

Câu 1.(7 điểm)

- a. Tìm tất cả những giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0 \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (4 điểm)

- a. Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đáy hình hộp chữ nhật có chiều cao $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/ m^3 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^3 . Xác định chi phí thấp nhất để làm được bể cá.
- b. Chia hết 30 quyển vở giống hệt nhau cho 3 học sinh là: Nam, Bình, Minh, mỗi bạn được ít nhất 1 quyển. Tính xác suất để ba bạn mỗi người nhận được số vở khác với hai người còn lại.

Câu 3.(5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh

$a\sqrt{3}$, $SA = a$, $SB = SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD .

- a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCM$.
- b. Tính khoảng cách giữa SM và BC .

Câu 4.(2 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $c < a, c < b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a-b)^2 \left[\left(\frac{2a+c}{b^2+c^2} \right)^2 + \left(\frac{2b+c}{a^2+c^2} \right)^2 - \frac{64}{ab+bc+ca} + \frac{8(a^2+1)}{a(a-b)^2} \right].$$

- Câu 5. (2 điểm)** . Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đặt $AM = x, AN = y$. Tìm x, y để tam giác DMN có diện tích nhỏ nhất, lớn nhất.

----- **Hết** -----

Họ tên thí sinh:SBD.....

Ghi chú:

- Học sinh không được sử dụng máy tính bỏ cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

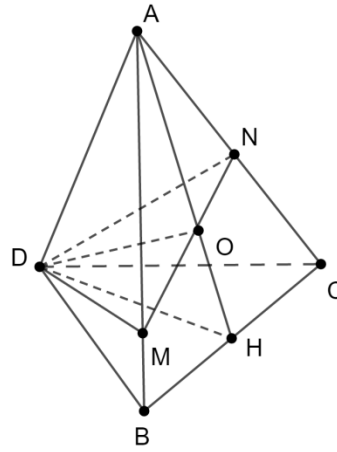
Câu	ý	Nội dung	Điểm
1 7đ	a 3,5đ	Tìm tất cả những giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$	
		Xét hàm số $f(x) = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}, \forall x \in (0; +\infty)$. Ta có. $f'(x) = 3x^2 + m + \frac{1}{x^4}, \forall x \in (0; +\infty)$	0,5
		Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $f'(x) = 3x^2 + m + \frac{1}{x^4} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$	0,5
		$\Leftrightarrow -m \geq 3x^2 + \frac{1}{x^4} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$	0,5
		$\Leftrightarrow -m \geq \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{x^4} \geq 4\sqrt{\frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x^4}} = 2\sqrt{6}, \forall x \in (0; +\infty)$	1
		$\Leftrightarrow m \leq -2\sqrt{6}$	0,5
		Vậy giá trị m cần tìm là: $m \leq -2\sqrt{6}$	0,5
	b 3,5đ	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0 \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$	
		Ta có: $\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 4-y \geq 0 \\ 2x+y+5 \geq 0 \\ 3x+2y+11 \geq 0 \end{cases} (*)$ Đặt $\sqrt{5-x} = a \geq 0; \sqrt{4-y} = b \geq 0$, phương trình $(17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0$ trở thành: $[17-3(5-a^2)].a + [3(4-b^2)-14]b = 0 \Leftrightarrow (3a^2+2).a = (3b^2+2).b \Leftrightarrow 3a^3+2a = 3b^3+2b$	0,5
		Xét hàm số $y = f(t) = 3t^3 + 2t$ trên $[0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Vì thế với $a \geq 0, b \geq 0$ thì $3a^3 + 2a = 3b^3 + 2b \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$. Suy ra $\sqrt{5-x} = \sqrt{4-y} \Leftrightarrow 5-x = 4-y \Leftrightarrow y = x-1$.	0,5
		Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình: $2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13 \quad (1)$.	

