

CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 10. Tìm ẩn với điều kiện nguyên

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tích của các số nguyên x (với $x \neq 1$) sao cho $\frac{4}{x-1}$ có giá trị nguyên:

A. 6 B. 0 C. 15 D. -9

Lời giải

Chọn B

$\frac{4}{x-1}$ có giá trị nguyên (với $x \neq 1$)

$\Rightarrow 4 : (x-1) \Rightarrow x-1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Rightarrow x \in \{2; 0; 3; -1; 5; -3\}$

Tích của các số nguyên x là: $2 \cdot 0 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-3) = 0$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + y + xy = 2$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x + y + xy = 2$

$\Rightarrow x + y + xy + 1 = 2 + 1$

$\Rightarrow (x+1) + (xy+y) = 3$

$\Rightarrow (x+1) + y(x+1) = 3$

$$\text{P } (x+1)(y+1) = 3$$

$$3 = 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$$

Lại có:

Nên ta có bảng:

$x+1$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1
x	0	2	-2	-4
y	2	0	-4	-2

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ là: $(0; 2)$; $(2; 0)$; $(-2; -4)$; $(-4; -2)$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Với x nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2022 - x}{2 - x}$ là

A. 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } A = \frac{2022 - x}{2 - x} = \frac{2 - x + 2020}{2 - x} = 1 + \frac{2020}{2 - x}$$

A lớn nhất khi $\frac{2020}{2 - x}$ lớn nhất

Vì $2020 > 0$ và không đổi nên

$\frac{2020}{2 - x}$ đạt giá trị lớn nhất khi: $2 - x > 0$ và đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà $2 - x \geq 0$ nên $2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$

$$\text{Khi đó: } A = 1 + \frac{2020}{1} = 2021$$

Vậy A đạt giá trị lớn nhất là 2021 khi $x = 1$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ của biểu thức: $x + y + z = xyz$.

Lời giải

Vì x, y, z nguyên dương nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$.

Theo bài ra: $x + y + z = xyz$. Chia cả hai vế cho xyz ta được:

$$1 = \frac{1}{zy} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{xz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

Suy ra $x^2 \leq 3$

Do đó $x = 1$.

Thay vào $x + y + z = xyz$ ta có:

$$1 + y + z = yz$$

$$yz - y - z - 1 = 0$$

$$y(z - 1) - (z - 1) - 2 = 0$$

$$(z - 1)(y - 1) = 2$$

Vì x, y, z nguyên dương nên $(z - 1)$ và $(y - 1)$ là các số nguyên.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $z - 1 = 1$; $y - 1 = 2$. Suy ra $z = 2$; $y = 3$.

Trường hợp 2: $z - 1 = 2$; $y - 1 = 1$. Suy ra $z = 3$; $y = 2$.

Vậy có hai bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn là $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố x, y thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Xét $x^2 - 2y^2 = 1$ suy ra $x^2 = 2y^2 + 1$

+ Nếu x chia hết cho 3 mà x là số nguyên tố nên $x = 3$

Thay vào tính được $y = 2$ là số nguyên tố (Chọn)

+ Nếu x không chia hết cho 3

$$(x^2 - 1) : 3$$

Chứng minh được

Suy ra $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên y^2 chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố nên y chia hết cho 3

Mà y là số nguyên tố nên $y = 3$

Thay vào tính được $x^2 = 19$ (loại)

Vậy có duy nhất cặp số $(x, y) = (2, 3)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x thỏa mãn: $2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$.

Lời giải

$$2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$$

$$\hat{U} (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) = -6279$$

$$A = VT = (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2)$$

Đặt

$$\text{Ta có: } VP = -6279 < 0$$

Mà vế trái là tích của 4 thừa số, nên trong đó có 1 hoặc 3 thừa số âm.

$$\text{Lại có: } 2 - x^2 < 12 - x^2 < 22 - x^2 < 32 - x^2$$

Ta có 2 trường hợp:

+TH1: Có 3 thừa số âm

$$\text{Do đó } 22 - x^2 < 0 < 32 - x^2 \Rightarrow 22 < x^2 < 32$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên x^2 là số chính phương

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

Thay vào biểu thức A ta được $A = -6279 = VP$ (thỏa mãn)

+TH2: Có 1 thừa số âm

$$\text{Do đó } 2 - x^2 < 0 < 12 - x^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 12$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên x^2 là số chính phương

$$\Rightarrow x^2 \in \{4; 9\}$$

$$\text{Với } x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow A = -8064 \neq VP \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow A = -6279 = VP \text{ (thỏa mãn)}$$

$$x \in \{\pm 3; \pm 5\}$$

Vậy

Câu 4. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } xy - 2x + y + 1 = 0$$

$$x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$(y - 2)(x + 1) = -3$$

$$\Rightarrow y - 2, x + 1 \in \{ -3; -1; 1; 3 \}$$

Ta có bảng

$x + 1$	-3	-1	1	3
$y - 2$	1	3	-3	-1
x	-4	-2	0	2
y	3	5	-1	1

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn $(x; y) \in \{(-4; 3); (-2; 5); (0; -1); (2; 1)\}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết: $2xy - x - y = 2$

Lời giải

Ta có: $2xy - x - y = 2$

$$x(2y - 1) = 2 + y$$

$$x = \frac{2 + y}{2y - 1} \quad (\text{vì } y \text{ nguyên nên } 2y - 1 \mid 0)$$

$$2x = \frac{2y + 4}{2y - 1} = 1 + \frac{5}{2y - 1}$$

$$2x = 1 + \frac{5}{2y - 1}$$

Vì x nguyên thì $2x$ nguyên

$$\text{Khi đó } \frac{5}{2y - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Ta có bảng các trường hợp xảy ra:

$2y - 1$	- 1	1	- 5	5
$2y$	0	2	- 4	6
y	0	1	- 2	3
x	- 2	3	0	1
	thoả mãn	thoả mãn	thoả mãn	thoả mãn

Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là: $(- 2; 0)$; $(1; 3)$; $(0; - 2)$; $(3; 1)$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $4x - xy + y = 7$ với x, y là các số nguyên.

Lời giải

Ta có: $4x - xy + y = 7$

$$x(4 - y) + y - 4 = 3$$

$$(x - 1)(4 - y) = 3$$

Lập bảng

$x - 1$	1	3	- 1	- 3
$4 - y$	3	1	- 3	- 1
x	2	4	0	- 2
y	1	3	7	5

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(2; 1)$; $(4; 3)$; $(0; 7)$; $(- 2; 5)$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$

$$12x - 15y - 18xy + 21 = 0$$

$$(12x - 18xy) + (10 - 15y) + 11 = 0$$

$$6x(2 - 3y) + 5(2 - 3y) = -11$$

$$(6x + 5)(2 - 3y) = -11$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $6x + 5; 2 - 3y \in \mathbb{Z}$ $6x + 5; 2 - 3y$ là ước của -11

Lập bảng

$6x + 5$	1	-11	11	-1
$2 - 3y$	-11	1	-1	11
x	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	-1
y	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-3
	loại	loại	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là: $(-1; -3), (1; 1)$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lang Chánh, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$

Suy ra: $x^2 + xy - 2x - 3y - 3x + 6 = 3$

$$\Leftrightarrow x(x + y - 2) - 3(x + y - 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + y - 2) = 3$$

Do x, y là số nguyên nên ta có:

$$(x - 3)(x + y - 2) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ x + y - 2 = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 3 = 3 \\ x + y - 2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 3 = -1 \\ x + y - 2 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 3 = -3 \\ x + y - 2 = -1 \end{cases}$$

Vậy các cặp $(x; y)$ là $(4; 1), (6; -3), (2; -3), (0; 1)$.

