]
gpt : $\sqrt[3]{2x+1} + 1 = x^3 + 3x^2 + 2x$ [/QUOTE]
http://www.maths.vn/forums/showthread.php?p=152849

[quote name='ngtl' date='Apr 5 2007, 05:38 PM' post='153135'] Gi?i phuong trình: $x^2 - 3x + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 0$. [/quote]

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=30294

[quote name='megastar' date='Aug 23 2009, 09:30 PM' post='211582'] Gi?i phuong trình: $x^5 + \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - 2008 = 0$ [/quote]

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=46520

Bài này, tôi đã được Việt giới thiệu .Nhưng thật khó, không thể tưởng tượng sẽ giải nó nhu thế nào ?

$t + \frac{i\sqrt{2}}{x} = \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}$

$\Longrightarrow t^2 + 2\frac{i\sqrt{2}t}{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}it}{1-t^2}$

$(\frac{2\sqrt{2}it}{1-t^2})^5 + \frac{2t}{1+t^2} = 2008$

[quote name='nhatminh' date='Nov 13 2007, 07:15 PM' post='172294'] Gi?i BPT : $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > x - \frac{1}{x}$ [/quote]

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=35797

[quote name='trịnh tình' date='Oct 31 2009, 05:52 PM' post='219236'] Gi?i phuong trình $32x^5 - 40x^3 + 10x - \sqrt{3} = 0$ [/quote] http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=48

[QUOTE=phuongkhtn;118166]$\begin{cases} x^2(y-z) = -\frac{5}{3} \\ y^2(z-x) = 3 \\ z^2(x-y) = \frac{1}{3} \end{cases}$ [/QUOTE]

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=35214

Cách 1: Hệ phương trình mang đậm màu sắc đẳng cấp . Do đó , chúng ta thử theo hướng này .

Rỏ ràng nghiệm ptr thỏa điều kiện $xyz \neq 0$ Đặt $\begin{cases} y = tx \\ z = vx \end{cases}$ Khi đó hệ trở thành : $\begin{cases} x^3(t-v) = -\frac{5}{3}(1) \\ x^3t^2(v-1) = 3(2) \\ x^3v^2(1-t) = \frac{1}{3}(3) \end{cases}$ Chia pt thứ 2,3 cho 1 ta được hệ sau:

$\begin{cases} \frac{t^2(v-1)}{(t-v)} = -\frac{9}{5} \\ \frac{v^2(1-t)}{t-v} = -\frac{1}{5} \end{cases}$
Cộng hai ptr ta có : Biến đổi hệ thành :
$\frac{t^2(v-1)+v^2(t-1)}{(t-v)} = -2 \Leftrightarrow vt - t - v = -2 \Leftrightarrow v = \frac{t-2}{t-1}$
$\begin{cases} \frac{v-1}{t-v} = -\frac{9}{5t^2} \\ \frac{1-t}{t-v} = -\frac{1}{5v^2} \end{cases}$ Cộng hai ptr ta có : $VT = -1 = VP = -\frac{9}{5t^2} - \frac{1}{5v^2}$

Nên ta có hệ : $\begin{cases} v = \frac{t-2}{t-1} \\ \frac{9}{t^2} + \frac{1}{v^2} = 5 \end{cases}$

Chuyển về ptr
$\frac{9}{t^2} + (\frac{t-1}{t-2})^2 = 5 \Leftrightarrow -\frac{2(t-3)(2t-3)(t^2-2)}{t^2(t-2)^2} = 0$

Từ những giá trị t, suy ra v. Từ mỗi bộ t,v ta sẽ tìm được các nghiệm của hệ .

Ẩn chứa bên trong phương pháp này :Một kỉ thuật biến đổi để khử (mẫu). Chúng ta làm mất đi tính đối xứng,...Phá vở điều này để "được điều khác ".

cách 2: Ta thấy cái "vòng" đặc biệt :
$(y - z) + (z - x) + (x - y) = 0$
$(xy - xz) + (zy - xy) + (xz - yz) = 0$
$(x^2y^2 - x^2z^2) + (z^2y^2 - x^2y^2) + (x^2z^2 - y^2z^2) = 0$

Vì sao tôi quan tâm đến những tổng đặc biệt trên ? Sở dĩ,từ hệ trên chúng ta có thể tạo ra những tổng đó .
Nhân hai vế (1) cho $(y - z)$ thì ta sẽ có phần tử $(x^2y^2 - x^2z^2)$. Cứ tương tự như vậy : $-\frac{5(y+z)}{3} + 3(x + z) + \frac{x+y}{3} = 0$ Hay $y = \frac{2z+5x}{2}$. Từ điều này : $y - z = \frac{5x}{2}$. Ta tính được giá trị của x. Thay vào hệ , ta sẽ đơn giản hóa , bằng việc giải hệ pt hai ẩn .

Cơ bản ta có thể giải hệ
$\begin{cases} x^2(y-z) = a \\ y^2(z-x) = b \\ z^2(x-y) = c \end{cases}$ Thông qua ptr bậc 3. Cơ bản ta có thể giải hệ
$\begin{cases} x^3(y-z) = a \\ y^3(z-x) = b \\ z^3(x-y) = c \end{cases}$ Có thể giải được không ? .

http://www.maths.vn/forums/showthread.php?t=21391

[quote name='hieu502' date='Oct 5 2007, 07:27 PM' post='168661'] gi?i pt:
$2.11^x + 18^x = 4^x.(2^x + 3^x + 5^x)$
gỉp mình v?i. thank ếc b?n nhìu [/quote] http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=34
Những ngày ấy, tôi biết đến Việt , và cũng những bài toán pt mũ thế này .

Đối với những bài toán này , nghiệm của nó , chúng ta có thể dễ dàng biết được . Điều chúng ta cần làm là cm đó là tập nghiệm của phương trình . Có thể thông qua phương pháp hàm số, định lý Lagrange,BĐT,... Điểm nổi trội hơn là phương pháp hàm số. Tuy nhiên , chúng ta phải khéo léo và chọn lựa hàm số thích hợp .

Đối với bài này, chúng ta thường dùng số nghiệm của đạo hàm để kết luận số nghiệm của hàm .Nên thông thường tính lồi ,lỏm của hàm được dùng tới.

