

MỤC LỤC

◆	CHƯƠNG ⑦. ĐẠO HÀM.....	2
▶	BÀI ①. ĐẠO HÀM.....	2
	 ①. Tóm tắt kiến thức	
2		
	 ②. Phân dạng toán cơ bản	
3		
	•Dạng ①: Đạo hàm.....	3
	•Dạng ②: Ý nghĩa hình học của đạo hàm.....	4
	•Dạng ③: Số e.....	4
	 ③. Dạng toán rèn luyện	
5		
	•Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	5
	•Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	46
	•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	63

A. Tóm tắt kiến thức

1. ĐẠO HÀM

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$, tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1.** Tính $f(x) - f(x_0)$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số với $x \in (a; b), x \neq x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Bước 3.** Tính giới hạn.

- Chú ý:** Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$.

- Ý nghĩa vật lí của đạo hàm
- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

3. SỐ e

- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- ✓ Hơn nữa, người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e = 2,718281828\dots$ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

B. Phân dạng toán cơ bản

• Dạng 1: Đạo hàm

Phương pháp

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- ✓ Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$. Vậy:
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- ✓ Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- ✓ Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^2$. Tính $f'(x_0)$ với $x_0 \in \mathbb{R}$.

Lời giải

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Ta có

Câu 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = C$ (C là hằng số);

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

Lời giải

a) Với bất kì x_0 , ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$$

Vậy $f'(x) = (C)' = 0$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với bất kì $x_0 \neq 0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

•Dạng 2: Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Phương pháp

- ✓ Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.
- ✓ Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; 4) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình của tiếp tuyến đó.

Lời giải

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$.

•Dạng 3: Số e

Phương pháp

- ✓ Người ta chứng minh được rằng có giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- ✓ Hơn nữa, người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e = 2,718281828\ldots$ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).
- ✓ Từ kết quả trên suy ra, khi kì hạn trở nên rất ngắn (m dẫn đến $+\infty$) thì $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ dẫn đến e , và do đó $T = A \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mr}$ dẫn đến $A \cdot e^r$.
- ✓ Số e xuất hiện trong nhiều bài toán ở những lĩnh vực khác nhau như Toán học, Vật lí, Sinh học, Kinh tế,

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Công thức $T = A.e^{rt}$ được dùng để tính tổng số tiền vốn và lãi mà người gửi nhận được sau thời gian t kể từ thời điểm người đó gửi tiết kiệm A đồng theo thể thức "lãi kép liên tục" với lãi suất r / năm. Trong đó, A và T tính theo đồng, t tính theo năm và t có thể nhận giá trị thực bất kì. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của T (làm tròn đến hàng đơn vị) khi $A = 2000000, r = 0,05$ và

a) $t = \frac{1}{4}$

b) $t = \frac{1}{365}$.

Lời giải

a) $T = 2000000 \cdot e^{0,05 \cdot \frac{1}{4}} = 2000000 \cdot e^{0,0125} \approx 2025157$ (đồng).

b) $T = 2000000 \cdot e^{0,05 \cdot \frac{1}{365}} \approx 2000274$ (đồng)

©. Dạng toán rèn luyện

• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

- A.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- B.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- C.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.
- D.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Lời giải

Chọn D

Ta có định lí sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

A. $f'(2) = 3$.

B. $f'(x) = 2$.

C. $f'(x) = 3$.

D. $f'(3) = 2$.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3)$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} \text{ bằng}$$

A. 12.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và $x_0 \in D$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu

hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0

Vậy kết quả của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Câu 5: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc bằng

A. 5.

B. $-\frac{1}{5}$.

C. -5.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-5}{(2x-3)^2}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = \frac{-5}{(2 \cdot (-1) - 3)^2} = \frac{-1}{5}$$

Câu 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 4x - 6$.
- B. $y = 4x + 2$.
- C. $y = 4x + 6$.
- D. $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 8x, \quad y'(-1) = 4.$$

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x = -1$ là: $M(-1; 2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1; 2)$ là:

$$y = y'(-1)(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x + 6.$$

Câu 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$

- A. $y = 4x - 6$.
- B. $y = 4x + 2$.
- C. $y = 4x + 6$.
- D. $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 8x, \quad y'(-1) = 4$$

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x = -1$ là: $M(-1; 2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1; 2)$ là:

$$y = y'(-1)(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x + 6.$$

Câu 8: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

- A.** $y = 7x + 13$. **B.** $y = -7x + 30$. **C.** $y = 3x + 9$. **D.** $y = -x - 2$.

Lời giải

Chọn B

$$x = 3 \Rightarrow y = 9;$$

$$y' = \frac{-7}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = -7$$

Phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y = -7(x-3) + 9 \Leftrightarrow y = -7x + 30$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm

$$M\left(1; \frac{1}{3}\right) \text{ là:}$$

- A.** $y = 3x - 2$. **B.** $y = -3x + 2$. **C.** $y = x - \frac{2}{3}$. **D.** $y = -x + \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$y' = x^2 + 2x - 2$$

$$y'(1) = 1 + 2 - 2 = 1$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

$$y = y'(1)(x-1) + \frac{1}{3} = x - 1 + \frac{1}{3} = x - \frac{2}{3}$$

Câu 10: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

- A.** $y = -9x + 16$. **B.** $y = -9x + 20$. **C.** $y = 9x - 20$. **D.** $y = 9x - 16$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 3$$

Ta có $y(2)=2$ và $y'(2)=9$. Do đó PTT cần tìm là: $y=9(x-2)+2 \Leftrightarrow y=9x-16$

Câu 11: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=3x-4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0=0$ là

- A.** $y=0$. **B.** $y=3x$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=-12x$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=3-8x$.

Phương trình tiếp tuyến: $y=y'_{(0)}(x-0)+y_{(0)} \Rightarrow \Delta: y=3x$.

Câu 12: Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A.** $y=-2x+1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=-3x-2$.

Lời giải

Chọn C

+) $y'=-3x^2+3$

+) Giao điểm của (C) với trục tung có tọa độ là $(0;-2)$.

+) Tiếp tuyến của (C) tại điểm $(0;-2)$ có phương trình là:

$$y=y'(0)(x-0)-2 \Leftrightarrow y=3x-2.$$

Câu 13: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=x^4-8x^2+9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1.

- A.** $y=12x+14$. **B.** $y=12x-14$. **C.** $y=12x+10$. **D.** $y=-20x-22$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$y'=4x^3-16x \Rightarrow y'(-1)=12.$$

$$M(-1; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0=2.$$

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(-1;2)$ có phương trình là $y=y'(-1)(x+1)+2 \Leftrightarrow y=12x+14$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y = 12x + 14$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x - 2$. C. $y = 3x - 3$. D. $y = 3x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y = 3(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.

Câu 15: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -2x - 3$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -2$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2x - 3$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng

- A. $k = -5$. B. $k = 10$. C. $k = 25$. D. $k = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 2$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng $k = y'(1) = 1$.

Câu 17: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là

- A. -1. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = \frac{-x+1}{3x-2}$.

Gọi M là tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $M(0; -\frac{1}{2})$.

Vậy hệ số góc cần tìm là: $k = y'(0) = -\frac{1}{4}$.

Câu 18: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng

- A. $22(m/s)$. B. $19(m/s)$. C. $9(m/s)$. D. $11(m/s)$.

Lời giải

Chọn D

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) là: $v(2) = s'(2) = 11(m/s)$

Câu 19: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng.

- A. $22(m/s)$.
B. $19(m/s)$.
C. $9(m/s)$.
D. $11(m/s)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình vận tốc của chất điểm được xác định bởi $v = s' = 4t + 3$.

Suy ra vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng $v(2) = 4 \cdot 2 + 3 = 11$.

Câu 20: Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500$. Trong khoảng thời gian $t = 0$ đến $t = 5$ chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

- A. $t = 1$. B. $t = 4$. C. $t = 2$. D. $t = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$v'(t) = -4t^3 + 16t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2(L) \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta tính

Ta có $v(0) = 500, v(2) = 516, v(5) = 75$

Hàm số $v(t)$ liên tục trên $[0; 5]$ nên chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$.