Câu 9. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)

Tìm $(x; y) \in \mathbb{Z}$ sao cho $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$.

Lời giải

Ta có $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$ suy ra $x(y - 1) = 2y^2 - 2y + 5$ (1)

Ta thấy $y = 1$ không thỏa mãn (1)

Do đó $y \neq 1$.

Khi đó (1) trở thành

$$x = \frac{2y^2 - 2y + 5}{y - 1}$$

$$x = 2y + \frac{5}{y - 1}$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên $y - 1$ là ước của 5.

TH1. $y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9$

TH2. $y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -5$

TH3. $y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 13$

TH4. $y - 1 = -5 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -9$

Vậy $(x; y) \in \{(9; 2); (-5; 0); (13; 6); (-9; -4)\}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$.

Lời giải

Ta có $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5)$ (1)

Khi $x = 5$ thì ta có $5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 0$ (vô lí)

Do đó $x \neq 5$ không thỏa mãn (1)

Khi $x \neq 5$ thì $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}$

$$y = \frac{x^2 - 5x - x + 5 + 3}{x - 5}$$

$$y = \frac{(x - 1)(x - 5) + 3}{x - 5}$$

$$y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$$

Vì x, y nguyên nên $x - 5$ là ước của 3 hay $x - 5 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow x \in \{2; 4; 6; 8\}$

+ Khi $x = 2$ thì $y = 0$

+ Khi $x = 4$ thì $y = 0$

+ Khi $x = 6$ thì $y = 8$

+ Khi $x = 8$ thì $y = 8$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(2; 0)$; $(4; 0)$; $(6; 8)$; $(8; 8)$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y thỏa mãn: $x + 3xy + y = -5$.

Lời giải

Ta có $x + 3xy + y = -5$

$3x + 9xy + 3y = -15$

$3x(1 + 3y) + (1 + 3y) = -14$

$(3x + 1)(1 + 3y) = -14$

Ta lập bảng

$3x + 1$	1	- 14	- 1	14	2	- 7	- 2	7
$3y + 1$	- 14	1	14	- 1	- 7	2	7	- 2
x	0	- 5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	- 1	2
y	- 5	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	- 1

x, y là số nguyên nên: $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương a, b để $\frac{a^2 - 2}{ab + 2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

Đề $\frac{a^2 - 2}{ab + 2}$ là số nguyên thì $(a^2 - 2) : (ab + 2)$

$\Rightarrow b(a^2 - 2) = a(ab + 2) - 2(a + b) : (ab + 2)$

$\Rightarrow 2(a + b) : (ab + 2)$

Do đó $2(a + b) = k(ab + 2)$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $k \geq 2$ thì $a + b \geq ab + 1 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) + 1 \geq 0$ (vô lí với $a, b \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $k = 1$. Từ đó $(a-2)(b-2) = 2$

Vì a, b là các số tự nhiên, suy ra $a-2; b-2$ là các số nguyên

Nên ta có bảng sau

$a-2$	-1	-2	1	2
$b-2$	-2	-1	2	1
a	1	0	3	4
b	0	1	4	3
	Loại		Loại	

Vậy ta được các cặp $(a; b)$ cần tìm là: $(1; 0); (4; 3)$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho: $xy + 2x - y = 5$.

Lời giải

$$xy + 2x - y = 5$$

$$x(y+2) - (y+2) = 5-2$$

$$(x-1)(y+2) = 3 \quad (1)$$

Vì x, y nguyên nên $x-1$ và $y+2$ nguyên.

Do đó $y+2 \in \{1, -1, 3, -3\}$

Mà y nguyên dương nên $y+2 \geq 3$

Nên $y+2 = 3 \Rightarrow y = 1 \quad (2)$

Thay (2) vào (1) tìm được $x = 2$.

Vậy $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, tỉnh Phú Yên 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y-1}$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{x+7}{7} = \frac{1}{y-1}$$

$$(x+7)(y-1) = 7$$

$$7 = 7.1 = 1.7 = (-7).(-1) = (-1).(-7)$$

Vì

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) \in \{(0; 2); (-6; 8); (-14; 0); (-8; -6)\}$$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(x; y) \in \{(0; 2); (-6; 8); (-14; 0); (-8; -6)\}$

Câu 15. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y biết $2xy - x + y = 6$

Lời giải

$$2xy - x + y = 6$$

$$\Rightarrow 4xy - 2x + 2y = 12$$

$$\Rightarrow 2x(2y - 1) + (2y - 1) = 12 - 1$$

$$\Rightarrow (2x + 1)(2y - 1) = 11$$

$$\text{Do đó } 2x + 1 \in U^{(11)}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Ta có bảng giá trị

$2x + 1$	- 11	- 1	1	11
$2y - 1$	- 1	- 11	11	1
x	- 6	- 1	0	5
y	0	- 5	6	1

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $(0; 6); (-1; -5); (5; 1); (-6; 0)$

Câu 16. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ biết $x + y = xy$

Lời giải

Ta có $x + y = xy \Rightarrow xy - x - y = 0$ nên $(x - 1)(y - 1) = 1$, khi đó $x - 1$ và $y - 1$ là ước của 1. Ta có bảng giá trị sau:

$x - 1$	1	- 1
$y - 1$	1	- 1
x	2	0
y	2	0

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(2; 2); (0; 0)$

Câu 17. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên thoả mãn: $x^2 - xy + y + 2 = 0$

Lời giải

Ta có: $x^2 - xy + y + 2 = 0$

Suy ra $y(x - 1) = x^2 + 2$ (1)

Xét $x = 1$, thay vào (1) ta được: $0 = 3$ (vô lí)

Do đó $x = 1$ không thoả mãn (1).

Xét $x \neq 1$, ta có:

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

$$y = x + 1 + \frac{3}{x - 1}$$

Để y nguyên thì $x - 1 \mid U^{(3)}$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1 \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1 \mid U^{(3)}$

Vì $U^{(3)} = \{\pm 1; \pm 3\}$ nên ta có bảng sau

$x - 1$	- 3	- 1	1	3
x	- 2	0	2	4
$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$	- 2	- 2	6	6
Kết luận	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $(x; y) \in \{(- 2; - 2); (0; - 2); (2; 6); (4; 6)\}$

Câu 18. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết: $xy - 3x + 2y = - 7$

Lời giải

Ta có $xy - 3x + 2y = - 7$

suy ra $x(y - 3) + 2(y - 3) = - 13$

hay $(y - 3)(x + 2) = - 13$

Vì x, y là các số nguyên nên $y - 3, x + 2$ cũng là các số nguyên.

