

Người làm: Phạm Thị Thảo

Zalo: Phạm Thị Thảo - số đt zalo: 0916727055

Email: thaongocduc@gmail.com

CD6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Dạng 1. Chứng minh một số, một tổng là số chính phương

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2. Chứng minh rằng hiệu $a - b$ là một số chính phương.

Lời giải

$$a = \underbrace{111\dots111}_{60 \text{ chữ số } 1} = \underbrace{111\dots111}_{30 \text{ chữ số } 1} \underbrace{00\dots000}_{30 \text{ chữ số } 0} + \underbrace{111\dots111}_{30 \text{ chữ số } 1} = \underbrace{111\dots111}_{30 \text{ chữ số } 1} \cdot 10^{30} + \underbrace{111\dots111}_{30 \text{ chữ số } 1}$$

Ta có:

$$c = \underbrace{111\dots111}_{30 \text{ chữ số } 1} \Rightarrow 9c + 1 = \underbrace{999\dots999}_{30 \text{ chữ số } 9} + 1 = 10^{30}$$

Đặt

$$\text{Khi đó } a = c \cdot (9c + 1) + c = 9c^2 + 2c \quad \text{và} \quad b = 2c$$

$$\text{Xét hiệu } a - b = 9c^2 + 2c - 2c = 9c^2 = (3c)^2$$

Vậy $a - b = (3c)^2$ là số chính phương.

Dạng 2. Chứng minh một số không phải là số chính phương

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quảng Xương, Tiên Hải 2022 - 2023)

Cho $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số chính phương

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$$

Vì số chính phương phải chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

Do đó $a + b + c = 3 \cdot 37 \cdot k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Điều này vô lý vì: $3 \leq a + b + c \leq 27$

Vậy A không là số chính phương

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên và thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Vì $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$ nên $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = 2 + x(x-1) \cdot g(x) \quad \text{trong đó } g(x) \text{ là 1 đa thức với hệ số nguyên.}$$

$$\text{Ta có } f(7) = 2 + 42 \cdot g(7) \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{nên } f(7) \text{ không thể là số chính phương}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà 2022 - 2023)

Cho p là tích của 2023 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương

Lời giải

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 và 4 thì chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1

+) Từ giả thiết, suy ra P chia hết cho $2; 3$ nhưng không chia hết cho 4

Như vậy, vì $P \div 3$ suy ra $P - 1$ chia cho 3 dư 2 (mâu thuẫn) $\Rightarrow P - 1$ không là số chính phương.

+) Vì $P \div 2$ và P không chia hết cho 4 , suy ra P chia cho 4 dư $2 \Rightarrow P + 1$ chia cho 4 dư 3 (mâu thuẫn) nên $P + 1$ cũng không là số chính phương.

Vậy $P - 1, P + 1$ không là số chính phương.

Dạng 3. Tìm số chính phương

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Thành Phố Phúc Yên-Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng nếu cộng chữ số hàng nghìn với 3 và trừ chữ số hàng đơn vị đi 3 ra vẫn được một số chính phương

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm với $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$

Ta có
$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+3)bc(d-3)} = m^2 \end{cases} \text{ với } k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 99$$

Suy ra
$$\begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 3000 - 3 = m^2 \end{cases}$$

Do đó $m^2 - k^2 = 2997 \Rightarrow (m+k)(m-k) = 2997 = 81.37 = 111.27 = 333.9$

Vì tích trên là lẻ nên m, k khác tính chẵn lẻ và hai thừa số đều lẻ mà $k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 99$ nên ta có các trường hợp sau:

TH1:
$$\begin{cases} m - k = 37 \\ m + k = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 59 \\ k = 22 \end{cases}$$

Khi đó $k^2 = 22^2 = 484$, chỉ có 3 chữ số, loại.

TH2:
$$\begin{cases} m + k = 111 \\ m - k = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 69 \\ k = 42 \end{cases}$$

Khi đó $m^2 = 69^2 = 4761; k^2 = 42^2 = 1764$ (thỏa mãn)

Câu 2. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1; 6n+1; 20n+1$ đều là các số chính phương.

Lời giải

+ Số chính phương lẻ chia 8 dư 1 .

+ Số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1 .

Ta thấy $6n+1$ là số chính phương lẻ nên chia 8 dư 1

Suy ra $6n \div 8 \Rightarrow 3n \div 4$ mà $(3; 4)$ suy ra $n \div 4$

Nên $n+1$ là số chính phương lẻ do đó $n+1$ chia 8 dư $1 \Rightarrow n \div 8(1)$

Ta lại có $(n+1) + (20n+1) = 21n+2$ chia 3 dư 2

Suy ra $n+1$ và $20n+1$ đều chia 3 dư 1 (số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1)

Từ đó ta có $n \equiv 3(2)$

Mặt khác $(3;8)=1 \quad (3)$

Từ (1); (2); và (3) Suy ra $n \equiv 24 \Rightarrow n \in B(24) = \{0; 24; 48; \dots\}$

Vì n là số nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau:

+ Với $n=24$ ta có $20n+1=481$ (không là số chính phương) $\Rightarrow n=24$ loại.

+ với $n=48$ ta có $n+1=49=7^2$; $6n+1=289=17^2$; $20n+1=961=31^2$
 $\Rightarrow n=48$ thỏa mãn bài toán

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất $n=48$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>