Câu 21: Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

- A. $12m/s^2$. B. $17m/s^2$. C. $24m/s^2$. D. $14m/s^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Vận tốc của chuyển động $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Gia tốc của chuyển động $a(t) = v'(t) = 6t - 6$. Khi $t = 3 \Rightarrow a(t) = 12m/s^2$.

Câu 22: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2$, t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động trong t giây. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây) là:

- A. $80(m/s)$. B. $90(m/s)$. C. $100(m/s)$. D. $70(m/s)$.

Lời giải

Chọn B

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là : $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 24t$.

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây) là:
 $v(10) = -\frac{3}{2}10^2 + 24 \cdot 10 = 90 (m/s)$.

Câu 23: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A.** 216 (m/s) . **B.** 30 (m/s) . **C.** 400 (m/s) . **D.** 54 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có : $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s).

Câu 24: Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A.** Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x_0 = 3$.
B. Hàm số có đạo hàm nhưng không liên tục tại $x_0 = 3$.
C. Hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại $x_0 = 3$.
D. Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 4) = -1 = f(3).$$

$$\text{Đạo hàm của hàm số tại } x_0 = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12 - 0}{x - 3} = -1 = f'(3)$$

Suy ra: Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0 = 3$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là

A. $f'(1) = 2$.

B. f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

C. $f'(0) = 2$.

D. $f'(2) = 4$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2;$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2.$$

Vậy $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1) = 2$. Suy ra hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$. Vậy B sai.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 26: Cho hàm số . Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.

D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$. Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + x}{-2} = -1$$

và

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1$$

. Do đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x=1$ thì $2a+b$ bằng:

- A. 2. B. 5. C. -2. D. -5.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = 2;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2 + bx - a - b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x^2 - 1) + b(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)[a(x + 1) + b]}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [a(x + 1) + b] = 2a + b \end{aligned}$$

Theo yêu cầu bài toán: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow 2a + b = 2.$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = |x - 1|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $f(1) = 0$. B. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
C. $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. D. $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.

Lời giải

Ta có $f(1) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x - 0}{x - 1} = -1 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = 1.$$

Do đó hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1 + |x|}$. Tính $f'(0)$.

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = \frac{1}{3}$. D. $f'(0) = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + |x|}.$

Mà $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + x} = 3; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 - x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1 + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1 + |x|} = 3$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1+|x|} = 3.$$

Kết luận: $f'(0) = 3$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- A.** Không tồn tại. **B.** 0 **C.** $-\frac{7}{50}$ **D.** $-\frac{9}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1 - 4x^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x-1}{(\sqrt{3x+1} + 2x)} = -\frac{5}{4} = f(1)$$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} + \frac{5}{4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{3x+1} - 3x - 5}{4(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16(3x+1) - (3x+5)^2}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1} + 3x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-9}{4(4\sqrt{3x+1} + 3x+5)} = -\frac{9}{64} \end{aligned}$$

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$.
Hãy tính $T = a + 2b$.

- A.** $T = -4$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Ta có $f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

Khi đó $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}$.

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Câu 32: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2012)\sqrt[3]{1 - 2x} - 2012}{x} = \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a là số nguyên âm.

Tổng $a + b$ bằng

A. -4017.

B. -4018.

C. -4015.

D. -4016.

Lời giải

* Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2012)\sqrt[3]{1 - 2x} - 2012}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (x\sqrt[3]{1 - 2x}) + 2012 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1 - 2x} - 1)}{x} \\ &= 2012 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 2x} - 1}{x} \end{aligned}$$

* Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$ ta có $f(0) = 1$. Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 2x} - 1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{7(\sqrt[3]{1 - 2x})^6} \Rightarrow f'(0) = -\frac{2}{7} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 2x} - 1}{x} = -\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2012)\sqrt[3]{1 - 2x} - 2012}{x} = -\frac{4024}{7} \Rightarrow \begin{cases} a = -4024 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow a + b = -4017.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu 33: Cho hàm số đây? . Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Với $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{4x(2 + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Câu 34: Hàm số nào sau đây không có đạo hàm trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = |x - 1|$. **B.** $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. **C.** $y = \sin x$. **D.** $y = \sqrt{2 - \cos x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = |x - 1|$, do đó: $y = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$ khi đó: $y' = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$

Tại $x = 1$: $y'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$.

$y'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{x - 1} = -1$.

Do $y'(1^+) \neq y'(1^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại 1.

Các hàm số còn lại xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

- A.** 0. **B.** $f'(2)$. **C.** $2f'(2) - f(2)$. **D.** $f(2) - 2f'(2)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$.

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x - 2}$

$\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)(x - 2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = 2f'(2) - f(2)$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

- A.** $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = -2$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(0)=1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$.

Ta thấy $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$.

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Trong các khẳng định

(I): Tồn tại một số $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(II): Nếu $f(a) = f(b)$ thì luôn tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

(III): Nếu $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a; b)$ thì giữa hai nghiệm đó luôn tồn tại một nghiệm của $f'(x)$.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

(I) đúng (theo định lý Lagrange).

(II) đúng vì với $f(a) = f(b)$,

theo (I) suy ra tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

(III) đúng vì với $\alpha, \beta \in (a; b)$ sao cho $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ và có đạo hàm trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

Theo (II) suy ra luôn tồn tại một số $c \in (\alpha; \beta)$ sao cho $f'(c) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$$

Câu 38: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính giá trị $S = x_0 + a$.

A. $S = 2(3 - 2\sqrt{2})$ **B.** $S = 2(1 + 4\sqrt{2})$ **C.** $S = 2(3 - 4\sqrt{2})$ **D.** $S = 2(3 + 2\sqrt{2})$

Lời giải

Chọn B

+ Khi $0 < x < x_0$: $f(x) = a\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(0; x_0)$ nên liên tục trên khoảng $(0; x_0)$.

+ Khi $x > x_0$: $f(x) = x^2 + 12 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(x_0; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(x_0; +\infty)$.

+ Tại $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a\sqrt{x} - a\sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{a}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 + 12 - (x_0^2 + 12)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x + x_0) = 2x_0.$$

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0.$$

Khi đó $f'(x_0) = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0$ và $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ 2x & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$ nên hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \Leftrightarrow a = 4x_0\sqrt{x_0} \quad (1)$$

Mặt khác: Hàm số f liên tục tại x_0 nên $x_0^2 + 12 = a\sqrt{x_0} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0 = 2$ và $a = 8\sqrt{2}$

$$\text{Vậy } S = a + x_0 = 2(1 + 4\sqrt{2}).$$

Câu 39: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 20.

B. 17.

C. 18.

D. 25.

Lời giải

Chọn A

Ta có
$$y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

Mặt khác hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$ thì hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

$$\Rightarrow 4 + 2a + b = -2 \Rightarrow b = 2.$$

Vậy $a^2 + b^2 = 20$.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $-\frac{1}{2}$.

B. -2

C. 2 .

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

Với $y = 3$, ta có: $\frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2$.

$$y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Ta có:

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$$k = y'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -2$$

Câu 41: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + x - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $x + y - 1 = 0$.

B. $x - y - 2 = 0$.

C. $x + y + 3 = 0$.

D. $x - y - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $y = f(x) = x^2 + x - 2$

Ta có $y' = f'(x) = 2x + 1$

$$\text{Tại } x_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = -1 \\ y_0 = f(-1) = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -(x+1) - 2 \Leftrightarrow y = -x - 3 \Leftrightarrow x + y + 3 = 0$$

Câu 42: Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

- A.** 1. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là $f'(1) = 3.1^2 - 6.1 = -3$.

Câu 43: Gọi I là giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy . Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại I là

- A.** -2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Theo bài ra ta có $I(0; -1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại I là $y'(0) = \frac{-2}{(0-1)^2} = -2$.

Câu 44: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A.** $y = 2x + 9$. **B.** $y = -2x + 9$. **C.** $y = 2x - 9$. **D.** $y = -2x - 9$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$, $y'(2) = -2$. Khi $x = 2$ thì $y = 5$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là
 $y = -2(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -2x + 9$.