[quote name='vo thanh van' date='Apr 14 2007, 10:00 PM' post='154248'] Gi?i phuong trình sau:

$2^{x+1} = x+1+4^x$ [/quote] http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=30582
$(2^x)^2 - 2.2^x + x + 1 = 0$

Xét $h(x) = 4^x - 2.2^x + x + 1 = 0$ Khi đó : $h'(x) = 4^x \ln 4 - 2^{x+1} \ln 2 + 1 > 4^x \ln 2 - 2^{x+1} \ln 2 + \ln 2 = (2^x - 1)^2 \ln 2 \geq 0$ Mặt khác : $f(0) = 0$ Do đó pt có nghiệm duy nhất $x = 0$

$(2^x - 1)^2 + x = 0$ Ta thấy ngay điều kiện :$x \leq 0$
TH:$x = 0$ TH:$x < 0$: Đặt :$t = 1 - 2^x \in (0, 1)$ PT trở thành : $t^2 + \log_2 (1 - t) = 0$
Xét $f(t) = t^2 + \log_2 (1 - t), 0 < t < 1$
$f'(t) = 2t - \frac{1}{(1-t)\ln 2}$ Ta thấy : $t(1 - t) \leq \frac{1}{4}$. Và$2 \ln 2 < 4$ Nên $f'(t) < 0, \forall t \in (0, 1)$
Nên $f(t) > \lim\limits_{y \to 0} f(y) = 0, t \in (0, 1)$

Ẩn phía sau cách đặt ẩn phụ này : $t = g(x)$. Với g là hàm đơn điệu tặng Ptr trở thành $f \circ g(x) = 0$. Với f là hàm đơn điệu giảm . Khi đó : ptr không quá một nghiệm .

[QUOTE=tu.thach';117848]Khơng gi?i theo lu?ng gíc hĩa nḱ M
$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x - b)^2 + (y - a)^2$[/QUOTE]
http://www.maths.vn/forums/showthread.php?t=21391
Bài toán này là một phần bài báo về phương pháp lượng giác hóa của thầy Lê Quốc Hán (TH và TT)

Tôi cũng đưa ra khoảng 6 lới giải cho bài toán này .

Nếu xem ba đại trên bằng R^2. Trong đó có đủ loại : - Giải pt bậc 4,phương pháp hình học ,...

TH: $R = 0$ thì biện luận bài toán trở nên đơn giản TH: Ngược lại thì các điểm $A(x, a), B(b, y), C(x - b, y - a)$ nằm trên đường tròn tâm $O(0, 0)$

Đồng thời
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO}$$

Bài 1:[$tt_v nhn$] Giải phương trình :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1 \end{cases}$$

http://www.maths.vn/forums/showthread.php?t=27562
[quote= ngaymaituoisang]
Giải : Ta dùng phép đổi biến sau. $x = \cos t$. Khi đó :Sử dụng kết quả : $\cos nt = P_n(\cos t)$,Với P là một đa thức
Tìm P_2, P_4
PT:$8\cos t\cos 2t\cos 4t = 1$
. Từ pt này , chúng ta có thể rút ra điều kiện :

$$\sin x \neq 0(1)$$

.
Khi đó nhân hai vế pt trên và áp dụng công thức :

$$2\sin x\cos x = \sin 2x$$

, ta có : $\sin 8t = \sin t$

$*8t = t + 2k\pi$
$*8t = \pi - t + 2k\pi, k \in Z$

$*t = \frac{2k\pi}{7}$

$*t = \frac{(2k+1)\pi}{9}\pi + 2k\pi, k \in Z$
Tìm nghiệm t thỏa điều kiện (*).Khi đó : chúng ta có các nghiệm :

$$*x = \cos\frac{2\pi}{7}$$

$$*x = \cos\frac{4\pi}{7}$$

$$*x = \cos\frac{6\pi}{7}$$

$$*x = \cos\frac{\pi}{9}$$

$$*x = \cos\frac{3\pi}{9}$$

$$*x = \cos\frac{5\pi}{9}$$

$$*x = \cos\frac{7\pi}{9}$$

Từ pt này ta tìm được 7 nghiệm
** Nhận xét :
- Nên điều kiện ban đầu là không có ý nghĩa .
- Thử giải một pt khác :

$$f(x) = 2$$

, với:

$$f(x) = 8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1)$$

.Điều này , sẽ gây ra một khó khăn. Chính điều đó, khiến chúng ta sẽ nghĩ sao

$$f(x) = 1$$

.Đẹp thế , đặc biệt thế .Cũng đồng nghĩa , đó là một phương trình 'được đặt từ lý thuyết'. Vì thực tế chắc không đến nổi đẹp thế . và điều tôi muốn lột bỏ 'hãy tìm một gì đó có thề ứng dụng, đừng nên tìm một điều gì quá đẹp '.
Từ câu hỏi trên , chúng ta giảm nhẹ bởi câu hỏi : "Tìm nghiệm phương trình đa thức với sai số bé cho trước ' .Việc giảm nhẹ này không đem lại nghiệm 'đẹp và chính xác ' .Tuy nhiên nó dúng được. Ví dụ : chúng ta thử xem một ví dụ về 'đẹp mà không dùng được'.

$$x^16 = \sqrt{3}(x^2 + \sqrt{7})^4, x > 0$$

Giải

$$x^4 - \sqrt[8]{3}x^2 - \sqrt[8]{3}\sqrt{7} = 0$$

$$\Delta = \sqrt[4]{3} + 4\sqrt[8]{3}\sqrt{7} > 0$$

$$x^2 = \frac{\sqrt[8]{3} + \sqrt{\sqrt[4]{3} + 4\sqrt[8]{3}\sqrt{7}}}{2}$$

Nên nghiệm

$$x > 0$$

là :

$$*x = \sqrt{\frac{\sqrt[8]{3} + \sqrt{\sqrt[4]{3} + 4\sqrt[8]{3}\sqrt{7}}}{2}}$$

.
Nhìn có vẻ đẹp 'mắt ' thật , nhưng chúng ta không thế biết giá trị cụ thể của nó là bao nhiêu ?. Nên nghiệm đó không thể đem vào ứng dụng. Câu hỏi (1) sẽ bàn ở phần phụ lục.

