|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD – ĐT TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN** | **KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4**  **LẦN THỨ XXVIII – NĂM 2024** |

**ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC**

MÔN : **TOÁN** – KHỐI : **11**

**Câu 1 (4,0 điểm).** Cho hai đa thức  và 

1. Chứng minh đa thức  có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
2. Gọi hai nghiệm thực phân biệt của  là  và  Chứng minh  là một nghiệm của 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1a** |  | **1,0** |
| Mà  và  có đúng hai nghiệm thực. | **1,0** |
| **1b** | Dễ thấy  và | **0,5** |
| Đặt  ta có  (\*) | **0,5** |
| Lại có | **0,5** |
| Thay vào (\*) thu được  Vậy  là một nghiệm của đa thức | **0,5** |

**Câu 2 (3,0 điểm).** Cho dãy số  biết rằng  với mọi  nguyên dương. Chứng minh dãy số  có giới hạn và tính giới hạn đó.

**Cách 1.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **2** | Từ giả thiết ta thấy  tồn tại  sao cho | **0,5** |
| Ta có | **0,5** |
|  | **0,5** |
| Mà | **0,5** |
| Khi đó :  Hay | **0,5** |
|  | **0,5** |

**Cách 2.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **2** | Dễ thấy  Ta có | **1,0** |
| Mà  Nên | **1,0** |
| Do đó  Do | **1,0** |

**Câu 3 (4,0 điểm).** Cho số nguyên dương   Gọi  là ước nguyên tố của  Giả sử  với  là số nguyên dương lẻ và  là số nguyên dương.

1. Chứng minh 
2. Chứng minh  chia hết cho 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **3a** | Dễ thấy  lẻ nên theo định lý Fermat | **0,5** |
| Từ giả thiết | **0,5** |
| Ta có  Nếu | **0,5** |
| Khi đó  điều này vô lý do  Do đó phải có | **0,5** |
| **3b** | Ta có | **0,5** |
|  | **0,5** |
| Đặt  Tuy nhiên do  và  và  Đến đây ta thấy | **0,5** |
| Do đó | **0,5** |

**Câu 4 (5,0 điểm).** Cho tam giác  nhọn  nội tiếp đường tròn  và có  là trực tâm. Gọi  là trung điểm cạnh  Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt đoạn thẳng  tại  tiếp tuyến của  tại  cắt đường thẳng  ở điểm 

1. Chứng minh  và 
2. Đường thẳng  cắt hai cạnh  lần lượt tại  Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  tiếp xúc với đường tròn 

A diagram of a triangle with lines and circles

Description automatically generated

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **4a** | Vẽ đường cao  của tam giác  Dễ thấy  là tiếp tuyến của  tại  Gọi  là giao điểm thứ hai của  và  Ta có | **0,5** |
| Hai tam giác  đồng dạng  Hai tam giác  đồng dạng  Khi đó  Vậy | **1,0** |
| Hai tam giác  đồng dạng  Tương tự | **0,5** |
| Gọi  là điểm đối xứng của  qua  (do  đối xứng nhau qua ). Lại có  là tiếp tuyến của  Do đó | **0,5** |
| **4b** | Đường thẳng  cắt lại  tại  khác  Do ba điểm  thẳng hàng nên hai đường thẳng  cắt nhau tại  thuộc đường tròn | **0,5** |
| Dễ thấy  tiếp xúc  nội tiếp. Tương tự  nội tiếp. | **0,5** |
| Lúc này  (Do ).  Mà | **1,0** |
| Ta có  Từ đây suy ra hai đường tròn  tiếp xúc nhau tại  Vậy  và  tiếp xúc nhau. | **0,5** |

**Câu 5 (4,0 điểm).** Ban chấp hành Đoàn trường THPT X gồm có  thành viên. Trong năm học, Đoàn trường tổ chức  chương trình, mỗi chương trình có đúng  thành viên trong ban chấp hành tham gia. Mỗi thành viên trong ban chấp hành tham gia ít nhất một chương trình.

1. Cho  Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có đúng một thành viên trong ban chấp hành tham gia cả hai chương trình đó. Chứng minh 
2. Cho  Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có không quá  thành viên trong ban chấp hành cùng tham gia. Chứng minh 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **5a** | Ta đánh số thứ tự các chương trình là  Giả sử chương trình  có ba thành viên tham gia là  Khi đó mỗi chương trình  có đúng một trong ba thành viên  tham dự. Theo nguyên lý Dirichlet thì có một trong ba thành viên  tham gia ít nhất ba trong bảy chương trình | **0,5** |
| Không giảm tổng quát giả sử  là thành viên tham gia ba chương trình  Khi đó giả sử các thành viên tham dự chương trình  lần lượt là  Ta chứng minh  có tham dự tất cả chương trình  Thật vậy : giả sử  không tham dự chương trình  Khi đó trong các cặp  mỗi cặp có đúng một thành viên tham dự chương trình  Điều này vô lý do chương trình này chỉ có đúng  thành viên tham dự. | **1,0** |
| Như vậy  có tham dự đủ tám chương trình và ngoài  thì mỗi chương trình còn có thêm hai thành viên khác | **0,5** |
| **5b** | Gọi  là số bộ  trong đó  là hai chương trình (không có thứ tự) và  là thành viên tham gia cả hai chương trình. Số cách chọn cặp  là  Do hai chương trình có chung không quá ba thành viên nên với mỗi cặp  có không quá  cách chọn thành viên | **0,5** |
| Ta đếm  bằng cách khác. Với mỗi thành viên , ta ký hiệu  là số chương trình mà thành viên này tham gia. Do mỗi chương trình có  thành viên nên  Với mỗi thành viên , số cách chọn cặp  là | **0,5** |
| Do đó | **0,5** |
| Giả sử  các đẳng thức ở trên phải xảy ra. Khi đó  và do  (vô lý). Vậy ta phải có | **0,5** |

**-------------------HẾT-------------------**