Câu 45: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H): y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là:

- A. $y = x - 3$. B. $y = \frac{1}{3}(x - 1)$. C. $y = 3x$. D. $y = 3(x - 1)$.

Lời giải

Chọn B

Giao điểm của (H) và trục hoành là điểm $M(1;0)$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$ nên $y'(1) = \frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến với (H) tại điểm M là: $y = y'(1)(x-1) + 0$
 $\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x-1)$.

Câu 46: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là.

- A. 1 B. 6 C. 12 D. 9

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) có tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) là
 $y' = -3x^2 + 6x + 9 = 12 - 3(x+1)^2 \leq 12$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là 12

Câu 47: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$ là

- A. $y = 8x - 4$. B. $y = x + 3$. C. $y = -8x + 12$. D. $y = 8x + 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 8(x - 1) + 4 = 8x - 4$.

Câu 48: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ có phương trình $y = ax + b$. Tính $a + b$

A. 9.

B. 5.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(2;3)$ là: $y = -2(x - 2) + 3 = -2x + 7$.

Do đó $a = -2; b = 7 \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 49: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = 2$

A. $y = -8x - 16$.

B. $y = 8x - 19$.

C. $y = -8x + 16$.

D. $y = 8x + 19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^2 + 5 = -3$.

$y' = 4x^3 - 12x \Rightarrow y'(2) = 4 \cdot (2)^3 - 12 \cdot 2 = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = y'(2) \cdot (x - 2) + y(2)$.

$\Rightarrow y = 8(x - 2) - 3 = 8x - 19$.

Câu 50: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là

A. $y = 3x + 1$.

B. $y = -3x - 1$.

C. $y = -3x + 1$.

D. $y = -3x + 3$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ mà $y_0 = -2$.

Khi đó $\frac{x_0 + 1}{x_0 - 2} = -2 \Leftrightarrow x_0 + 1 = -2(x_0 - 2) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow M(1; -2)$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$, suy ra $y'(1) = -3$. Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $M(1; -2)$ là $y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1$.

- Câu 51:** Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x - 1$?
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(a; a^3 + 1)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ (C).

Ta có $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y = 3a^2(x - a) + a^3 + 1 \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3 + 1 (\Delta)$$

$$\Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = 3 \\ -2a^3 + 1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Vậy, có duy nhất điểm M thỏa mãn yêu cầu là $M(-1; 0)$.

- Câu 52:** Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C). Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ là
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ nên

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$$

+ Với $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 3x - 4\sqrt{2}$

+ Với $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3x + 4\sqrt{2}$

Câu 53: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$.

Vì tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ nên $y'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$, suy ra PTTT là: $y = -9(x+1)+1 \Leftrightarrow y = -9x - 8$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -3$, suy ra PTTT là: $y = -9(x-3)-3 \Leftrightarrow y = -9x + 24$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, (C)$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là

A. $y = -3x - 1; y = -3x + 11$.

B. $y = -3x + 10; y = -3x - 4$.

C. $y = -3x + 5; y = -3x - 5$.

D. $y = -3x + 2; y = -3x - 2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến. Theo giả thiết ta có $f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$.

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$: Phương trình tiếp tuyến: $y = -3(x-0)-1 \Leftrightarrow y = -3x - 1$.

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5$: Phương trình tiếp tuyến: $y = -3(x-2)+5 \Leftrightarrow y = -3x + 11$.

Ta thấy cả hai tiếp tuyến đều thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 55: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}, (C)$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ

- A. $x=0$. B. $x=-2$. C. $\begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x+3y+2=0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=3$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình:

$$y'=3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)^2}=3 \Leftrightarrow (x+1)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy hoành độ tiếp điểm cần tìm là: $\begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$.

Câu 56: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=9x+10$ là

- A. $y=9x+6, y=9x-28$. B. $y=9x, y=9x-26$.
C. $y=9x-6, y=9x-28$. D. $y=9x+6, y=9x-26$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Hệ số góc: $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow x_0=3; x_0=-1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;1)$: $y=9(x-3)+1=9x-26$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(-1;-3)$: $y=9(x+1)-3=9x+6$.

Câu 57: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:9x-y+7=0$ là

- A. $y=9x+25$. B. $y=-9x-25$. C. $y=9x-25$. D. $y=-9x+25$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (Δ) là tiếp tuyến của đồ thị (C) và $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$$y'=3x^2-6x$$

Theo giả thiết: (Δ) song song với $(d): y=9x+7 \Rightarrow k_{\Delta}=k_d=9=y'(x_0)$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ x_0=3 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$; $(\Delta): y = 9(x+1) - 2 = 9x + 7$ (loại)

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$; $(\Delta): y = 9(x-3) + 2 = 9x - 25$.

Câu 58: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$, tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ của đồ thị hàm số là:

- A.** $y = 9(x+3)$ **B.** $y = 9(x-3)$ **C.** $y = 9x + 5$ và $y = 9(x-3)$ **D.** $y = 9x + 5$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ nên $3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -4, f'(-1) = 9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9x + 5$ (không thỏa)

Với $x = 3 \Rightarrow y = 0, f'(3) = 9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x - 3)$

Câu 59: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x - 3y + 6 = 0$.

- A.** $y = \frac{1}{3}x - 1$ **B.** $y = \frac{1}{3}x + 1$ **C.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ **D.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Ta có $x - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow \text{PTTT: } y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Câu 60: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ đồ thị (C) . Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

- A.** 1. **B.** Không tồn tại cặp điểm nào.
C. Vô số cặp điểm **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Ta có

Giả sử $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với $x_1 \neq x_2$.

Tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau nên $y'(x_1) = y'(x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_1-1)^2} = \frac{1}{(x_2-1)^2} \Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \begin{cases} x_1-1 = x_2-1 \\ x_1-1 = -x_2+1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2=2$$

Vậy trên đồ thị hàm số tồn tại vô số cặp điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1+x_2=2$ thì các tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau.

* $y_1+y_2 = \frac{x_1+1}{x_1-1} + \frac{x_2+1}{x_2-1} = \frac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-1} = 2$. Như vậy $x_1+x_2=2$ và $y_1+y_2=2$ hay đoạn thẳng AB có trung điểm là tâm đối xứng $I(1;1)$ của đồ thị.

Câu 61: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y=3x+1$.

- A.** $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{m+1}{(x+1)^2}$$

Ta có:

Gọi $M(0; -m) \in (C_m)$; k là hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại M và $d: y=3x+1$.

Do tiếp tuyến tại M song song với d nên $k=3 \Leftrightarrow y'(0)=3 \Leftrightarrow 1+m=3 \Leftrightarrow m=-2$

Câu 62: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$ của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$, khi đó ta có:

$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 1/3 \end{cases}$$

Với $x_0 = 1$ ta được $M(1;1)$, phương trình tiếp tuyến: $y = 1 \cdot (x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = x$ (loại).

Với $x_0 = \frac{1}{3}$ ta được $M\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{27}\right)$, phương trình tiếp tuyến: $y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{27} \Leftrightarrow y = x - \frac{4}{27}$.

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 63: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là

A. $y = -2x + 2$.

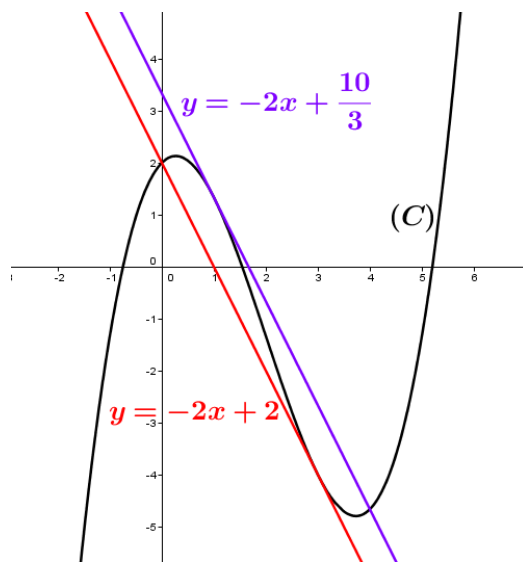
B. $y = -2x - 2$.