Bài 2: ['ZenBi' date='Oct 27 2009, 05:33 PM'] Giải pt : $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=4-2x$

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=48286

*Lời giải : Phỏng theo bạn ['inhtoan' date='Oct 27 2009, 07:24 PM']
Điều kiện :$x\geq 1$ $VT(2)\geq\sqrt{x+3}\geq 2, VP(2)=4-2x\leq 2$ Do đó :

$$VT(2)=VP(2)=2$$

.Nên

$$x=2$$

* Bình luận : Chắc cuộc đời không đến nỗi cho ta một miếng mồi dễ nuốt thế !.
Thử làm khó mình chút: $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=-2x$
* Giải :
(2)

$$\Longleftrightarrow$$

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=\sqrt{x+3}-2x$
Việc tạo ra pt mới này cũng đảm bảo nó cũng có một nghiệm là 1 và đk:

$$x\geq 1$$

.
Khi đó, chúng ta 'lôi' nhân tử

$$(x-1)$$

để khử bớt .

$\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=\frac{x+3-4x^2}{\sqrt{x+3}+2x}=-\frac{(x-1)(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}$
Khi đó :

$$VT\geq 0, VP\leq 0$$

. Tiếp tục , 'làm cho nó khó nuốt hơn một chút'
$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=2x$

$1+\sqrt{x+3}+2\sqrt{((x^2-3x+5)}=2x$
*Giải : Tiếp diễn quá trình trên và đk cũng như cũ .Khi đó :
pt sẽ dẫn đến : $\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)}=\frac{(x-1)(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$*x=1$$

$$or: x>1$$

$1+2\sqrt{x^2-3x+5}=\frac{\sqrt{x-1}(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}$
. Ta có :

$$VT=1+2\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4})}\geq 1+\sqrt{2}(x-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{11}{4}}>1+\sqrt{2}x>x+1,$$

$$VP \leq \frac{\sqrt{x-1}(4x+3)}{\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}} = \frac{4x+3}{5} < x+1 < VT$$

Bài 3: [quote name='Nguyen Ngoc Thanh' post='226858' date='Jan 22 2010, 05:16 PM']

$\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-1$
Phương trình có hai nghiệm : $x=-1,x=2$

Giải : Ứng xử với phương trình chứa căn của các đa thức .Chúng ta có thể giải quyết theo những hướng sau:
1- . Khử căn thức (bình phương , đặt ẩn phụ)
2-. Giải thông qua phương pháp hàm số
3-.Sử dụng lượng liên hợp Bàn về mạnh yếu của từng hướng giải quyết : 1) Đôi lúc sẽ giản dị : bình phương chuyển về phương trình đa thức và sau đó phân tích thành nhân tử (công đoạn này sử dụng phần mềm hổ trợ). Lời giải nhiều lúc rất thô , không đem lại điều gì đẹp .Tuy nhiên , ta không bận tâm đến nghiệm là gì và không cần nhiều đến sự đặc biệt . Trong trường hợp khó khăn thì điều này sẽ bị bế tắc .Tuy nhiên theo tôi , nên đi theo con đường này trong một số trường hợp , khi chưa thấy hoặc không thề thấy nghiệm đặc biệt của phương trình.
2) Dùng được trong trường hợp biết tất cả các nghiệm hoặc một nét đặc biệt của hàm số.
3) Cũng sử dụng khi đã biết được vài nghiệm đặc biệt .Việc làm này có ý nghĩa : lấy phần nhân tử ra ...

Ở phương trình này : Chúng ta nhanh chóng nhận ra :
- Không co điểm đặc biệt để đặt ẩn phụ
- Ngay cả phương pháp hàm số cũng dùng không được (sẽ chỉ ra ở bên dưới)
- Không nên bình phương vì sẽ dẫn đến phương trình bậc cao

$$>8$$

.

Tuy nhiên ở đây, tôi sẽ cố gắng thực hiện các hướng giải đó . Như phân tích ở trên thì đã loại được một số hướng .Chúng' ta sẽ giải quyết bài toán trong hướng thuận lới .Sau đó sẽ thực hiện các hướng khác để thấy được những khó khăn ẩn chứa bên trong mỗi hướng .

´

Hướnđ được chọn để giải quyết bài toán là "nhân lượng liên hợp"

Khi đó : chúng ta cần bổ sung các đại lượng :

$$P(x),T(x)$$

sao cho : khi khử được căn thì xuất hiện nhân tử (chứa nghiệm). Như ban đầu , ta nhận xét

$$x=-1,x=2$$

là hai nghiệm của phương trình .
$[\sqrt{3-x}-P(x)]+[\sqrt{2+x}-T(x)]=x^3+x^2-4x-1-[P(x)+T(x)]$
Chúng ta sẽ chon lựa thế nào ?

Chúng ta thấy : $\begin{cases} \sqrt{3-x} = |x-1| \\ \sqrt{2+x} = |x| \forall x \in D_0 \end{cases}$

Khi chúng ta chọn hàm trị tuyệt sẽ gây bất lợi , khi cần phân tích thành nhân tử .Do đó ta sẽ chọn P,T sao cho dễ phân tích thành nhân tử .Từ ý này, chúng ta sẽ chon P,T là các đa thức (nhưng có kèm một số điều kiện) Việc chọn

$$P(x), T(x)$$

phải thỏa : Xét

$$D_0$$

là tập nghiệm của ptr

$$\begin{cases} P(x) = \sqrt{3-x}(= f(x)) \\ T(x) = \sqrt{2+x}(= g(x)) \forall x \in D_0 \end{cases}$$

Rỏ ràng không hệ chọn các hằng số. Khi đó ta thấy , nên chọn một cách đơn giản P,T là các đa thức . Vậy chon đa thức bậc bao nhiêu là vừa ?. Ta thấy

$$D_0$$

có hai phần tử .Khi đó ta chọn P,T lần lượt là đa thức nội suy Lagrange của f,g với hai nút nội suy là

$$-1, 2$$

. Khi đó chọn được hai hàm bâc nhất P,Q thỏa các điều kiện sau:

$$\begin{cases} P(-1) = f(-1) = 2 \\ P(2) = f(2) = 1 \\ T(-1) = g(-1) = 1 \\ T(2) = g(2) = 2 \end{cases}$$