		Điều kiện $x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right]$. Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (2\sqrt{3x+4}-2) + (3\sqrt{5x+9}-6) = x^2 + 6x + 5$ $\Leftrightarrow \frac{4(3x+4)-4}{2\sqrt{3x+4}+2} + \frac{9(5x+9)-36}{3\sqrt{5x+9}+6} = (x+1)(x+5)$ $\Leftrightarrow \frac{6(x+1)}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15(x+1)}{\sqrt{5x+9}+2} = (x+1)(x+5)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} = x+5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} = x+5 \quad (2) \end{cases}$	1
		Phương trình (2) tương đương với $\frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} - x = 5$. Đặt $g(x) = \frac{6}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+2} - x, x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right]$. Ta có $g'(x) = \frac{-9}{(\sqrt{3x+4}+1)^2 \cdot \sqrt{3x+4}} - \frac{75}{2(\sqrt{5x+9}+2)^2 \cdot \sqrt{5x+9}} - 1 < 0, \forall x \in \left(-\frac{4}{3}; 5\right)$ Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$ Vì thế phương trình $g(x) = 5$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left[-\frac{4}{3}; 5\right]$. Ta lại có $x = 0$ là nghiệm của phương trình $g(x) = 5$ nên đây là nghiệm duy nhất.	1
		Với $x = -1$ thì $y = -2$. Với $x = 0$ thì $y = -1$. So sánh điều kiện (*), hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(-1; -2); (0; -1)$.	1
2	a	Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đáy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60cm, thể tích là 96.000cm ³ , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng/m ³ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m ³ . Xác định chi phí thấp nhất để làm được bể cá.	
4 đ	2đ	Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp chữ nhật $(x, y, h > 0; m)$. Có $V = xyh \Leftrightarrow 0,096 = 0,6xy \Leftrightarrow y = \frac{4}{25x}$.	0,5

3		Diện tích đáy bể là: $xy = \frac{4}{25} (m^2)$. $\Rightarrow$ Chi phí làm đáy bể: $100.000 \cdot \frac{4}{25} = 16.000$ (đồng) Diện tích xung quanh của bể: $2 \left(0,6x + \frac{0,096}{x} \right)$ $\Rightarrow$ Chi phí làm mặt xung quanh của bể: $2 \left(0,6x + \frac{0,096}{x} \right) \cdot 70.000$ (đồng)	0,5
		Do vậy, tổng chi phí làm bể là: $T(x) = 16.000 + 2 \left(0,6x + \frac{0,096}{x} \right) 70.000$. Theo bất đẳng thức côsi có: $0,6x + \frac{0,096}{x} \geq 2\sqrt{0,6 \cdot 0,096} = \frac{12}{25}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $0,6x = \frac{0,096}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{25} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$.	0,5
		Khi đó $T(x) \geq 16.000 + 2 \cdot \frac{12}{25} 70.000 = 83.200$. Vậy chi phí thấp nhất để làm bể cá là 83.200 (đồng).	0,5
	b 2đ	Chia hết 30 quyển vở giống hệt nhau cho 3 học sinh là: Nam, Bình, Minh, mỗi bạn được ít nhất 1 quyển. Tính xác suất để ba bạn mỗi người nhận được số vở khác với hai người còn lại.	
		Ta có $n(\Omega) = C_{29}^2 = 406$	0,5
		Xét A là biến cố số vở nhận được có giống nhau; Trường hợp 1: Cả 3 bạn nhận được số vở giống nhau có 1 cách Trường hợp 2: Nam có số vở giống Bình nhưng khác với Minh Do Nam và Bình có số vở giống nhau nên số vở của Minh là số chẵn lớn hơn 0 và bé thua 30 nên có 14 cách Trường hợp 3: Nam có số vở giống Minh nhưng khác với Bình tương tự có 14 cách Trường hợp 4: Bình có số vở giống Minh nhưng khác với Nam tương tự có 14 cách	0,5
		Vậy $n(A) = 1 + 42 = 43$ nên $P(A) = \frac{43}{406}$	0,5
		Xác suất để ba bạn mỗi người nhận được số vở khác với hai người còn lại là: $\frac{363}{406}$	0,5
3 5 đ		Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{3}$, $SA = a$, $SB = SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCM$. b. Tính khoảng cách giữa SM và BC.	
		Lời giải	