C. $y = -2x + 10, y = -2x - \frac{2}{3}$.

D. $y = -2x - 10, y = -2x + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0(x_0; y_0)$ là: $f'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 1$

Hệ số góc của đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là -2

Tiếp tuyến song song với đường thẳng d thì $x_0^2 - 4x_0 + 1 = -2$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

* **Th1:** $x_0 = 1, y_0 = \frac{4}{3}, f'(x_0) = -2$

Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = -2x + \frac{10}{3}$ (loại)

* **Th2:** $x_0 = 3, y_0 = -4, f'(x_0) = -2$

Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = -2x + 2$ (nhận)

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2x + 2$

Câu 64: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

A. $y + 16 = -9(x + 3)$. **B.** $y = -9(x + 3)$. **C.** $y - 16 = -9(x - 3)$. **D.** $y - 16 = -9(x + 3)$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $y' = x^2 + 6x$, $y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3$ ($y_0 = 16$)

+ Vậy $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = -9(x + 3) + 16$ hay $y - 16 = -9(x - 3)$.

Câu 65: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết nó song song với đường thẳng $y = 9x + 6$.

A. $y = 9x + 6$, $y = 9x - 6$. **B.** $y = 9x - 26$.
C. $y = 9x + 26$. **D.** $y = 9x - 26$, $y = 9x + 6$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Gọi hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến Δ là x_0 .

Tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết song song với đường thẳng $y = 9x + 6$

$$\Rightarrow y'(x_0) = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y(-1) = -3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x+1) - 3 \Rightarrow y = 9x + 6$ (loại).

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y(3) = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x-3) + 1 \Rightarrow y = 9x - 26$ (thỏa mãn).

Câu 66: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Giả sử tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ tại $M(x_0; y_0)$ có dạng:
 $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$ nên

$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

+ Với $x_0 = 1, y_0 = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = x$ (loại)

+ Với $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{5}{27} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = x - \frac{4}{27}$ hay $27x - 27y - 4 = 0$.

Vậy có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 67: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -4x^3 + 4x$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên có hệ số góc bằng 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Suy ra $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -4x_0^3 + 4x_0 = 0$

Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 0$, tiếp tuyến là: $y = 0$ (loại).

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến là $y = 1$ (thỏa mãn).

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến là $y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy có một tiếp tuyến song song với trục hoành có phương trình $y = 1$.

Câu 68: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng $\Delta: y = 3x + 2$ là

- A.** $y = 3x + 2$. **B.** $y = 3x - 2$. **C.** $y = 3x + 14$. **D.** $y = 3x + 5$.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với $\Delta: y = 3x + 2$ nên gọi tọa độ tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ ta có

$$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0 + 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow (d): y = 3(x+1) - 1 = 3x + 2 \quad (\text{Loại}).$$

$$x_0 = -3 \Rightarrow (d): y = 3(x+3) + 5 = 3x + 14 \quad (\text{Nhận}).$$

Câu 69: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có $y' = 3x^2 - 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C) , khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3x_0^2 - 6x_0$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x - 25$ khi

$$3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \end{cases}$$

+ Với $M(-1; -2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 9x + 7$.

+ Với $M(3;2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y=9x-25$.

Vậy tiếp tuyến của (C) song song với $y=3x+1$ là $y=9x+7$, nên ta có 1 tiếp tuyến cần tìm

Câu 70: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

- A. $M\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. B. $M(-2;0)$. C. $M\left(2;\frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2;-4)$.

Lời giải

Chọn B

Tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k=3$

Ta có: $y'(x)=x^2-1$

$$y'(x)=3 \Leftrightarrow x^2-1=3 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Xét phương trình:

Do M có hoành độ âm nên $x=-2$ thỏa mãn, $x=2$ loại.

Với $x=-2$ thay vào phương trình $(C) \Rightarrow y=0$. Vậy điểm M cần tìm là: $M(-2;0)$

Câu 71: Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y=-3x$.

- A. $y=-3x+11; y=-3x-1$. B. $y=-3x-6; y=-3x-11$.
C. $y=-3x+1$. D. $y=-3x+6$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm

Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-3x$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến Δ là $k=-3$.

Tiếp tuyến Δ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ có phương trình dạng $y=-3(x-x_0)+y_0$.

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Ta có

$$y'(x_0) = k \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}.$$

+ Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow M_0(2; 5)$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến $\Delta: y = -3(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11$.

+ Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M_0(0; -1)$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến $\Delta: y = -3(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1$.

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm là $y = -3x + 11$ và $y = -3x - 1$.

Câu 72: Cho đường cong $(C): y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong (C) có hệ số góc bằng 7?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 4x^3 - 9x^2 + 4x$$

Ta có:

$$4x^3 - 9x^2 + 4x = 7.$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình:

Phương trình có 1 nghiệm nên có 1 tiếp tuyến có hệ số góc bằng 7.

Câu 73: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox . Tổng các phần tử của S là

A. 3.

B. 8.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến song song với trục Ox nên hệ số góc của tiếp tuyến $k = 0$.

Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \in (C)$, khi đó

$$y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \hat{=} \begin{cases} x_0 = 0 \text{ p } y_0 = m - 2 \\ x_0 = \pm 1 \text{ p } y_0 = m - 3 \end{cases}$$

Để có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox thì

$$\begin{aligned} m &= 2 \\ m - 3 &= 0 \quad \hat{=} \quad m = 3; m = 2 \\ m &= 3 \\ m - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $3+2=5$.

Câu 74: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$ nên có:

$$3x^2 - 6x = 9 \quad \hat{=} \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \hat{=} \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

+ Với $x = -1$ $y(-1) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x+1) + 2 \quad \hat{=} \quad y = 9x + 11$.

+ Với $x = 3$ $y(3) = 2$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x-3) + 2 \quad \hat{=} \quad y = 9x - 25$.

Vậy chỉ có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 75: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Tính giá trị của $2a + b$.

- A.** -23 hoặc -24 **B.** -23. **C.** -24. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d: 12x + y = 0 \Rightarrow d: y = -12x$. Hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = -12$.

Do tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k_H = k_d = -12$.

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x - 12$$

Giải sử $M(x_0; y_0)$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến. Khi đó:

$$y'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = -12 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 1) \\ M(1; -12) \end{cases}$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(0;1)$ là: $y = -12(x - 0) + 1 = -12x + 1$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(1; -12)$ là: $y = -12(x - 1) - 12 = -12x$ (loại do trùng với d).

Vậy $y = -12x + 1$, như vậy $a = -12, b = 1 \Rightarrow 2a + b = -23$.

Câu 76: Đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng

- A.** -4 hoặc -2. **B.** -4 hoặc 0. **C.** 0 hoặc 2. **D.** -2 hoặc 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$.

Có $y' = 3x^2 + 3$.

$$y' = 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;3)$ là: $y = 6x - 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M'(-1; -5)$ là: $y = 6x + 1$.

Để đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của (C) thì $\begin{cases} m + 1 = -3 \\ m + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 0 \end{cases}$

Câu 77: Tính tổng S tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

- A.** $S = \frac{4}{3}$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta không xét $m = 0$ vì giá trị này không ảnh hưởng đến tổng S .

Với $m \neq 0$ đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{có nghiệm.}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ 3x^2 - 6mx + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2mx) - mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ x^2 - 2mx = -m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -mx^2 + 2mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m - 2m^2 = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2mx - 2m^2 + 2m = 0 & (1) \\ x^2 - 2mx + m = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+m)(1-m) \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ x=-m \end{cases}$$

Với $m=1$ thay vào $(2) \Rightarrow x=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $x=-m$ thay vào $(2) \Rightarrow -3m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

Vậy
$$S = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Câu 78: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 0)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua điểm $A(-1; 0)$ có dạng: $y = a(x+1) = ax + a$ (d) .