Do đó ta có bảng giá trị sau

$x + 2$	- 1	1	- 13	13
$y - 3$	13	- 13	1	- 1

x	- 3	- 1	- 15	11
y	16	- 10	4	2
Kết luận	Nhận	Nhận	Nhận	Nhận

Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y) \in \{(- 3; 16); (- 1; - 10); (- 15; 4); (11; 2)\}$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x + y - 2xy = 4$.

Lời giải

Ta có: $x + y - 2xy = 4$

suy ra $x - 2xy + y - 4 = 0$

$$2x - 4xy + 2y - 8 = 0$$

$$2x - 4xy + 2y - 1 = 7$$

$$2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 7$$

$$(2x - 1)(1 - 2y) = 7$$

Lập bảng

$2x - 1$	1	7	- 1	- 7
$1 - 2y$	7	1	- 7	- 1
x	1	4	0	- 3
y	- 3	0	4	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x; y)$ cần tìm là $(1; - 3); (4; 0); (0; 4); (- 3; 1)$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$.

Lời giải

Do $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$ nên suy ra $(a + b)^3$ là số chính phương $\Rightarrow (a + b)$ cũng là số chính phương $(a + b) = k^2$ (với $k \in \mathbb{N}$) nên $\overline{ab}^2 = k^6 \Rightarrow \overline{ab} = k^3$ mà $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 10 \leq k^3 \leq 99$

Từ đó suy ra $k \in \{3; 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{27; 64\}$.

Thử lại:

+ $\overline{ab} = 27$ nên $a = 2, b = 7$ thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$.

+ $\overline{ab} = 64$ nên $a = 6, b = 4$ không thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$.
 Vậy $\overline{ab} = 27$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2xy - y = 2x + 2$.

Lời giải

Ta có:

$$2xy - y = 2x + 2 \Leftrightarrow 2xy - y - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2xy - 2x - y + 1 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(y - 1) - (y - 1) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(2x - 1) = 3$$

Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y - 1), (2x - 1)$ là các ước nguyên của 3

Ta có bảng sau

$(2x - 1)$	- 3	- 1	1	3
$(y - 1)$	- 1	- 3	3	1
x	- 1	0	1	2
y	0	- 2	4	2
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là $(- 1; 0)$; $(0; - 2)$; $(1; 4)$; $(2; 2)$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết $2xy - 6x - y = 21$.

Lời giải

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2xy - 6x - y = 21$

Ta có :

$$2xy - 6x - y = 21$$

$$(2xy - 6x) - (y - 3) = 24$$

$$2x(y - 3) - (y - 3) = 24$$

$$(y - 3)(2x - 1) = 24$$

Mà $x, y \in \mathbb{Z}$

Nên

$y - 3$	24	8	- 24	- 8
y	27	11	- 21	- 5

$(2x-1)$	1	3	-1	-3
x	1	2	0	-1

Vậy các cặp $(x; y)$ thoả mãn là $(-1; -5)$; $(0; -21)$; $(1; 27)$; $(2; 11)$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $x^2 - 3xy + 2 = y$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $x^2 - 3xy + 2 = y \Leftrightarrow x^2 + 2 = y(3x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2}{3x + 1}$

$$9y = \frac{9x^2 + 18}{3x + 1} = \frac{9x^2 - 1 + 19}{3x + 1} = 3x - 1 + \frac{19}{3x + 1}$$

Mà $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{19}{3x + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3x + 1)$ là ước của 19

Hay $3x + 1 = 19$ hoặc $3x + 1 = -19$ hoặc $3x + 1 = 1$ hoặc $3x + 1 = -1$.

Suy ra $x = 6$ (nhận) hoặc $x = -\frac{20}{3}$ (loại) hoặc $x = 0$ (nhận) hoặc $x = -\frac{2}{3}$ (loại).

Với $x = 6 \Rightarrow y = 2$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 2$

Vậy có 2 cặp số $(x; y)$ thoả là $(0; 2)$ và $(6; 2)$.

Cách 2. Ta có $x^2 - 3xy + 2 = y \Leftrightarrow 9x(x - 3y) + 3(x - 3y) - 3x + 18 = 0$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 27xy - 9y + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(3x + 1)(x - 3y) - (3x + 1) + 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)(3x - 9y - 1) = -19$$

Do x, y nguyên nên $3x + 1$ và $3x - 9y - 1$ là ước của 19.

Mà $3x + 1$ là số chia 3 dư 1 nên $3x + 1$ chỉ nhận 1 hoặc 19

Giải ra ta được $(x; y) = (0; 2); (6; 2)$

Câu 24. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn: $3x - y + xy - 10 = 0$.

Lời giải

Ta có: $3x - y + xy - 10 = 0$

$$P \quad xy + 3x - y - 10 = 0$$

$$P \quad x(y+3) - y - 3 - 7 = 0$$

$$P \quad x(y+3) - (y+3) = 7 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ $P \quad x-1 \in \mathbb{Z}; y+3 \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) $P \quad 7; x-1 \mid x-1 \in \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x-1$	1	-1	7	-7
$y+3$	7	-7	1	-1
x	2	0	8	-6
y	4	-10	-2	-4

$$(x, y) \in \{(2; 4), (0; -10), (8; -2), (-6; -4)\}$$

Vậy

Câu 25. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên dương của x, y sao cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x + 5y = xy \quad (x > 0; y > 0)$

$$P \quad xy - 5x - 5y = 0$$

$$P \quad x(y-5) - 5(y-5) = 25$$

$$P \quad (x-5)(y-5) = 25$$

Vì x, y nguyên dương nên $x-5, y-5$ là các ước của 25.

Ta có: $U(25) = \{\pm 1; \pm 5; \pm 25\}$

Ta có bảng giá trị:

$x-5$	1	-1	5	-5	25	-25
$y-5$	25	-25	5	-5	1	-1
x	6	4	10	0	30	-20
y	30	-20	10	0	6	4

Vì x, y nguyên dương nên ta có: $(x, y) \in \{(6; 30); (10; 10); (30; 6)\}$.