3a 3d	Gọi O là tâm của hình bình thoi $ABCD$. Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle SBD$ ta có: $AB = SB$, $AD = SD$, BD chung. Suy ra $\triangle ABD = \triangle SBD \Rightarrow AO = SO$ (hai đường trung tuyến tương ứng). Tương tự $CO = SO$. Tam giác SAC có đường trung tuyến SO và $AO = CO = SO$. Do đó $\triangle SAC$ vuông tại S. Từ đó ta tính được $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2a$, $OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = a\sqrt{2}$, $BD = 2a\sqrt{2}$ Diện tích của tam giác BCD: $S_{\triangle BCD} = a^2\sqrt{2}$ (công thức Hê-rông). Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ là $r = \frac{BC \cdot CD \cdot BD}{4S_{\triangle BCD}} = \frac{3a}{2}$. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Vì $SB = SC = SD$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ và $HB = r = \frac{3a}{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích tứ giác $ABCM$: $S = S_{ABCD} - S_{AMD} = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCM$ là $V = \frac{1}{3}S.SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.	1 0,5 0,5 1
3b 2d	Tính khoảng cách giữa SM và BC. Gọi N là trung điểm của AB. Dễ thấy $MN \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (SMN)$ nên $d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(C, (SMN))$ Mà $CO = 2HO \Rightarrow d(C, (SMN)) = 2d(H, (SMN))$. Kẻ $HI \perp MN (I \in MN)$, kẻ $HK \perp SI (K \in SI)$ ta có $HK = d(H, (SMN))$. Ta có: $d(D, BC) = d(A, BC) = \frac{2S_{BCD}}{BC} = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow HI = d(H, MN) = \frac{1}{4}d(A, BC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.	0,5 0,5 0,5

		$HK = \frac{HI \cdot HS}{\sqrt{HI^2 + HS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{66}}{22} \Rightarrow d(C, (SMN)) = 2HK = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$ Vậy $d(BC, SM) = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$	0,5
4	2đ	Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $c < a, c < b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-b)^2 \left[\left(\frac{2a+c}{b^2+c^2} \right)^2 + \left(\frac{2b+c}{a^2+c^2} \right)^2 - \frac{64}{ab+bc+ca} + \frac{8(a^2+1)}{a(a-b)^2} \right]$	
		Ta có : $\frac{1}{(a^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4}; \frac{1}{(b^2+c^2)^2} \geq \frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^4}; \frac{-1}{ab+bc+ca} \geq \frac{-1}{\left(a+\frac{c}{2}\right) \cdot \left(b+\frac{c}{2}\right)}$ Suy ra $P \geq (a-b)^2 \left[\frac{4\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^4} + \frac{4\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4} - \frac{64}{\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)} \right] + 8\left(a+\frac{1}{a}\right)$	0,5
		Đặt $a+\frac{c}{2}=x; b+\frac{c}{2}=y; (x>0; y>0)$. Ta có $P \geq (x-y)^2 \left[4\frac{x^2}{y^4} + 4\frac{y^2}{x^4} - \frac{64}{xy} \right] + 16\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^4}$ Hay $P \geq 4\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 16 \right] + 16.$	0,5
		Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, (t \geq 2)$. Xét hàm số $f(t) = 4(t-2)(t^3-3t-16)$ Ta có $f'(t) = 4(4t^3-6t^2-6t-10), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$	0,5
		Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq -\frac{63}{4}.$ Suy ra $P \geq \frac{1}{4}$ và $P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}$. Vậy $P_{\min} = \frac{1}{4}.$	0,5
5	2đ	Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mp(ABC). Đặt $AM = x, AN = y$. Tìm x, y để tam giác DMN có diện tích nhỏ nhất, lớn nhất.	



0,5

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABC . Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $DO \perp (ABC)$. Theo đề bài, mặt phẳng $(DMN) \perp (ABC)$ nên suy ra $O \in MN$.

Tam giác DMN có $DO \perp MN$ nên $S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2} DO \cdot MN$. Mà DO là hằng số nên $S_{\triangle DMN}$ lớn nhất khi MN lớn nhất, nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác AMN ta có $MN^2 = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy$.

Như vậy M, N thay đổi sao cho đoạn thẳng MN luôn đi qua O . Ta có $0 < x, y \leq 1$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} - x\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Vì $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MO}$ cùng hướng nên $\frac{\frac{1}{3}}{y} = \frac{\frac{1}{3} - x}{-x} > 0 \Leftrightarrow y\left(\frac{1}{3} - x\right) = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow 3xy = x + y$.

Từ $0 < x, y \leq 1$, ta có $x + y = 3xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ta có $MN^2 = (x+y)^2 - (x+y)$.

0,5

Đặt $t = x + y$. Ta có $t = x + \frac{x}{3x-1}$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $t'(x) = \frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}$. Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
t'		0	+
t	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$

Quan sát bảng biến thiên, ta có $\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{3}{2}$.

Ta có $MN^2 = f(t) = t^2 - t$. Khảo sát sự biến thiên của hàm $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$ ta được

0,5

$$MN \text{ min} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}, MN \text{ max} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = \frac{1}{2} \\ y = 1, x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