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x = ax + a \\ 3x^2 - 6x + 2 = a \end{cases}$ có nghiệm. Dễ thấy hệ có ba nghiệm $(a; x)$ phân biệt nên có ba tiếp tuyến.

Câu 79: Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến kẻ từ $M(2; -1)$ đến đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$.

A. $y = -2x + 3$.

B. $y = -1$.

C. $y = x - 3$.

D. $y = 3x - 7$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua $M(2; -1)$ có dạng $y = k(x-2) - 1 = kx - 2k - 1$ (d) .

(d) là tiếp tuyến của parabol $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} kx - 2k - 1 = \frac{x^2}{4} - x + 1 \\ k = \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ k = \frac{x}{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ k=-1 \\ x=4 \\ k=1 \end{cases}. \text{ Vậy } (d): y = -x + 1 \text{ hoặc } (d): y = x - 3.$$

Câu 80: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1;3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $-1 < m_0 < 0$. B. $0 < m_0 < 1$. C. $1 < m_0 < 2$. D. $-2 < m_0 < -1$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1$, gọi $B(-1; 2m - 1) \Rightarrow \overline{AB} = (-2; 2m - 4)$.

Tiếp tuyến tại B đi qua A nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -m + 2$.

Mặt khác: hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Do đó ta có: $3(x_0)^2 + 6m_0x_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2$

$$\Leftrightarrow 3 - 6m_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2 \Leftrightarrow -4m_0 = -2 \Leftrightarrow m_0 = \frac{1}{2}.$$

Câu 81: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;1)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tính tổng bình phương các phần tử của tập S .

- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \frac{1-x+x-2}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$: $y - \frac{x_0-2}{1-x_0} = \frac{-1}{(1-x_0)^2}(x-x_0)$

Tiếp tuyến đi qua $A(m;1)$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x_0-2}{1-x_0} = \frac{-1}{(1-x_0)^2}(m-x_0) \Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + m + 3 = 0 (x_0 \neq 1) \quad (1)$$

Để có 1 tiếp tuyến qua $A(m;1) \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm $x_0 \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0; 2 - 6 + m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m < \frac{3}{2}; m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}. \text{ Ta có } 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

Câu 82: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Biết $a = \frac{m}{n}$ (với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản) là giá trị để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Khi đó giá trị $m+n$ là:

A. 2.

B. 7.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{TXĐ: } \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

Tiếp tuyến tại tiếp điểm có hoành độ $x_0 (x_0 \neq 1)$ của (C) có phương trình.

$$y = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \quad (\Delta)$$

đt (Δ) **đi** qua $A(a;1)$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) + \frac{x_0-2}{x_0-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + a + 3 = 0 \quad (*) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Có duy nhất 1 tiếp tuyến qua A $pt(*)$ có duy nhất 1 nghiệm khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ 2.1^2 - 6.1 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ a - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m+n=5$$

Câu 83: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x + 6$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số là $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 6 = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 3 = 3(x_0 - 1)^2 + 3 \geq 3$

Vậy hệ số góc lớn nhất là 3 đạt được tại $M(1; 3)$.

Câu 84: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) , biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác $DOAB$ cân tại O , với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.

- A.** -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

Ta có $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0; \forall x \in D$.

Tam giác $DOAB$ cân tại O , suy ra hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 .

Do $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0; \forall x \in D \Rightarrow k_{\text{tt}} = -1$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $(x_0; y_0); x_0 \in D$, ta có:

$$\frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Rightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1.$$

● Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -x$ (loại vì $A \neq B \neq O$).

● Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -x - 2$ (nhận).

Vậy $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -3.$

Câu 85: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Giả sử tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$ cắt Ox tại A , Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do tam giác OAB vuông tại O nên $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc tiếp tuyến là $f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$.

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2}; d: y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}; d: y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Câu 86: Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

- A.** $m \neq 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m \in \mathbb{Q}$.

Lời giải

Chọn D

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là:

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 + 2m - 3$$

Hệ số góc luôn dương

$$\Leftrightarrow y'(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m - 3)^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{Q}$$

Câu 87: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ ⁽¹⁾. Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số ⁽¹⁾. Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó $a + b$ bằng

- A.** -1 . **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** -3 .

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

$$y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D$$

Ta có:

Mặt khác, ΔOAB cân tại $O \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1 .

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq -\frac{3}{2}$.

$$y' = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1$$

Ta có:

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x$ loại vì $A \equiv B \equiv O$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 2$ thỏa mãn.

Vậy $d: y = ax + b$ hay $d: y = -x - 2 \Rightarrow a = -1; b = -2 \Rightarrow a + b = -3$.

Câu 88: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) . Số phần tử của S là

A. 9.

B. 7.

C. 3.

D. 5

Lời giải

Chọn B

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d qua A .

Ta có phương trình của d có dạng: $y = kx + m - k$.

d tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} kx + m - k = x^3 + 3x^2 + 1 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x^3 + 6x + 1 (*) \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases}$$

Để qua A có thể kẻ được đúng 3 tiếp tuyến tới (C) thì phương trình $(*)$ phải có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CB}$ với $f(x) = -2x^3 + 6x + 1$.

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$f(1) = 5 = f_{CB}; f(-1) = -3 = f_{CT}$$

Suy ra $-3 < m < 5$.

Vậy số phần tử của S là 7.

Câu 89: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $-\frac{1}{2}$.

B. -2

C. 2 .

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

Với $y=3$, ta có: $\frac{x+1}{x-1}=3 \Rightarrow 3x-3=x+1 \Leftrightarrow x=2$.

$$y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Ta có:

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$$k = y'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -2$$

Câu 90: Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m \neq 0$.

B. $m > 1$.

C. $m \neq 1$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là:

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 + 2m - 3$$

Hệ số góc luôn dương $\Leftrightarrow y'(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$

Câu 91: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2;1)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

A. 3 .

B. $\frac{3}{2}$.

C. 9 .

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Theo đề $x_0 = 2; y_0 = 1; y'(x_0) = -1$.

Suy ra pttt Δ là: $y = -x + 3$.

Tiếp tuyến Δ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A(3;0), B(0;3)$. Do đó diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục tọa độ bằng: $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{9}{2}$.

Câu 92: Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

- A. $y = x + 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = -x + 2$. D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \frac{2x+3}{x+2}$ (C)

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$y' = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Gọi phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$(d): y = \frac{1}{(x_0+2)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{2x_0+3}{x_0+2}$$

Ta có $(d) \cap Ox = A(-2x_0^2 - 6x_0 - 6; 0)$; $(d) \cap Oy = B\left(0; \frac{2x_0^2 + 6x_0 + 6}{(x_0+2)^2}\right)$

Ta thấy tiếp tuyến (d) chắn trên hai trục tọa độ tam giác OAB luôn vuông tại O

Để tam giác OAB cân tại O ta có $OA = OB \Rightarrow |-2x_0^2 - 6x_0 - 6| = \left| \frac{2x_0^2 + 6x_0 + 6}{(x_0+2)^2} \right|$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

Ta có hai tiếp tuyến thỏa mãn (d): $y = x$ và (d): $y = x + 2$.

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

A. $y = 2x - 6$.

B. $y = 4x - 6$.

C. $y = x + 1$.

D. $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn D

Đạo hàm hai vế $2f(2x) + f(1 - 2x) = 12x^2$ (1) ta có $4f'(2x) - 2f'(1 - 2x) = 24x$ (2).

Thay $x = 0, x = \frac{1}{2}$ lần lượt vào (1) ta được
$$\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ 2f(1) + f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 2$$

Thay $x = 0, x = \frac{1}{2}$ lần lượt vào (2) ta được
$$\begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = 4$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

$$y = 4(x - 1) + 2 = 4x - 2$$

•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$. Khi đó:

a) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$

d) $f'(1) = a \Rightarrow a > 5$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4 \end{aligned}$$

Vậy $f'(1) = 4$.

Câu 2: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$ tại điểm $x_0 = 0$ ta được $f'(0) = a$. Khi đó:

a) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

b) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+1}$

c) Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$

d) $\log_a 9 = 3$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

Ta có:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-2}{x+1} - (-2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x+1} = 3. \end{aligned}$$

Vậy $f'(0) = 3$.