Câu 26. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x và y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

$$\frac{40}{8x} + \frac{2xy}{8x} = \frac{x}{8x}$$

$$40 + 2xy = x$$

$$40 = x(1 - 2y)$$

Suy ra x và $1 - 2y$ là ước của 40 ta có

$$40 = 1.40 = (-1).(-40) = 2.20 = (-2).(-20) = 5.8 = (-5).(-8)$$

mà $1 - 2y$ là số lẻ nên ta có các trường hợp sau

TH1: $\begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ x = 40 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 40 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ x = -40 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = -40 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} 1 - 2y = 5 \\ x = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = 8 \end{cases}$

TH4: $\begin{cases} 1 - 2y = -5 \\ x = -8 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x = -8 \end{cases}$

Vậy $(x, y) = \{(40; 0), (-40; 1), (8; -2), (-8; 3)\}$

Câu 27. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Cho các số nguyên x, y thỏa mãn $|x - 1| + y^2 = 1$ và $|y| < |x|$. Tính giá trị biểu thức $M = (x + y - 1)^{2023}$.

Lời giải

Do $x, y \in \mathbb{Z}; |x - 1| \geq 0; y^2 \geq 0$ và $|x - 1| + y^2 = 1$ nên ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} |x - 1| = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ (Loại vì không thỏa mãn điều kiện $|y| < |x|$)

TH2: $\begin{cases} |x - 1| = 1 \\ y^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |x - 1| = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (Vì $|y| < |x|$)

Thay $x = 2; y = 0$ vào biểu thức $M = (2 + 0 - 1)^{2023} = 1^{2023} = 1$.

Câu 28. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Tìm tất cả các giá trị x, y nguyên thỏa mãn: $5x^2 - 2xy + y^2 = 17$.

Lời giải

Ta có: $4 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (-1)^{2(n+1)} \pmod{5}$

$$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 5 \quad (1)$$

Lại có: $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (1)^{2(n+1)} \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 3 \quad (2)$$

Mà: 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(4^{2(n+1)} - 1) : 15$

Ta có: $5x^2 - 2xy + y^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 + 4x^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 = 17 - 4x^2 \quad (*)$

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow 17 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{17}{4}$

Mà x là số nguyên nên $x^2 \in \{0; 1; 4\}$

+ Với $x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 17$ (loại)

+ Với $x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 13$ (loại)

+) Với $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Khi đó $x^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 1$

Với $x = 2 \Rightarrow (2 - y)^2 = 1 \Rightarrow 2 - y = 1$ hoặc $2 - y = -1$

$$2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$$

+))

$$2 - y = -1 \Rightarrow y = 3$$

Với $x = -2 \Rightarrow (-2 - y)^2 = 1 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Rightarrow 2 + y = 1$ hoặc $2 + y = -1$

$$2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$$

+))

$$2 + y = -1 \Rightarrow y = -3$$

Vậy: $(x; y) \in \{(2; 1); (2; 3); (-2; -1); (-2; -3)\}$

Câu 29. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \frac{1}{4} + n = \overline{aaa}$.

Lời giải

$$1 + 2 + 3 + \frac{1}{4} + n = \overline{aaa}$$

$$\text{Đ } n(n+1):2 = 111.a$$

$$\text{Đ } n(n+1) = 37.2.3.a \quad (1)$$

Ta có vế trái ⁽¹⁾ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên $2.3.a = 36$ suy ra được $a = 6$ và $n = 36$.

Câu 30. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết $xy + 3x - y - 10 = 0$

Lời giải

$$3x - y + xy - 10 = 0 \text{ Đ } 3x + (xy - y) = 10$$

Ta có:

$$\text{Đ } 3x + y(x - 1) = 10 \text{ Đ } (3x - 3) + y(x - 1) = 10 - 3$$

$$\text{Đ } 3(x - 1) + y(x - 1) = 7 \text{ Đ } (x - 1)(y + 3) = 7$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \text{ Đ } x - 1; y + 3 \in \mathbb{Z}$. Do đó: $x - 1; y + 3 \in \text{Ư}(7)$

$$\text{Mà: } \text{Ư}(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$$

Mà:

Ta có bảng:

$x - 1$	- 7	- 1	1	7
$y + 3$	- 1	- 7	7	1
x	- 6	0	2	8
y	- 4	- 10	4	- 2
KL	Chọn	Chọn	Chọn	Chọn

$$(x, y) \in \{(-6; -4); (0; -10); (2; 4); (8; -2)\}$$

Vậy:

Câu 31. (HSG 7 quận Hà Đông, tỉnh Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y + 2xy - 27x + y = 0$.

Lời giải

$$x^2y + 2xy - 27x + y = 0 \text{ Đ } (x + 1)^2 y = 27x \text{ Đ } 27x : (x + 1)^2$$

Ta có:

$$(x, x + 1) = 1 \text{ Đ } 27 : (x + 1)^2$$

$$\text{Đ } (x + 1)^2 \in \text{Ư}(27) \text{ mà } (x + 1)^2 \text{ là số chính phương Đ } (x + 1)^2 \in \{1; 9\}$$

$$\text{Đ } x + 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\text{Đ } x \in \{-4; -2; 0; 2\}$$

Ta có bảng sau:

x	- 4	- 2	0	2
y	- 12	- 54	0	6

$$(x; y) \in \{(-4; -12); (-2; -54); (0; 0); (2; 6)\}$$

Vậy phương trình có nghiệm:

Câu 32. (HSG 7 Trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ nguyên biết rằng: $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{x-2}{8} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow (x-2) \cdot y = 8$$

Vì $x; y$ nguyên nên $x-2; y$ nguyên $\Rightarrow x-2; y \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Ta có bảng:

$x-2$	1	- 1	- 2	2	4	- 4	8	- 8
y	8	- 8	- 4	4	2	- 2	1	- 1
x	3	1	0	4	6	- 2	10	- 6

Vậy các cặp $x; y$ thỏa mãn là: $(3; 8); (1; - 8); (4; 4); (0; - 4); (6; 2); (- 2; - 2); (10; 1); (- 6; - 1)$

Câu 33. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 - xy + 1 = 2y - x$

Lời giải

$$x^3 - xy + 1 = 2y - x$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x + 1 = xy + 2y$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x + 1 = y(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^3 + x + 1}{x + 2}$$

Vì x, y là các số nguyên nên:

$$(x^3 + x + 1) : (x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 5x + 10 - 9) : (x + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 2) - 2x(x + 2) + 5(x + 2) - 9 : (x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 5) - 9 : (x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 5) : (x + 2)$$

Vì

$$\Leftrightarrow 9 : (x + 2)$$

$$\triangleright (x+2) \in \{1; 3; 9; -1; -3; -9\}$$

$$\triangleright x \in \{-1; 1; 7; -3; -5; -11\} \quad (\text{tmđk})$$

$$\text{* Với } x = -1 \text{ thì } y = \frac{(-1)^3 + (-1) + 1}{(-1) + 2} = -1 \quad (\text{tmđk})$$

$$\text{* Với } x = 1 \text{ thì } y = \frac{1^3 + 1 + 1}{1 + 2} = 1 \quad (\text{tmđk})$$

$$\text{* Với } x = 7 \text{ thì } y = \frac{7^3 + 7 + 1}{7 + 2} = 39 \quad (\text{tmđk})$$

$$\text{* Với } x = -5 \text{ thì } y = \frac{(-5)^3 + (-5) + 1}{(-5) + 2} = 43 \quad (\text{tmđk})$$

$$\text{* Với } x = -11 \text{ thì } y = \frac{(-11)^3 + (-11) + 1}{(-11) + 2} = 149 \quad (\text{tmđk})$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $\left| (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y$