.Từ đó chúng ta thu được kết quả sau:

$\begin{cases} P(x) = \frac{-x+5}{3} \\ T(x) = \frac{x+4}{3} \end{cases}$

Khi đó : $[\sqrt{3-x} - P(x)] + [\sqrt{2+x} - T(x)] = x^3 + x^2 - 4x - 1 - [P(x) + T(x)]$

$\Leftrightarrow \frac{9(3-x)-9P^2(x)}{3\sqrt{3-x}+3P(x)} + \frac{9(2+x)-9T^2(x)}{3\sqrt{2+x}+3T(x)} = 3[x^3 + x^2 - 4x - 1] - 3[P(x) + (x)]$

$\Leftrightarrow \frac{-(x+1)(x-2))}{3\sqrt{3-x}+5-x} + \frac{-(x+1)(x-2)}{3\sqrt{2+x}+x+4} = 3(x-2)(x+1)(x+2)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$-\frac{1}{3\sqrt{3-x}+5-x} - \frac{1}{3\sqrt{2+x}+x+4} = 3(x+2)(*)$ Với điều kiện :: $-2 \le x \le 3 \Rightarrow VT(*) < 0, VP(*) \ge 0$

Nên pt ban đầu chỉ có hai nghiệm

$$-1, 2$$

Như ban đầu , chúng ta sẽ đi hết các hướng đề thấy được khó khăn:

1. Đặt ẩn phụ:Ta thấy điều nên làm nhất là cần đến hai ẩn phụ (1 ẩn phụ thì

không giúp ta thoát khòi 'căn')

$$\begin{cases} u = \sqrt{3-x} \\ v = \sqrt{2+x} \end{cases}$$

Khi đó : cần chọn các hằng số sao cho:

$$x^3 + x^2 - 4x - 1 = h(u,v)$$

(nhằm mục đích đưa về hệ pt hai ẩn

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ u + v = h(u,v) \end{cases}$$

.Điều chúng ta luôn mong đợi là sự đơn giản hóa , do đó xét

$$h(.,.)$$

là đa thức hai biến
So sánh về bậc chúng ta có :

$$h(u,v) = a.u^4v^2 + bu^2v^4 + c(uv)^2 + d = (a-b)x^3 - (4a+b+c)x^2 + (c+8b-3a)x + d + 18a + 12b + 6c$$

Thực hiện đồng nhất thức, ta có điều kiện :

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 4a + b + c = -1 \\ -3a + 8b + c = -4 \\ 18a + 12b + 6c + d = -1 \end{cases}$$

Điều này đã thất bại từ bước đầu. Vì từ 3 ptr đầu suy ra :

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 7(a-b) = 3 \end{cases}$$

Nên dừng ở đây.
2. Bình phương hai lần .
Điều kiện :

$$\begin{cases} -2 \le x \le 3 \\ x^3 + x^2 - 4x - 1 \ge 0 \end{cases}$$

Khi đó : pt (3) tương đương

$$(x^3 + x^2 - 4x - 1)^2 = 5 + 2\sqrt{-x^2 + x + 6}$$

Suy ra pt hệ quả://

$$[(x^3 + x^2 - 4x - 1)^2 - 5]^2 = 4(-x^2 + x + 6)$$

Thu được pt bậc cao (12).
Phân tích thành nhân tử , ta có :

$$(x-2)(x+1)(x^{10}+5x^9-3x^8-4x^7-10x^6+120x^5+28x^4-140x^3+8x^2+32x+4)=0$$

Điều có lẽ không đơn giản là cm pt :

$$x^{10}+5x^9-3x^8-4x^7-10x^6+120x^5+28x^4-140x^3+8x^2+32x+4=0$$

Vô nghiệm trên miền điều kiện.

Có một điều chúng ta nên học : Chúng ta nên làm thử để thấy được những khó khăn và tìm hiểu khó khăn ở chổ nào ? Có cách nào để khắc phục khó khăn đó.

[quote name='vanchanh123' date='Jan 26 2010, 12:33 PM' post='227318']

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}=x^3+x^2-4x-4+|x|+|x-1|$$

[/quote] http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=50175

Như ptr trên nội suy

$$\sqrt{3-x},\sqrt{2+x}$$

bởi

$$|x-1|,|x|$$

thì gây rắc rối , không thể phân tích thành nhân tử được . Việc tạo ra phương trình này có trị tuyệt với mong muốn tạo nên khó khăn .Tuy nhiên , điều đó càng khiến bài toán trở nên đơn giản hơn

$$[\sqrt{3-x}-|x-1|]+[\sqrt{2+x}-|x|]=x^3+x^2-4x-4$$

Điều kiện $-2\le x\le 3$ PTr $\Longleftrightarrow \frac{-(x^2-x-2)}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{-(x^2-x-2)}{\sqrt{2+x}+|x|}=(x+2)(x^2-x-2)$
$\Longleftrightarrow (x^2-x-2)[\frac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+|x|}+(x+2)]=0$
$\Longleftrightarrow x^2-x-2=0$

Bài tương tự :

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{6-3x}=x^3+x^2-5x+2$$

Bài toán 4:

[quote name='kummer' date='Aug 22 2005, 02:36 PM' post='32019'] Giải phuong trình:

$\sqrt{\frac{2x}{x^2-1}}+\sqrt{5x-3}=2\sqrt{3}$

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=9088

Điều kiện :

$$x>1$$

Theo gợi ý : chúng ta sẽ dùng pp đánh giá .

$$VT \geq 2\sqrt[4]{\frac{2x(5x-3)}{x^2-1}}$$

Ta cần chọn một hắng số lớn nhất :

$$\alpha : \frac{2x(5x-3)}{x^2-1} \geq \alpha \forall x>1$$

Hay $(10-\alpha)x^2-6x+\alpha \geq 0$ Khi đó :

$$1 \leq \alpha \leq 9$$

. Nên chọn $\alpha=9$. Khi đó $VT \geq 2\sqrt{3}$

Và dấu '=' không xảy ra do hệ :

$\begin{cases} x>1 \\ x^2-6x+9=0 \\ \frac{2x}{x^2-1}=5x-3 \end{cases}$

Nhận xét : Trước ki đi đến lời giải , tôi đã tìm đến hai hướng

1. Phản chứng

2.Đánh giá "mạnh "

Bàn đến 2 trước. pt ban đầu $\Longleftrightarrow \frac{2x}{x^2-1}+5x-3+2\sqrt{\frac{2x(5x-3)}{x^2-1}}=12$ Đánh giá mạnh chút .