Câu 3: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3$. Khi đó:

a) Với bất kì x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

b) $f'(1) = -6$

c) $f'(0) = 0$

d) $f'(2) = 24$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3 - 2x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{1} = 6x_0^2. \end{aligned}$$

x_0 , ta có:

Với bất kì

Vậy $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$. Khi đó:

- a) Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$
- b) $f'(2) = 2$
- c) $f'(3) = \frac{1}{3}$
- d) $f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)}{(1-x)(1-x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)} = \frac{2}{(1-x_0)^2}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x} \right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:

- a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6
- b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0; 4)$
- c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4
- d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Ta có: $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$$f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 = 6; f(-1) = -2$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y - f(-1) = 6(x+1) \Leftrightarrow y+2 = 6(x+1) \\ \Leftrightarrow y = 6x+4.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3; -1) \in (C)$. Khi đó:

- a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$
- b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
- c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$
- d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Từ ví dụ 4, ta có: $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là: $f'(3) = \frac{2}{(1-3)^2} = \frac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là: $y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Câu 7: Tính được đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra. Khi đó:

- a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$
- b) $y = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$
- c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ tại $x_0 = 0$ có $f'(0) = 0$
- d) $y = \frac{1}{x+1}$ tại $x_0 = 2$ có $f'(2) = -\frac{1}{9}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

$$a) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1.$$

$$b) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$c) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$$

$$d) f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x+1} - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{3(x+1)} = -\frac{1}{9}$$

Câu 8: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C) . Viết được phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung. Khi đó:

a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.

b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$

c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0

d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

$$\text{Ta có } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = 3$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 3x + 1$

Câu 9: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:

a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.

b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;2)$

c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$

d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

Ta có: $y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1$.

Vì $x_0 = -1$ nên $y_0 = -2 \Rightarrow$ Tiếp điểm $M(-1; -2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-1; -2)$ là $y = -x - 3$.

Câu 10: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Khi đó:

- a) Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
- b) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2
- c) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 5)$
- d) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1; -7)$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$ nên đường thẳng d có hệ số góc là $k_d = \frac{1}{2}$.

Tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k vuông góc với đường thẳng d

$$\Rightarrow k \cdot k_d = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{k_d} = -2.$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình

$$y' = k \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Với $x = 1$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x + 7$.

Với $x = -3$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x - 9$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $d_1: y = -2x + 7; y = -2x - 9$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 11: Cho hàm số

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

b) Với $a = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$

c) Với $a = 2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$

d) Với $a = m_0$ thì hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, khi đó: $\lim_{x \rightarrow m_0} (x^2 + 2x - 3) = 5$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x = 1$

$$\text{Hay } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = f(1) = a$$

$$\text{Khi đó, ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2}{x - 1} = 1$$

Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khi đó:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b$

c) Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 > m_0$

d) Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ khi $a = m_0, b = n_0$ khi đó: $n_0 + m_0 = 2$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$$

Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ thì hàm liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow a + b = 2$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax - a}{x - 1} = a \quad (\text{Do } b = 2 - a)$$

$$\text{Hàm có đạo hàm tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x^2 + ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi đó:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a + b$

c) Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi $a = m_0, b = n_0$ thì $m_0 \cdot n_0 = 1$

d) Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi $a = m_0, b = n_0$ thì $m_0 + n_0 = 1$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

Ta thấy với $x \neq 0$ thì $f(x)$ luôn có đạo hàm. Do đó hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm có đạo hàm tại $x = 0$.

Khi đó: $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0; f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a$

$\Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow a = 0$

Vậy $a = 0, b = 1$ là những giá trị cần tìm.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Câu 14: Cho hàm số . Khi đó:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$

c) Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow b = 1$

d) Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 0$ khi $a = 1, b = 1$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0); \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow b = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x + 1} = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy $a = -1, b = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Khi đó :

- a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1;3)$ là: $y = -3x + 6$
- b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 là $y = 24x - 27$
- c) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1
- d) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm (C) với trục tung

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$

a) Phương trình tiếp tuyến (t) tại $M(-1;3)$ có phương trình :
 $y = y'(-1)(x+1) + 3$

Ta có: $y'(-1) = -3$, khi đó phương trình (t) là: $y = -3x + 6$

b) Thay $x = 2$ vào đồ thị của (C) ta được $y = 21$.

phương trình (t) là: $y = 24x - 27$

c) Thay $y = 1$ vào đồ thị của (C) ta được $x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -3$.

phương trình (t) là: $y = 1$, $y = 9x + 28$

d) Trục tung Oy : $x = 0 \Rightarrow y = 1$. phương trình (t) là: $y = 1$

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Khi đó

a) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hoành độ tiếp điểm bằng 1 là $y = 3x - 4$

b) Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tung độ tiếp điểm bằng 9

c) Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{18}x + 1$

d) Có 1 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$

a) Ta có: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1, y'(1) = 3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 3(x - 1) - 1 = 3x - 4$

b) Ta có: $y_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 2, x_0 = -4$

- $x_0 = -4 \Rightarrow y'(x_0) = 18$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x + 4) + 9 = 18x + 81$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = -9$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = -9(x + 1) + 9 = -9x$

- $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 18$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 18(x - 2) + 9 = 18x - 27$

c) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{18}x + 1$ nên

Ta có: $y'(x_0) = 15 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -4, x_0 = 2$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = 18x + 81$ và $y = 18x - 27$

d) Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0; 1)$ nên ta có:

$$1 = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = -\frac{3}{2}$$

- $x_0 = 0 \Rightarrow y'(x_0) = -6$. Phương trình tiếp tuyến: $y = -6x + 1$

- $x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{107}{8}, y'(x_0) = -\frac{33}{4}$

Phương trình tiếp tuyến $y' = -\frac{33}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{107}{8} = -\frac{33}{4}x + 1$

Câu 17: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C).

a) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hoành độ tiếp điểm bằng 0 là $y = -3x + 1$

- b)** Có ba phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3
- c)** Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9
- d)** Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với trục Oy.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

a) Ta có: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1, y'(x_0) = -3$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -3x + 1$.

b) Ta có: $y_0 = 3 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2, x_0 = -1$

• $x_0 = -1 \Rightarrow y'(x_0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 3$

• $x_0 = 2 \Rightarrow y'(x_0) = 9$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 13$.

c) Ta có: $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

• $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 13$.

• $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17$.

d) Vì tiếp tuyến vuông góc với Oy nên ta có: $y'(x_0) = 0$

Hay $x_0 = \pm 1$. Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến: $y = 3, y = -1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết:

a) Có 3 phương trình tiếp tuyến của (C), biết tung độ tiếp điểm bằng -2.

b) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

c) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(4; 3)$

d) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$\Delta: y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

a) Vì tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 nên ta có

$$-\frac{4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$$

$$\bullet x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$$

$$\bullet x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$$

b) Vì tiếp tuyến song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$ nên ta có:

$$y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = 2$$

$$\bullet x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2$$

$$\bullet x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14$$

c) Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;3)$ nên ta có: $3 = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(4-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1}$

$$\Leftrightarrow 3(x_0-1)^2 = 4(x_0-4) + 2(x_0^2-1) \Leftrightarrow x_0^2 - 10x_0 - 21 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3, x_0 = 7$$

$$\bullet x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = \frac{8}{3}, y'(x_0) = -\frac{1}{9}. \text{ Phương trình tiếp tuyến}$$

$$y = -\frac{1}{9}(x-7) + \frac{8}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{31}{9}$$

$$\bullet x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 1, y'(x_0) = -\frac{1}{4}. \text{ Phương trình tiếp tuyến}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x+3) + 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

d) Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến phải vuông góc với một trong hai đường phân giác $y = \pm x$, do đó hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 hay $y'(x_0) = \pm 1$. Mà $y' < 0, \forall x \neq 1$ nên ta có

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$$

$$\bullet x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$$

- $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$.