Lời giải

$$\left| (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y \quad (1)$$

Ta có:

$$\text{Mà } \left| (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| \geq 0 \quad \text{nên suy ra } xy + y^2 - 4y \geq 0$$

$$\text{Do đó } (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \geq 0 \quad \text{vì } (x-y)^2 \geq 0 \quad \text{với mọi giá trị của } x, y.$$

Khi đó, từ (1) suy ra:

$$(x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) = xy + y^2 - 4y$$

$$\triangleright (x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$$

$$\triangleright (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) - (xy + y^2 - 4y) = 0$$

Ta lại có: $(x-y)^2 + xy + y^2 - 4y \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

$$\text{Do đó } (x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0 \quad \text{khi } (x-y)^2 = 0 \quad \text{và } xy + y^2 - 4y = 0$$

$$\text{Từ } (x-y)^2 = 0 \quad \text{suy ra: } x = y$$

Thay $x = y$ vào $xy + y^2 - 4y = 0$, ta được: $y^2 + y^2 - 4y = 0$
 $\Rightarrow 2y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 2y(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = 2$.

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (2; 2)\}$

Câu 35. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn: $x^2 - x(y + 5) = -4y - 9$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - x(y + 5) = -4y - 9 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = xy - 4y \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = y(x - 4)$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 9 : x - 4 \Rightarrow x(x - 4) - (x - 4) + 5 : x - 4 \Rightarrow 5 : x - 4 \Rightarrow x - 4 \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$$

Ta có bảng sau:

x	- 1	3	5	9
y	- 3	- 3	9	9
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$

Cách khác: Có thể viết đẳng thức đã cho về dạng: $(x - 4)(x - y - 1) = -5$

$x - 4$	- 5	- 1	1	5
x	- 1	3	5	9
$x - y - 1$	1	5	- 5	- 1
y	- 3	- 3	9	9
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$

Câu 36. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương n mà khi thay vào $A = \frac{3n+2}{n-1}$ thì A nhận được giá trị nguyên.

Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của n vừa tìm được bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$A = \frac{3n+2}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5 : n-1 \Rightarrow n-1 \in U(5)$$

$$\text{Đ } n-1 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$\text{Đ } n \in \{2; 0; 6; -4\}$$

Ta tìm được các giá trị n là: $6; -4; 2; 0$.

Mà n nguyên dương nên $n = 6; n = 2$.

Câu 37. (HSG 7 Hương Trà, 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức: $B = \frac{8-x}{x-3}(x-3)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$$

B có giá trị nhỏ nhất $\text{Đ } \frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất.

$\text{Đ } x-3$ là số nguyên âm lớn nhất.

$$\text{Đ } x-3 = -1$$

$$\text{Đ } x = 2$$

$$\text{Vậy } B_{\min} = \frac{5}{2-3} - 1 = -6 \text{ khi } x = 2.$$

Câu 38. (HSG 7 Mỹ Đức, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $3xy + 2x - 5y = 6$.

Lời giải

Ta có:

$$3xy + 2x - 5y = 6 \text{ Đ } x(3y+2) - 5y = 6 \text{ Đ } 3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$\text{Đ } 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \text{ Đ } 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8 \text{ Đ } (3x-5)(3y+2) = 8.$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \text{ Đ } (3x-5) \in \mathbb{Z}; (3y+2) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Đ } 3y+2 \in U(8) = \{1; -1; 2; -2; 4; -4; 8; -8\}$$

Mà $3y+2$ là số chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$.

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

$$(x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}.$$

Vậy

Câu 39. HSG 7 Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Cho biểu thức : $P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} (x^1 - 2023)$. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải

Ta có
$$P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} = \frac{3 - 2(x - 2023)}{x - 2023} = \frac{3}{x - 2023} - 2(x^1 - 2023)$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{3}{x - 2023}$ có giá trị nhỏ nhất.
 $\mathbb{P} x - 2023$ là số âm lớn nhất (vì x nguyên) $\mathbb{P} x - 2023 = -1 \mathbb{P} x = 2022$ (TM).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là -5 khi $x = 2022$.

Vậy GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Câu 40. (HSG 7 Hương Trà, 2022 - 2023)

$$P = \frac{4x - 7}{x - 2}; Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3}.$$

Cho hai biểu thức

Tính giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên.

Lời giải

* Ta có:
$$P = \frac{4x - 7}{x - 2} = 4 + \frac{1}{x - 2} (x^1 - 2)$$

$$x \in \mathbb{Z} \mathbb{P} x - 2 \in \mathbb{Z} \text{ để } P \text{ thì } \frac{1}{x - 2} \text{ nguyên } \mathbb{P} x - 2 \in U(1) \mathbb{P} x - 2 \in \{1; -1\}$$

Với

$$\mathbb{P} x \in \{3; 1\}.$$

* Ta có:
$$Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} (x^1 - 3)$$

* Ta có:

$$Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} = \frac{3x(x - 3) + 2}{x - 3} = 3x + \frac{2}{x - 3}$$

$$\text{Để } Q \text{ nguyên thì } \frac{2}{x - 3} \text{ nguyên } \mathbb{P} x - 3 \in U(2) = \{1; -1; 2; -2\} \mathbb{P} x \in \{4; 2; 5; 1\}.$$

$$\text{Vậy để } Q \text{ nguyên thì } x \in \{4; 2; 5; 1\}.$$

Câu 41. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn: $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$.

Lời giải:

Ta có:

$$a \in \mathbb{Z}^+ \mathbb{P} 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 = a^2 \cdot (a + 3) + 5 > a + 3 = 5^c$$

$$\mathbb{P} 5^b > 5^c \mathbb{P} b > c$$

$$\mathbb{P} 5^b : 5^c$$

$$\vdash (a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3)$$

$$\vdash a^2(a + 3) + 5 : (a + 3)$$

$$\text{Vì } a^2(a + 3) : a + 3 \vdash 5 : a + 3 \vdash a + 3 \hat{=} U(5) \vdash a + 3 \hat{=} \{1; -1; 5; -5\} \quad (1)$$

$$\text{Do } a \hat{=} \mathbb{Z}^+ \vdash a + 3 \in \mathbb{Z}^+ \quad (2)$$

Do

$$\text{Từ (1) và (2) } \vdash a + 3 = 5 \vdash a = 2 \vdash 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^5.$$

$$25 = 5^b \vdash b = 2.$$

$$2 + 3 = 5^c \vdash c = 1.$$

$$\text{Vậy } a = 2, b = 2, c = 1.$$

Câu 42. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $10^x + 6y = 2023$.

Lời giải

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ và $10^x + 6y = 2023 \vdash 10^x = 2023 - 6y$ là số nguyên.