$\frac{2x}{x^2-1}+5x-3>12$.

Quả thật "đánh mạnh " quá, nhưng ý tưởng ngốc nghếch đó đã thất bại.

Do đó cần đánh giá :$\frac{2x(5x-3)}{x^2-1} \leq \alpha$. Cần α lớn nhất , để bổ sung vào bù đắp . Nhưng chính điều đó , khiến mình thấy :mình càng ngốc hơn. Khi biết :$\frac{2x(5x-3)}{x^2-1} \leq 9$, thì ta có thể đánh giá đơn giản hơn

Quay lại , hướng 1: Hướng này cũng khá thủ công , nhưng chính điều đó khiến tôi nghĩ đến việc viết một chương trình để chứng minh pt vô nghiệm.

Và từ đó , tôi sẽ bàn đến một bài toán khá tổng quát như sau : $f(x)+g(x)=a=const$. Trong đó f và g là các hàm đơn điệu.

TH_1:f và g cùng tính đơn điệu

TH_2 : f và g không cùng tính đơn điệu. Bài toán trên là một ví dụ cho trường hợp này.Không mất tổng quát có thể giả sử $a=0$,f đồng biến,g nghịch biến.

Ở trường hợp 1: Pt không quá 1 nghiệm Chúng ta sẽ bàn về một chương trình để chứng tỏ pt vô nghiệm hoặc đưa ra nghiệm xấp xỉ.
Ở trường hợp 2 : ta xét trong một khoảng cô lập nghiệm.

Trước hết ta tìm khoảng $(a, b), a < b$ chứa nghiệm (vừa đủ nhỏ) Và tiến hành xây dựng dãy x_n,y_n

Sao cho: $x_0 = a, y_0 = b$.

Khi $x_n < y_n$. Ta có :$x_n < x < y_n$,$f(x) = -g(x) \geq -g(x_n) \Rightarrow x > f^{-1}(-g(x_n))$.
Chọn $x_{n+1} = max f^{-1}(-g(x_n)), x_n$
Tương tự :$y_{n+1} = min g^{-1}(-f(x_n)), y_n$
Nếu $x_{n+1} = y_{n+1}$ thì thu được nghiệm
Nếu $x_{n+1} > y_{n+1}$ thì ptr vô nghiệm
Ngược lại thì tiếp tục quá trình lặp
Rỏ ràng x_n không giản ,y_n không tăng. Nên chúng ta có thể hi vọng kết quả cho ra như ý muốn. Nhưng thật sự đáng tiếc, độ chênh giữa các bước quá bé , có thể tạo thành dãy dừng.

Bài toán 5:
$3x^2 + 11x - 1 = 13\sqrt{2x^3 + 2x^2 + x - 1}$

Bài toán 6:

$3^{2(x^2-1)} - 36.3^{x-3} + 3 = 0$

Pt tuong duong : $3^{2x^2-2} - 4.3^{x-1} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x^2-2} - 3^{x-1} = 3^x - 3$.T? pt ǹy suy ra: $(2x^2 - x - 1)(x - 1) \geq 0(1)$ (do so sánh 2 vế với 0). Kèm thêm điều kiện :$4.3^{x-1} > 3 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}(2)$ (1)+(2) ,suy ra:$x \geq 1$ Dùng LaGrange cho ȟm $f(x) = 3^x$ ǐ chinh . Ňu :$x > 1$: t?n t?i c,d sao cho: $x < d < 2x^2 - 1, 1 < c < x : \frac{(2x^2-x-1)}{3} 3^d \ln 3 = (x-1)3^c \ln 3$.Ï?u ǹy khong t?n t?i , vì $d > c > 1, \frac{(2x^2-x-1)}{3} > x - 1 \forall x > 1$ Do vậy , pt chỉ co nghiệm $x = 1$

Bài toán 7: [quote name='kummer' date='Oct 5 2005, 06:32 PM' post='37137'] Cho

$$a, b \in [1, \infty]$$

và'

$$a \neq b$$

Giải phương trình sau:

$$(2^x + x)(a^x + b^x) = 2(a+b)^x + x(a+b)$$

Lấy từ :
http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=7205
Pt $\Longleftrightarrow$

$$(2a)^x + (2b)^x - 2(a+b)^x = x(a+b-a^x-b^x)$$

Ta thấy :(với $a, b > 1$) $\frac{a^x+b^x}{2} - (\frac{a+b}{2})^x = \left[\begin{array}{l} \geq 0, x \in [1, \infty) \cup (-\infty, 0] \\ \leq 0, x \in [0, 1] \end{array}\right.$

$x(a+b-a^x-b^x) = \left[\begin{array}{l} \leq 0, x \in [1, \infty) \cup (-\infty, 0] \\ \geq 0, x \in [0, 1] \end{array}\right.$ Nên ptr tương đương : $x(a+b-a^x-b^x) = 0 = (2a)^x + (2b)^x - 2(a+b)^x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

* Nhận xét : Bài này dùng phương pháp đánh giá , tuy nhiên bên trong ẩn chứa một ý rất hay. Cần giải ptr $f(x) = 0, x \in D$. Ta chuyền thành dạng tương đương.$g(x) = h(x)$ $\left[\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \geq h(x), x \in D_1 \\ g(x) < 0 < h(x), x \in D_2 \\ D = D_1 \cup D_2 \\ D_1 \cap D_2 = \emptyset \end{array}\right.$ Khi đó : ta qui về hệ phương trình đơn giản
$\begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in D_1 \end{cases}$

Ta xét một vì dụ minh họa: Giải phương trình:

$$\sqrt{3^x + 4^x} - 5^{\frac{x}{2}} = (x^4 + 5x + 2009\sqrt{x^2+4})(5^x - 25)$$

Bài toán 8:

[quote name='kummer' date='Sep 13 2005, 05:01 PM' post='34841']
Giải phương trình: $\frac{3x^4+9x^3+17x^2+11x+8}{3x^2+4x+5} = (x+1)\sqrt{x^2+3}$
Bài này tôi đã post lên 1 lần nhưng không có ai cho lời giải ...Hy vọng lần này sẽ có... [/quote]

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=6699

Như tôi khuyên ở trên , đối với phương trình chứa căn , thì chúng ta thữ chuyển về phương trình đa thức.(Tôi thấy : nên thử những thứ mình biết không có hại .Lời khuyên này không dùng cho các bạn thi HSG,thi đại học)
Nhưng đó ,cũng là điều khiến nó trở nên đơn giản hoặc phức tạp tùy thuộc vào suy nghĩ mỗi người .Vì ngày nay , nhiều thứ chúng ta nên nhờ cậy đến máy tính (khi biết nó làm việc tốt hơn chúng ta)

Cũng là những từ quen thuộc đối với phương trình căn thức :
"sqr-Expand-Factor"

Pt ban đầu tương đương :

$$3x^4+9x^3+17x^2+11x+8 = (3x^2+4x+5)(x+1)\sqrt{x^2+3}$$

Điều kiện : $x > -1$ do : $\begin{cases} 3x^4+9x^3+17x^2+11x+8 = 3(x^2+\frac{3}{2}x)^2+\frac{41}{4}x^2+17x+8 > 0 \\ 3x^2+4x+5 > 0 \\ \sqrt{x^2+3} > 0 \end{cases}$
hay :

$$(3x^4+9x^3+17x^2+11x+8)^2 - (3x^2+4x+5)^2(x+1)^2(x^2+3) = 0$$

$$(x-1)(3x^2+8x+1)(4x^4+11x^3+21x^2+17x+11) = 0$$

Do $4x^4+11x^3+21x^2+17x+11 = (2x^2-\frac{11}{4})^2+\frac{215}{16}x^2+17x+11 > 0$
Nên : pt $\iff$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 3x^2+8x+1 = 0 \end{array}\right. \\ \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$\iff$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{-4+\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

* Nhận xét : Từ hướng đi này chúng ta sẽ nhận ra nhân tử :$3x^2+8x+1$, xuất phát từ :$3x^2+8x+1 = 2(3x^2+4x+5)-3(x^2+3)$ Khi đó , chúng ta nghĩ : Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3x^2+4x+5} \\ b = \sqrt{x^2+3} \end{cases}$ Với hi vọng sẽ tìm được nhân tử $2a^2-3b^2$ Khi phân tích.

Tuy nhiên khi đó , chúng ta thấy một điều : $x+1$ không thể là một tổ hợp của a^2, b^2dưới dạng một đa thức đẳng cấp . Do đó , chúng ta sẽ chọn một trong hai việc :

1. Chấp nhận $x+1$ là tổ hợp của a, b với một hằng số
2. Không chấp nhận , đòi hỏi một sự đẳng cấp .

Chấp nhận 1: Thì đòi hỏi thêm biểu thức $3x^4+9x^3+17x^2+11x+8$ phải biểu diễn được dưới dạng một đa thức theo a,b . (Việc biểu diễn theo dạng đa thức thì như đã nói ở trên : chúng ta luôn có nhu cầu đơn giản hóa)

Từ những nhận xét trên :

$$\begin{cases} x+1 = d_1a^2+d_2b^2+d_3 \\ 3x^4+9x^3+17x^2+11x+8 = c_1a^4+c_2b^4+c_3a^2b^2+c_4a^2+c_5b^2+c_6 \end{cases}$$

Việc tìm ra hệ số bằng phương pháp đồng nhất, hệ số bất định ,...

$x+1 = \frac{a^2-3b^2+8}{4}$

Chọn $c_i, i = \overline{1,6}$ thỏa:

$$\begin{cases} 9c_1+c_2+3c_3 = 3 \\ 24c_1+4c_3 = 9 \\ 46c_1+6c_2+14c_3+3c_4+c_5 = 17 \\ 40c_1+12c_3+4c_4 = 11 \\ 25c_1+9c_2+15c_3+5c_4+3c_5+c_6 = 8 \end{cases}$$

Ở đây gồm 5 phương trình 6 ẩn . Để tiện , chọn trước $c_1 = 0$ Khi đó ta có : $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\frac{15}{4} \\ c_3 = \frac{9}{4} \\ c_4 = -4 \\ c_5 = 20 \\ c_6 = -32 \end{cases}$

Khi đó ptr trở thành : $-\frac{15}{4}b^4+\frac{9}{4}a^2b^2-4a^2+20b^2-32 = \frac{a^2-3b^2+8}{4}a^2b$

Khi thực hiện đến đây ,chúng ta thấy mục tiêu tìm ra nhân tử $2a^2-3b^2$. Chúng ta sẽ dừng ở đây !!!...

Chấp nhận 2: Ta thêm một ẩn phụ $c = x+1$

Khi đó ta cần phân tích :$3x^4+9x^3+17x^2+11x+8$ là một đa thức theo a,b,c

$3x^4+9x^3+17x^2+11x+8 = c_1a^4+c_2b^4+c_3a^2b^2+c_4a^2+c_5b^2+c_6c^4+c_7a^2c^2+c_8b^2c^2$

Khi đó :

$c_1a^4+c_2b^4+c_3a^2b^2+c_4a^2+c_5b^2+c_6c^4+c_7a^2c^2+c_8b^2c^2 = a^2bc$ Rỏ ràng cũng không thể phân tích ra nhân tử $2a^2-3b^2$

Nhưng sau những khó khăn đề tìm kiếm sự đơn giản hóa không được ,ta thấy đẳng thức sau : $2(x+1)^2 = (3x^2+4x+5)-(x^2+3)$ Khi đó , từ việc xuất phát từ ý muốn đơn giản hóa chuyển $x+1 = f(a,b)$, trong đó P là đa thức đã không thực hiện .Tuy nhiên đẳng thức trên khó nhìn hơn đã giúp chúng ta :$x+1 = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}$ (Chú ý :như trên ,ta có điều kiện $x+1>0$)

Chắc có lẽ nhìn ở góc độ quá đơn giản không được. Và tôi nhận ra việc chọn cách đặt ẩn phụ như trên sẽ gây ra một điều bất tiện : $f(a,b) = a^2b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}$. Cho dù hàm f có đơn giản đi nữa !thì cách biểu diễn $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}$ đã tạo nên sự phức tạp.