Câu 19: Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

- a)** Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1.
- b)** Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.
- c)** Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân.
- d)** Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \quad \text{với} \quad y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \quad \text{và} \quad y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

a) Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1

Nên có: $\frac{-4}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3, \quad x_0 = -1$

* Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$

* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1, y = -x + 7$.

b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

Nên có: $y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 2$

* Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2$

* Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -4x + 2, y = -4x + 14$.

c) Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 . Mặt khác: $y'(x_0) < 0$, nên có: $y'(x_0) = -1$

$$\text{Tức } \frac{-4}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1 \quad \text{hoặc } x_0 = 3.$$

$$\star \text{ Với } x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$$

$$\star \text{ Với } x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1$, $y = -x + 7$.

d) Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến trục Oy bằng 2 suy ra $x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2; \frac{2}{3}\right)$, $M(2; 6)$.

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M\left(-2; \frac{2}{3}\right) \text{ là: } y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M(2; 6) \text{ là: } y = 4x + 14$$

$$\text{Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: } y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}, y = 4x + 14.$$

Câu 20: Cho hàm số: $y = \frac{2x}{x-1}$, có đồ thị (C)

a) Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2

b) Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x + 2y = 0$

c) Có 2 phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 9x - 2y + 1 = 0$

d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tạo với đường thẳng $(d'): 4x + 3y + 2012 = 0$ góc 45° có

$$\text{vector pháp tuyến là } \vec{n} = \left(\frac{1}{7}; -1\right)$$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}. \text{ Gọi } (x_0; y_0) \text{ là tọa độ tiếp điểm, hệ số góc}$$

tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ bằng $y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2}$

$$y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -2$$

a. Theo giả thiết, ta có:

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -2x + 8, y = -2x$

$$\text{b. Theo giả thiết, ta có: } \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{27}{4}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

$$\text{c. Theo giả thiết, ta có: } \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{2}{9} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = \frac{1}{9}$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -\frac{2}{9}x + \frac{32}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

d. Tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y = k(x - x_0) + y(x_0)$ với $k = y'(x_0) < 0$, có

vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (k; -1)$, (d') có vectơ pháp tuyến là $\vec{m} = (4; 3)$

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} \Leftrightarrow \frac{|4k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1.5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = -\frac{1}{7} \text{ thỏa đề bài.}$$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khi đó :

a) $f'(1) = 1$.

b) Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

c) Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

d) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Ta có: $f(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 1.$$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0 = 1$. C đúng.

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x - 1) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

Vậy hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$ và
 $\Rightarrow y' = -2 \sin 2x \Rightarrow y'' = -4 \cos 2x \Rightarrow y''(0) = -4$

Vậy a sai.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại $x = 1$. Khi đó:

a) $a > 0$

b) $b > 0$

c) $a + b = \frac{1}{2}$

d) $a - b = 2$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

Hàm số liên tục tại $x = 1$ nên ta có $a + b = \frac{1}{2}$.

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ nên giới hạn 2 bên của $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ bằng nhau và ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a \cdot 1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)}{2} = 1$$

Vậy $a = 1; b = -\frac{1}{2}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = |x + 1|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- a) $f(x)$ liên tục tại $x = -1$.
b) $f(x)$ có đạo hàm tại $x = -1$.
c) $f(-1) = 0$.
d) $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} (x+1), & x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \text{Phương án C đúng.}$$

$$f(x) \geq 0, \forall x. \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow \text{Phương án D đúng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x-1) = 0. \Rightarrow \text{Phương án A đúng.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x-1}{x+1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \text{ khi } x \rightarrow -1.$$

Suy ra không tồn tại giới hạn của tỷ số $\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ khi $x \rightarrow -1$.
Do đó hàm số đã cho không có đạo hàm tại $x = -1$.

Câu 24: Cho đường cong có phương trình $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Tiếp tuyến của đường cong đó tại điểm có hoành độ bằng 0 :

- a) Không cắt đường thẳng $y = -2x - 3$.
b) Không cắt đường thẳng $y = 2x + 5$.
c) Vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x - 6$.
d) Không song song, không trùng đường thẳng $y = 3x + 1$.

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2}. \text{ Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 0 là } y'(0) = 3.$$

Câu 25: Cho parabol $y = x^2 + 3x + 2$. Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

- a) Tiếp tuyến của parabol tại $M(1; 6)$ trùng đường thẳng $y = 5x + 1$.
b) Tiếp tuyến của parabol tại $M(1; 6)$ song song với đường thẳng $y = 5x + 2$.

c) Tiếp tuyến của parabol tại $M(1;6)$ vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x - 3$.

d) Tiếp tuyến của parabol tại $M(1;6)$ đi qua điểm $N(0;-1)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Ta có $y' = 2x + 3, y'(1) = 5$. Phương trình tiếp tuyến của parabol tại $M(1;6)$ là đường thẳng $y = 5x + 1$.

•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường đi được trong t giây tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$.

Trả lời: $5(m/s)$

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$ là:

$$s'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}(t - 5)(t + 5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{1}{2}(t + 5) = 5.$$

Vậy $v(5) = s'(5) = 5(m/s)$.

Câu 2: Một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao $461,3m$ xuống mặt đất, với phương trình chuyển động $s(t) = 4,9t^2$. Tính vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất, bỏ qua sức cản không khí. (Đơn vị m/s , kết quả gần đúng làm tròn đến hàng phần chục)

Trả lời: $95,1(m/s)$

Lời giải

Với bất kì t_0 , ta có:

$$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4,9t^2 - 4,9t_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} 4,9(t + t_0) = 9,8t_0.$$

Do đó, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 9,8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của toà tháp là $461,3m$ nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1 .

Từ đó, ta có: $4,9t_1^2 = 461,3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461,3}{4,9}}$ (giây).

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là:

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \cdot \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \approx 95,1(m/s).$$

Câu 3: Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/ năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi (làm tròn đến hàng phần nghìn) mà người đó nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

Lãi kép với kì hạn 6 tháng;

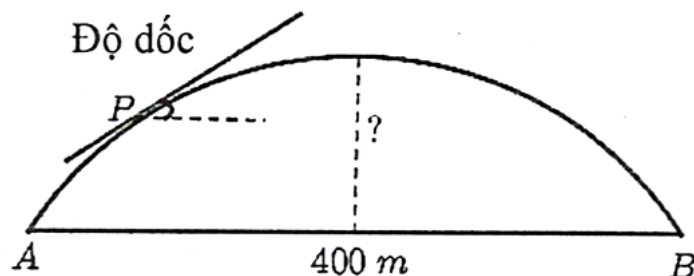
Trả lời: $107,123$ (triệu đồng)

Lời giải

Số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm theo thể thức lãi kép với kì hạn 6 tháng là:

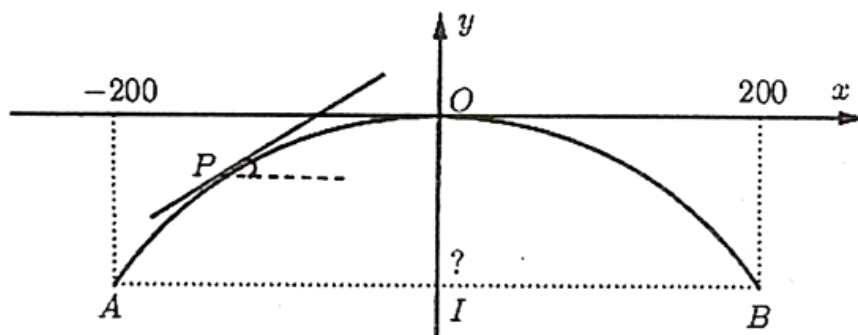
$$T = A \left(1 + \frac{r}{2} \right)^2 = 100(1 + 3,5\%)^2 = 107,123 \quad (\text{triệu đồng})$$

Câu 4: Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Trả lời: $17,6m$

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương).

Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol bằng $k = y'(x_0) = -2ax_0, -200 \leq x_0 \leq 200$.

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu (độ dốc dương) là $|k| = 2a|x| \leq 400a$.