Suy ra: 10^x là số nguyên, từ đó $x \in \mathbb{N}$.

Khi đó: $10^x = 2023 - 6y$ là một số lẻ (vì $2023 \not\vdash 2; 6y \vdash 2 \vdash 10^x \not\vdash 2$).

Suy ra $x = 0$.

$$10^0 + 6y = 2023 \vdash 6y = 2022 \vdash y = 2022 : 6 = 337.$$

$$\text{Vậy } (x, y) = (0; 337).$$

Câu 43. (HSG 7 huyện ... 2022 – 2023)

Tìm giá trị nguyên dương x và y sao cho: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

Lời giải

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \vdash \frac{y - x}{xy} = \frac{1}{5}$$

$$\vdash xy = 5y - 5x$$

$$\vdash xy + 5x - 5y = 0$$

$$\vdash x(y + 5) - 5(y + 5) = -25$$

$$\vdash (y + 5)(x - 5) = -25$$

Vì x, y nguyên dương nên $y + 5 > 5$ và $x - 5; y + 5$ đều là ước của 25 , vậy chỉ có 1 trường hợp: $x - 5 = -1$ và $y + 5 = 25$

$$\vdash x = 4 \text{ và } y = 20$$

Vậy $x = 4$ và $y = 20$.

Câu 44. (HSG 7 Đồng Nai - Trường Thcs - Thpt Tri Thức, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 5y + xy = 2$.

Lời giải

$$x + 5y + xy = 2 \Leftrightarrow (x + yx) + (5y + 5) = 7 \Leftrightarrow (x + 5)(y + 1) = 7$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(y + 1) = 1.7 = 7.1 = (-1).(-7) = (-7).(-1)$$

$x + 5$	1	7	- 1	- 7
x	- 4	2	- 6	- 12
$y + 1$	7	1	- 7	- 1
y	6	0	- 8	- 2

Vậy có 4 cặp số nguyên cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 5y + xy = 2$ là:
 $(-4; 6); (2; 0); (-6; -8); (-12; -2)$.

Câu 45. (HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và b (n là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$

ii) $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{b}$

Lời giải

Vì $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và b thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$.

Suy ra $b^3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{b} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - \frac{1}{b} \geq \frac{5}{3}$ (*)

Lại có: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_3} < \dots < \frac{1}{a_n} < 1$.

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{a_1} < 1; 0 < 1 - \frac{1}{a_2} < 1; \dots; 0 < 1 - \frac{1}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$$
 (**)

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{b}$$

Từ (*) và (**) suy ra điều mâu thuẫn với

Vậy không tồn tại các số nguyên dương thỏa mãn bài ra.

Câu 46. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x^2y - 1 = x^2 + 4y$.

Lời giải

$$x^2y - 1 = x^2 + 4y$$

$$x^2y - x^2 - 4y = 1$$

$$x^2y - x^2 - 4y + 4 = 1 + 4$$

$$x^2(y - 1) - 4(y - 1) = 5$$

$$(y - 1)(x^2 - 4) = 5$$

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $y - 1, x^2 - 4 \in U(5)$

$$U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$y - 1$	-5	-1	1	5
$x^2 - 4$	-1	-5	5	1
y	-4	0	2	6
x^2	$3(L)$	$-1(L)$	9	$5(L)$
x			± 3	

Vậy các cặp số (x, y) thỏa mãn là $(3; 2); (-3; 2)$.

Câu 47. (HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Thống Nhất, 2022 - 2023)

Cho $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$. Tìm các số nguyên x để Q có giá trị nguyên?

Lời giải

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = \frac{2(12 - x) + 3}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{P} \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z} \mathbb{P} 3 \vdots 12 - x \mathbb{P} 12 - x \in U(3)$$

$$\mathbb{P} 12 - x \in \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\mathbb{P} x \in \{11; 9; 13; 15\}$$

$$\text{Vậy } x \in \{11; 9; 13; 15\}.$$

Câu 48. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023)

Tìm các số x, y nguyên dương biết: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 13$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - 6xy + 13y^2 = 13 \mathbb{P} x^2 - 3xy - 3xy + 9y^2 + 4y^2 = 13$$

$$\text{Đ } x(x-3y) - 3y(x-3y) = 13 - 4y^2 \text{ Đ } (x-3y) \cdot (x-3y) = 13 - 4y^2$$

$$\text{Đ } (x-3y)^2 = 13 - 4y^2 \quad (1)$$

Do $(x-3y)^2 \geq 0$ nên $13 - 4y^2 \geq 0 \text{ Đ } -4y^2 \geq -13 \text{ Đ } y^2 \leq \frac{13}{4} \text{ Đ } |y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2}$

Ngoài ra: (1) là các số nguyên dương nên $13 - 4y^2$ là số chính phương dương nên

$$y \in \{0; 1\} \quad \left(\text{Do } |y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2} \right)$$

Với $y = 0 \text{ Đ } (x-3 \cdot 0)^2 = 13 - 4 \cdot 0 \text{ Đ } x^2 = 13 \text{ Đ } x = \pm \sqrt{13} \text{ Đ } x \notin \mathbb{Z}$

$$y = 1 \text{ Đ } (x-3 \cdot 1)^2 = 13 - 4 \cdot 1 \text{ Đ } (x-3)^2 = 9 \text{ Đ } x-3 = \pm 3 \text{ Đ } \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

Vậy các cặp số x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0; 1); (6; 1)$.

Câu 49. (HSG 7 Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$.

Lời giải

+) Trường hợp $y < 0$, ta có:

$$VP = x^2 + x = x(x+1) \text{ là số nguyên.}$$

$$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1 \text{ không là số nguyên (vì } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ với } a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*).$$

Đ Trường hợp này loại.

+) Trường hợp $y = 0$, ta có: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1 \text{ Đ } x(x+1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2)(-1)$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x < x+1 \text{ Đ } x=1$ hoặc $x=-2$.

Khi $x=1$ thì $y=0$; khi $x=-2$ thì $y=0$.

+) Trường hợp $y > 0$, ta có:

$$VP = x^2 + x = x(x+1) \text{ là tích hai số nguyên liên tiếp nên } x^2 + x \text{ chia hết cho } 3 \text{ hoặc chia cho } 3 \text{ dư } 2.$$

$$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1 \text{ chia cho } 3 \text{ dư } 1.$$

Đ Trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$.

Câu 50. (HSG 7 Bá Thước, THCS thị trấn Cành Nàng, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$.

Lời giải

+ Với $x = 1$, ta có $1! = y^2 \Rightarrow 1 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{1; -1\}$.

+ Với $x = 2$, ta có $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow$ Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

+ Với $x = 3$, ta có $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{3; -3\}$.

+ Với $x \geq 4$, ta có $1! + 2! + 3! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$ có chữ số tận cùng là 3 (Vì $5!, 6!, \dots, x!$ đều có chữ số tận cùng là 0) nên không phải là số chính phương, còn y^2 lại là số chính phương $\Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là: $(x, y) \in \{(1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)\}$.