Khi thay đổi một cách nhìn khác :

Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = x^2+3 \end{cases}$ thì VP phương trình là một đa thức theo a, b, $VP = ab(2a^2+b^2)$

Bây giờ Chúng ta cần tìm $f(a,b) = ab(2a^2+b^2)$.

Biểu diễn $3x^4+9x^3+17x^2+11x+8$ phải biểu diễn được dưới dạng f(a,b). Có thể đơn giản hóa là một đa thức không ?

$3x^4+9x^3+17x^2+11x+8 = c_1a^4+c_2b^4+c_3a^2b^2$ Ta nhận thấy : khi đồng nhất sẽ có 4 điều kiện , với 3 tham số .Do đó sẽ khắc nghiệt ! Bởi lẽ ,đặc biệt lắm mới có được c_1, c_2, c_3 như vậy . Từ đó , ta có hệ sau :

$$\begin{cases} c_1+c_3+c_2 = 3 \\ 4c_1+2c_3 = 9 \\ 6c_1+6c_2+4c_3 = 17 \\ 4c_1+6c_3 = 11 \\ c_1+9c_2+3c_3 = 8 \end{cases}$$

Nhưng quả thật may mắn ,hệ này có nghiệm

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = c_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nên ta có một phương trình đẳng cấp :$2a^4+\frac{b^4}{2}+\frac{a^2b^2}{2} = ab(2a^2+b^2)$

Đồng thời nhân tử $3x^2+8x+1$ chính là : $4a^2-b^2$. Từ nhận định này , giúp ta định hướng phân tích nhân tử. Ta có thể chuyển về pt bậc 4 để phân tích .Tuy nhiên ở đây , pt này rất đặc biệt :

$(2a^2+b^2)^2-2ab(2a^2+b^2)-3a^2b^2 = 0 \Longleftrightarrow (2a^2+ab+b^2)(2a^2-3ab+b^2) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} b = a \\ b = 2a \end{array}\right.$$

Quả thật rất khổ sở

Bài toán 9:

[quote name='kummer' date='Sep 21 2005, 07:15 PM' post='35635'] Giải phương trình :
$(a+b)^{2sin^2x} - a^{2sin^2x} - b^{2sin^2x} = a^{2cos^2x} + b^{2cos^2x} - (a+b)^{2cos^2x}$ Với

$$a, b$$

là hai số thực dương cho trước

MM [/quote] http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=6877

Bài 10:

Giải và biện luận hệ : $\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = z + a \\ z^2 = x + a \end{cases}$

Nhận xét :Có lẽ bài toán khá phổ biến với $a = 1$. Có thể tìm thấy ở quyển "1001 bài toán Phương trình và Hệ Ptr " của thầy Phạm Thành Luân, có lời giải 1.Lời giải 2 thì có vấn đề.

Trong TH :$a \leq \frac{-1}{4}$ thì bài toán trở nên đơn giản , cộng ba pt lại ta có : $0 \leq (x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2 \leq 3a + \frac{3}{4}$. Trong đó $3a + \frac{3}{4} \leq 0$

Trường hợp $0 < a < 1$ tìm thấy lời giải từ Tuyển tập Các đề thi HSG các tỉnh , thầy Trần Nam Dũng chủ biên, anh Võ Quốc Bá Cẩn biên soạn

Ta chỉ xét TH: $a > -\frac{1}{4}$

Hai ý định :

1. Đồng bậc hóa :$(x, y, z) \to (x' + \alpha, y' + \alpha, z' + \alpha)$

2.Đối xứng hóa :

1. Chúng ta sẽ chọn α thế nào ?

Mong muốn biến mất hằng số ở vế phải để có được vế trái đều bậc 2 và vế phải đều là bậc 1

Xem xét pt thứ nhất : $(x' + \alpha)^2 = y' + \alpha + a$

hay $x'^2 = y' - 2\alpha.x' + \alpha - \alpha^2 + a$ Khi đó : chọn α sao cho :$\alpha - \alpha^2 + a = 0$

Rỏ thấy , với $a > -\frac{1}{4}$ thì pt trên có 2 nghiệm phân biệt . Và lúc này chúng ta có thể chuyển sang việc giải hệ đẳng cấp.

Hệ trở thành : $\begin{cases} x'^2 = y' - 2\alpha x' \\ y'^2 = z' - 2\alpha y' \\ z'^2 = x' - 2\alpha z' \end{cases}$

Vì đây là hệ đẳng cấp , trước hết xét trường hợp $z' = 0$,(trường hợp này tầm thường,nên không bàn ở đây)

Trường hợp $z' \neq 0$: Ta dùng phương pháp giải hệ đẳng cấp

$\begin{cases} x' = uz' \\ y' = vz' \end{cases}$

(Lời giải của thầy Luân cũng dùng phương pháp này ,ứng phó với hệ phi đẳng cấp ban đầu)

Sau khi đổi biến ta có : $\begin{cases} u^2 z'^2 = vz' - 2\alpha uz'(1') \\ v^2 z'^2 = z' - 2\alpha v.z'(2') \\ z'^2 = u.z' - 2\alpha z'(3') \end{cases}$

Chia hai ptr $(1'), (2')$đầu cho pt $(3')$, ta thu được hệ sau :

$\begin{cases} u^2 = \frac{v - 2\alpha u}{u - 2\alpha} \\ v^2 = \frac{1 - 2\alpha v}{u - 2\alpha} \end{cases}$

Đưa đến hệ ptr này không đơn giản chút nào ? Và tôi chưa thể trả lời câu hỏi : đi tiếp theo con đường này đến được kết quả không ?

Điều này đã khẳng định một lần nữa ý : " Cứ đi để thấy nhưng khó khăn"

2.