Vì độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° nên ta có:

$$400a \leq \tan 10^\circ \Leftrightarrow a \leq \frac{4,408174518}{10000}.$$

Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là đoạn OI , cũng chính là độ lớn của tung độ điểm B khi a đạt giá trị lớn nhất.

Do đó, $OI = |-a \cdot 200^2| = 17,6(m)$.

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là $17,6m$.

Câu 5: Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và Q được tính theo Culông. Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4(s)$.

Trả lời: $17(C/s)$

Lời giải

Ta có: $Q'(t) = (2t^2 + t)' = 4t + 1$ nên cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4(s)$ là $Q'(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17(C/s)$

Câu 6: Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất, biết độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi phương trình $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Trả lời: $24,5(m/s)$

Lời giải

Khi vật chạm đất thì $h=0 \Leftrightarrow 24,5t - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t=5$.

Ta có: $v(t) = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ nên tốc độ của vật tại thời điểm nó chạm đất $t=5$ là $v(5) = |h'(5)| = |24,5 - 9,8 \cdot 5| = 24,5 (m/s)$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^3 + x$ có đồ thị (C) .

Tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1;

Trả lời: -5

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (-2x^3 + x)' = -6x^2 + 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 là: $f'(1) = -6 \cdot (1)^2 + 1 = -5$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^3 + x$ có đồ thị (C) .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2; 14)$.

Trả lời: $y = -23x - 32$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (-2x^3 + x)' = -6x^2 + 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-2; 14)$ là: $f'(-2) = -6 \cdot (-2)^2 + 1 = -23$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y - 14 = -23(x + 2) \Leftrightarrow y = -23x - 32.$$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$ có đồ thị (C) .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

Trả lời: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Lời giải

Toạ độ giao điểm của (C) với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(-1; 0)$ là:

$$y - 0 = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$ có đồ thị (C) .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$.

Trả lời: $y = -3x + \frac{7}{3}$

Lời giải

Toạ độ giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$ là nghiệm của hệ

phương trình:
$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{3x} \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{3x} = x+1 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(-1; 0)$ là:

$$y - 0 = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ là:

$$y - \frac{4}{3} = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = -3\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{7}{3}.$$

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 + 1$ tại $x_0 = 2$.

Trả lời: 24

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x^2 + 2x + 4) = 24.$$

Vậy $f'(2) = 24$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x_0 = -1$.

Trả lời: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Câu 13: Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ . Tính } f'(0) \text{ .}$$

Trả lời: $\frac{1}{16}$

Lời giải

Với $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4 - x)}{4x(2 + \sqrt{4 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - 0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Câu 14: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3$.

Tại điểm có hoành độ bằng -2 .

Trả lời: $y = 4x + 5$

Lời giải

Ta có: $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 3 = -3$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 4(x + 2) - 3 = 4x + 5$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3 .

Trả lời: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

Lời giải

$$+ \text{Ta có: } y_0 = 3 \Rightarrow \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 2} = 3 \Rightarrow x_0 = 5$$

$$+ f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{2x-1}{x-2} - 3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x+5}{x-5} = -\frac{1}{3}$$

$$+ \text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = -\frac{1}{3}(x - 5) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -3 .

Trả lời: -1

Lời giải

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $x_0 = -3$ là:

$$f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{x+2} + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+2} = -1$$

Câu 17: Một người gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm theo thể thức lãi kép liên tục. Tính số tiền người đó nhận được sau: 1 tháng;

Trả lời: 20100250 đồng.

Lời giải

Ta có $r = 6\% = 0,06$; 1 tháng $= \frac{1}{12}$ năm.

Công thức tính tổng số tiền lãi và vốn sau t năm là $T = A \cdot e^{rt}$

Số tiền người đó nhận được sau 1 tháng là $S = 20 \cdot 10^6 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{1}{12}} \simeq 20100250$ đồng.

Câu 18: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $7,5\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính sau thời gian ngắn nhất (theo năm) để số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Trả lời: ít nhất 10 năm

Lời giải

Giả sử số tiền người đó gửi vào ngân hàng là A . Sau n năm số tiền người đó nhận được là $2A$

Áp dụng công thức $S = Ae^{0,075t}$ ta có $2A \leq A \cdot e^{0,075t}$
 $\Leftrightarrow 0,075t \geq \ln 2 \Leftrightarrow t \geq \approx 9,24$.

Người đó phải gửi ít nhất 10 năm thì số tiền thu được gấp đôi số tiền ban đầu.

Câu 19: Số lượng vi khuẩn trong một phòng thí nghiệm A được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Tính thời gian kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con?

Trả lời: 8 phút

Lời giải

Ta có $s(3) = 625$ nghìn con $\Rightarrow s(0) \cdot 2^3 = 625 \Rightarrow s(0) = \frac{625}{8}$ nghìn con.

Để số lượng vi khuẩn là 20 triệu con $\Rightarrow s(0) \cdot 2^t = 20000 \Rightarrow 2^t = 20000 : \frac{625}{8}$
 $\Rightarrow 2^t = 2^8 \Rightarrow t = 8$.

Vậy thời gian để số vi khuẩn đạt 20 triệu con là 8 phút.

Câu 20: Người ta sử dụng công thức $S = A \cdot e^{nr}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó A là số dân của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau n năm và r là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là 78685800 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,2%. Hãy tính xem dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

Trả lời: 2029

Lời giải

Theo công thức tăng trưởng mũ: $S = A \cdot e^{nr}$

$$\Rightarrow 110000000 = 78685800 \cdot e^{1,2\% \cdot n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{1,2\%} \ln \frac{110000000}{78685800} \simeq 27,91$$

$\Rightarrow$ Sau 28 năm thì dân số Việt Nam đạt 110 triệu người.

Vậy dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm 2029.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x = 0.$$

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số

Trả lời: $f'(0) = \frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$.

Vậy $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;4)$.

Trả lời: $y = 7x - 3$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 4x$. Do đó $y'(1) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;4)$ là $y = 7x - 3$.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: 9x - y + 6 = 0$.

Trả lời: $y = 9x - 6$

Lời giải

Đường thẳng $\Delta: 9x - y + 6 = 0 \Rightarrow y = 9x + 6$ có hệ số góc là 9.

Vì tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng Δ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = 9$.

Suy ra hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = k \Rightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$.

Với $x = -1$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x + 6$ (loại vì trùng với đường thẳng Δ).

Với $x = 3$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 6$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 6$.

Câu 24: Ông Năm gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất $9,1\%$ năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà ông Năm nhận được sau một năm nếu tiền lãi được tính

theo thể thức lãi kép với kì hạn 3 tháng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Trả lời: $218,8$ triệu đồng.

Lời giải

Ta có: $A=200; r=14\%$ và $n=\frac{12}{3}=4$.

Vậy tổng số tiền vốn và lãi mà ông Năm nhận được sau một năm nếu tiền lãi được tính theo thể thức lãi kép với kì hạn 3 tháng là

$$T=A\left(1+\frac{r}{n}\right)^n=200\cdot\left(1+\frac{9,1\%}{4}\right)^4\approx 218,8 \text{ triệu đồng.}$$

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+x+|x+1|}{x}$ tại $x_0=-1$.

Trả lời: không có đạo hàm

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{x^2+x+|x+1|}{x(x+1)}$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)} = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-1}{x(x+1)} = 2.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}.$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=-1$.

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{ khi } x \geq 1 \\ \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{ khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0=1$.

Trả lời: không có đạo hàm

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+3) = 5;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+3x-4) = 0. \quad \text{Dẫn tới } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Suy ra hàm số không liên tục tại $x_0=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=1$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{ khi } x \leq 1 \\ x^2+bx+1 & \text{ khi } x > 1 \end{cases}$.

Tìm b để hàm số này có đạo hàm tại $x=1$.

Trả lời: $b=1$

Lời giải

Ta có: $f(1)=3; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + bx + 1) = b+2$.

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow b+2=3 \Rightarrow b=1$. Với $b=1$, thì $f'(1^+) = f'(1^-) = 3$.

Vậy $b=1$ thì hàm số đã cho có đạo hàm tại $x=1$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>