Câu 51. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường LƯU KHÁNH ĐÀM 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y biết $2017x^2 + 2018 = y^2$

Lời giải

Có $2016x^2 + 2018 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$ (*)

Từ (*) $\Rightarrow (y + x)(y - x)$ chẵn

Có $y + x + y - x = 2y$ chẵn

$\Rightarrow y + x, y - x$ cùng chẵn $\Rightarrow (y + x)(y - x) : 4$

Mà $2016x^2 + 2018$ không chia hết cho 4

Vậy không tìm được số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức trên

Câu 52. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện: $2^x + 2^y = 72$

Lời giải

Giả sử $x > y$, ta có: $2^x + 2^y = 2^y(2^{x-y} + 1) = 2^3 \cdot 9$

Do $2^{x-y} + 1$ là số lẻ nên $2^{x-y} + 1 \in \{1; 3; 9\}$

$2^{x-y} + 1 = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (loại)
$2^{x-y} + 1 = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (loại)
$2^{x-y} + 1 = 9$	$2^y = 2^3$ (thỏa mãn)

Với $2^y = 2^3$ và $2^{x-y} + 1 = 9 \Rightarrow y = 3$ và $x = 6$.

Vậy $x = 6; y = 3$

Câu 53. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương a, b, c biết rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b + c)$

Lời giải

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \quad (1) \quad \text{và} \quad a^2 = 2(b + c) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra a^2 chẵn $\Rightarrow a$ chẵn.

Từ (1) suy ra $a > b; a > c \Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow 4a > 2(b + c)$

Kết hợp với (2) $\Rightarrow a^2 < 4a \Rightarrow a < 4 \Rightarrow a = 2$ thay vào (2)

Ta được: $b + c = 2 \Rightarrow b = c = 1$ (vì b, c nguyên dương).

Thử lại thấy đúng, vậy $a = 2, b = c = 1$

Câu 54. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Lời giải

Gọi kích thước hai cạnh của hình chữ nhật đó là: a, b . ĐK: $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Theo bài ra ta có: $2(a + b) = ab$

$$2a + 2b = ab$$

$$2a - ab + 2b = 0$$

$$2a - ab - 4 + 2b = -4$$

$$a(2 - b) - 2(2 - b) = -4$$

$$(2 - b)(a - 2) = -4$$

Vì a, b là các số nguyên dương nên $2 - b \in \mathbb{Z}, a - 2 \in \mathbb{Z}$

Để $(2 - b)(a - 2) = -4$ thì $2 - b$ và $a - 2$ phải là ước của -4

$$\text{Có } U(-4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Lập bảng ta được: $(a; b) \in \{(3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$

Vậy với $(a; b) \in \{(3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$

Câu 55. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Đức Nông 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $x; y$ sao cho: $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

Lời giải

$$2^x + 2^y = 2^{x+y}$$

$$2^x + 2^y = 2^x \cdot 2^y$$

$$2^x(1 - 2^y) - (1 - 2^y) + 1 = 0$$

$$(1 - 2^y)(2^x - 1) = -1$$

$$(2^y - 1)(2^x - 1) = 1 \quad (1)$$

Vì x, y là số tự nhiên (bài cho) nên:

$$(2^y - 1)(2^x - 1) = 1.1$$

Từ (1) ta suy ra:

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 1 \\ 2^y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{TMDK})$$

Vậy $x = 1; y = 1$.

Câu 56. (HSG 7 huyện Y Yên 2021 - 2022)

Tìm tất cả các giá trị nguyên x, y thỏa mãn: $2^x + 37 = |y - 45| + y - 45$.

Lời giải

Với mọi giá trị của y nguyên thì $|y - 45|$ và $y - 45$ luôn có cùng tính chẵn hay tính lẻ, suy ra $|y - 45| + y - 45$ luôn có giá trị là số nguyên chẵn.

Do đó $2^x + 37$ là số nguyên chẵn, mà 37 là số lẻ nên 2^x là số nguyên lẻ $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Với $x = 0$, ta có $1 + 37 = |y - 45| + y - 45 \Rightarrow |y - 45| + (y - 45) = 38 \quad (*)$

+ Trường hợp 1: $(y - 45) < 0 \Rightarrow |y - 45| = -(y - 45)$

Khi đó (*) trở thành: $-(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow 0 = 38$, điều này vô lý.

+ Trường hợp 2: $(y - 45) \geq 0 \Rightarrow |y - 45| = (y - 45)$

Khi đó (*) trở thành: $(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow y - 45 = 19 \Rightarrow y = 64$ (chọn)

Vậy $(x; y) = (0; 64)$.

Câu 57. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết: $xy + 3x - 2y = 11$.

Lời giải

Ta có: $xy + 3x - 2y = 11$

$$xy + 3x - 2y - 6 = 5$$

$$x(y + 3) - 2(y + 3) = 5$$

$$(x - 2)(y + 3) = 5$$

Vì x, y là số nguyên nên $5 : (x - 2) \Rightarrow (x - 2) \in \{1; -1; 5; -5\}$

Ta có bảng sau:

$x -$	1	- 1	5	-
$y +$	5	- 5	1	-
x	3	1	7	-
y	2	- 8	- 2	-

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là: $(3; 2); (1; - 8); (7; - 2); (- 3; - 4)$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{x-2}$. Tìm số nguyên x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

ĐK: $x \neq 2$

$$A = \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$$

A có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{5}{x-2}$ nguyên.

Do x nguyên nên $x-2 \in U(5) = \{-1; 1; -5; 5\}$

Lập bảng ta được: $x \in \{-1; 1; 3; 7\}$ (TMĐK)

Vậy $x \in \{-1; 1; 3; 7\}$ thì A có giá trị nguyên.

Câu 59. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $2xy - y = 4x + 3$

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$2xy - y = 4x + 3$$

$$2xy - 4x - y + 2 = 5$$

$$2x(y-2) - (y-2) = 5$$

$$(2x-1)(y-2) = 5$$

$$(2x-1)(y-2) = 5 = 1.5 = 5.1 = (-1).(-5) = (-5).(-1)$$

Lập bảng ta tìm được: $(x; y) \in \{(1; 7), (3; 3), (-2; 1), (0; -3)\}$

Vậy: $(x; y) \in \{(1; 7), (3; 3), (-2; 1), (0; -3)\}$

Câu 60. (HSG 7 huyện Quan Hoa 2021 - 2022)

Tìm x, y nguyên biết: $100 - y^2 = 8(x-2021)^2$

Lời giải

Tìm x, y nguyên biết: $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

Ta có: $100 - y^2 \in 100$

$\Rightarrow 8(x - 2021)^2 \in 100$

$\Rightarrow (x - 2021)^2 \in 12,5$

Do x, y nguyên nên $(x - 2021)^2$ và y^2 là số chính phương, nên

+ TH 1: $(x - 2021)^2 = 0 \Rightarrow x = 2021$ thay vào $\Rightarrow y = 10; y = -10$

+ TH 2: $(x - 2021)^2 = 1 \Rightarrow x = 2022$ hoặc $x = 2020$

Khi đó: $y^2 = 92$ (loại)

+ TH 3: $(x - 2021)^2 = 4 \Rightarrow x = 2023$ hoặc $x = 2019$

Khi đó: $y^2 = 68$ (loại)

+ TH 4: $(x - 2021)^2 = 9 \Rightarrow x = 2024$ hoặc $x = 2018$

Khi đó: $y^2 = 28$ (loại)

Vậy $x = 2021; y = 10$ và $x = 2021; y = -10$

Câu 61. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn: $2^x + 37 = |y - 45| + y - 45$

Lời giải

Nhận xét:

+ Với $a \geq 0$ thì $|a| + a = 2a$.