Ý tưởng "đối xứng hóa ", Tức là tôi muốn biểu diễn x,y,z thông qua các đại lượng

$$\begin{cases} p = x + y + z \\ q = xy + yz + xz \\ r = xyz \end{cases}$$

Cộng 3 ptr ta có :$\sum\limits_{sym} x^2 = \sum\limits_{sym} x + 3a$ Hay $p^2 - 2q = p + 3a(1a)$ Chúng ta cần thiết lập thêm 2 ptr nữa !. Chúng ta sẽ làm gì ?

1.Có thể nhân tương ứng 3 ptr,ta có : $r^2 = a^3 + pa^2 + qa + r(2a)$.

Tiếp tục nhân từng cặp pt rồi cộng lại, ta có : $\sum\limits_{sym} x^2y^2 = \sum\limits_{sym}(xy + ax + ay + a^2)$ hay $q^2 - 2pr = q + 2ap + 3a^2(3a)$

Từ $(1a), (2a), (3a)$, ta có hệ sau : $\begin{cases} p^2 - 2q = p + 3a \\ r^2 = a^3 + pa^2 + qa + r \\ q^2 - 2pr = q + 2ap + 3a^2 \end{cases}$

Tất cả 3 việc tổ hợp trên đều hướng tới việc tăng cường tính đối xứng hóa từ hệ không đối xứng.Tuy nhiên đưa đến hệ p, q, r không đơn giản , dùng phép thế không chắc sẽ giải được .

Ta giữ lại (1a) và dùng một hướng tiếp cận khác để hạ thấp bậc của q,r:

Xét t là nghiệm ptr : $t^2 = t + a(*)$ (rỏ ràng tồn tại hai giá trị t, với $a > -\frac{1}{4}$ Lấy mỗi ptr trong hệ ban đầu trừ cho ptr này (thực chất có thể xem là việc thêm bớt)

Ta có : $\begin{cases} x^2 - t^2 = y - t \\ y^2 - t^2 = z - t \\ z^2 - t^2 = x - t \end{cases}$

Nhân ba ptr lại , thì chúng ta cũng tạo được một sự đối xứng ,tuy nhiên chúng ta sẽ boăn khoăn : điều đó có đơn giản hơn không ? Chúng ta sẽ thấy được nhân tử :$(x - t)(y - t)(z - t)$ Nên ta có đẳng thức :

$(x - t)(y - t)(z - t)[(x + t)(y + t)(z + t) - 1] = 0$ Gọi $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ là hai nghiệm của (*). Khi đó :

Xét trường hợp 1: Có x or y or z là nghiệm của (*).Giả sử : $x = t(= t_1 or t_2)$. Khi đó :y=z=t. Do đó trong TH này : $x = y = z = t_{1,2}$

Trường hợp :Tất cả x,y,z không là nghiệm của (*) Khi đó : $(x+t_i)(y+t_i)(z+t_i) = 1, i = 1, 2$ Hay $t_i^3 + pt_i^2 + qt_i + r = 1, i = 1, 2$ Ta có thể : dùng hai ptr này , cũng tốt rồi vì bậc đã giảm xuống.Tuy nhiên , chúng ta sẽ tổ hợp chúng để có hệ tốt hơn (hi vọng con lai sẽ tốt hơn, mong muốn chính đáng)

Tiến hành cộng ,trừ tương ứng hai ptr kết hợp Viet (tức là : $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1t_2 = -a \end{cases}$) Khi đó nhận được:$\begin{cases} (1 + 3a) + (1 + 2a)p + q + 2r = 2 \\ (t1 - t_2)[(1 + a) + p + q] = 0 \end{cases}$

Rút gọn :$\begin{cases} (1 + 2a)p + q + 2r = 1 - 3a \\ p + q = -1 - a \end{cases}$

Kết hợp 2 ptr này với (1a). Ta có hệ :$\begin{cases} p^2 - 2q = p + 3a \\ (1 + 2a)p + q + 2r = 1 - 3a \\ p + q = -1 - a \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p^2 - 2(-1 - a - p) = p + 3a(**) \\ r = 1 - a - a.p \\ q = -1 - a - p \end{cases} \quad (4)$$

$(**) \iff (p+\frac{1}{2})^2 = a - \frac{7}{4}$

TH: $a < \frac{7}{4}$ thì hệ thống (4) vô nghiệm.Do đó hệ chỉ có hai nghiệm $x = y = z = \frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

TH: $a = \frac{7}{4}$:

TH: $a > \frac{7}{4}$: Hệ có hai nghiệm $(p,q,r) = (-\frac{1}{2} + \sqrt{a-\frac{7}{4}}, -\frac{1}{2} - a - \sqrt{a-\frac{7}{4}}, 1 - \frac{a}{2} - a\sqrt{a-\frac{7}{4}})$,

$(-\frac{1}{2} - \sqrt{a-\frac{7}{4}}, -\frac{1}{2} - a + \sqrt{a-\frac{7}{4}}, 1 - \frac{a}{2} + a\sqrt{a-\frac{7}{4}})$

Từ đó : ta có được ba đại lượng đối xứng. Tiếp tục dùng Viet đảo và giải ptr bậc 3. Trong trường hợp thu được các giá trị phức hoặc trường hợp p,q,r không có nghiệm thực thì chúng ta có thể tìm được nghiệm phức của nó .

Những bước tái chế : $\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = z + b \\ z^2 = x + c \end{cases}$

Bài 11 [quote name='Karl Friedrich Gauss' date='Dec 11 2005, 10:47 PM' post='46922']
$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[4]{15+x^3}=x^2+2$ [/quote]

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=9088

Đặt $t=\sqrt{x}\geq 0$

$t+\sqrt[3]{t^4-1}+\sqrt[4]{15+t^6}=t^4+2$

$\sqrt[3]{t^4-1}+(\sqrt[4]{15+t^6}-2)=t^4-t$

Bài 12

[quote name='tropicalgarden' date='Nov 10 2005, 10:30 AM' post='41554'] Giải hệ :

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0 \\ y + z^2 + x^4 = 0 \\ z + x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$$ [/quote]

Tính solvable là rất quan trọng . Tuy nhiên chúng ta không có cơ sở nào để khẳng định hay bác bỏ chúng .

Gác việc giải hệ ptr . Chúng ta thử khám phá số nghiệm của hệ trên . Câu hỏi này đã giảm nhẹ .Có lẽ sẽ giải quyết được .