+ Với $a < 0$ thì $|a| + a = -a + a = 0$.

Do đó $|a| + a$ luôn là số chẵn với " $a \in \mathbb{Z}$ "

Áp dụng nhận xét trên $\Rightarrow |y - 45| + y - 45$ là số chẵn " $y \in \mathbb{Z}$ "

$\Rightarrow 2^x + 37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^x$ là số lẻ $\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow |y - 45| + y - 45 = 38$

+ Nếu $y < 45 \Rightarrow -(y - 45) + y - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$ (loại)

+ Nếu $y \geq 45 \Rightarrow 2(y - 45) = 38 \Rightarrow y - 45 = 19 \Rightarrow y = 64$ (thỏa mãn)

Vậy $(x, y) = (0; 64)$

Câu 62. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Như Thanh 2021 - 2022)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 y = 3 + 2xy + x$

Lời giải

Ta có: $x^2y = 3 + 2xy + x$

$$\Leftrightarrow x^2y - 2xy - x = 3$$

$$\Leftrightarrow x(xy - 2y - 1) = 3$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x; xy - 2y - 1 \in \mathbb{Z}$

Mà $3 = 1.3 = (-1).(-3)$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = 1 \\ xy - 2y - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 2y - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\begin{cases} x = 3 \\ xy - 2y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3y - 2y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases} x = -1 \\ xy - 2y - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -y - 2y - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$ (loại)

Trường hợp 4: $\begin{cases} x = -3 \\ xy - 2y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -3y - 2y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $(1; -4), (3; 2), (-3; 0)$.

Câu 63. (HSG 7 huyện Thanh Miện, Hải Dương 2021 - 2022)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$.

Lời giải

Ta có: $xy + 2x - y = 5$

$$\Leftrightarrow x(y + 2) - (y + 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(x - 1) = 3$$

Ta có: $3 = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

Lập bảng

$y + 2$	3	1	- 1	- 3
$x - 1$	1	3	- 3	- 1
x	2	4	- 2	0
y	1	- 1	- 3	- 5

Vậy: $(x; y) \in \{(2; 1); (4; - 1); (- 2; - 3); (0; - 5)\}$

Câu 64. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Chương Mỹ 2021 - 2022)

Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

Ta có $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-1; y+3 \in \mathbb{Z}$

Mà $3 = 1.3 = (-1).(-3)$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-1=1 \\ y+3=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-1=-1 \\ y+3=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases} x-1=3 \\ y+3=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$\begin{cases} x-1=-3 \\ y+3=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 4:

$(x; y)$ là $(2; 0); (0; -6); (4; -2); (-2; -4)$

Vậy các cặp số nguyên

Câu 65. (HSG 7 huyện Cao Lộc 2012 - 2022)

Tìm số nguyên x, y thỏa mãn: $x + xy + y = 2$

Lời giải

Ta có: $x + xy + y = 2$

$$x(y+1) + y+1 - 1 = 2$$

$$(y+1)(x+1) = 3$$

Với x, y nguyên $\Rightarrow y+1; x+1$ là các số nguyên

$\Rightarrow y+1; x+1$ là các ước của 3

Ta có bảng giá trị (x, y) như sau:

$x+1$	1	3	-3	-1
$y+1$	3	1	-1	-3
x	0	2	-4	-2
y	2	0	-2	-4

Vậy các cặp số (x, y) cần tìm là $(x; y) = \{(0; 2); (2; 0); (-4; -2); (-2; -4)\}$

Câu 66. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2017 - 2018)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2xy + 3x = 4$

Lời giải

$$2xy + 3x = 4 \Leftrightarrow x(2y + 3) = 4$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x \mid 4 \Rightarrow x \in \{1; -1; 2; -2; 4; -4\}$ và $2y + 3$ là số lẻ.

+ Nếu $x = 1 \Rightarrow 2y + 3 = 4$ (loại)

+ Nếu $x = -1 \Rightarrow 2y + 3 = -4$ (loại)

+ Nếu $x = 2 \Rightarrow 2y + 3 = 2$ (loại)

+ Nếu $x = -2 \Rightarrow 2y + 3 = -2$ (loại)

+ Nếu $x = 4 \Rightarrow 2y + 3 = 1 \Rightarrow y = -1$ (thỏa mãn)

+ Nếu $x = -4 \Rightarrow 2y + 3 = -1 \Rightarrow y = -2$ (thỏa mãn)

Vậy $(x, y) \in \{(-4; -2); (4; -1)\}$.

Câu 67. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x, y biết rằng: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

Ta có $xy + 2x - y = 5 \Leftrightarrow (y + 2)(x - 1) = 3$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y + 2 \in \mathbb{Z}; x - 1 \in \mathbb{Z}$, nên ta có bảng:

$x - 1$	1	3	-1	-3
$y + 2$	3	2	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	1	-1	-5	-3

Kết hợp với ĐK ta được $(x, y) \in \{(2; 1); (4; -1); (0; -5); (-2; -3)\}$

Câu 68. (HSG 7 thành phố Thái Bình, trường Trần Lãm 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $A = \frac{7x - 8}{2x - 3}$ với $x \neq \frac{3}{2}$

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{7x - 8}{2x - 3} = \frac{\frac{7}{2}(2x - 3) - 8 + \frac{21}{2}}{2x - 3} = \frac{7}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x - 3} \quad (x \in \mathbb{Z})$

A lớn nhất khi $\frac{\frac{5}{2}}{2x - 3}$ lớn nhất khi $(2x - 3)$ là số nguyên dương nhỏ nhất

$\Rightarrow 2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$ (Thỏa mãn điều kiện x nguyên)

Thay $x=2$ vào biểu thức $A = \frac{7}{2} + \frac{5}{2x-3} = 6$

Vậy $x=2$ thì giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 6.

Câu 69. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - 6x + 8 = xy - 5y$

Lời giải

Ta có $x^2 - 6x + 8 = xy - 5y \Leftrightarrow y(x - 5) = x^2 - 6x + 8$

$$\Leftrightarrow x(x - 5) - (x - 5) + 3 - y(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x - y - 1) = -3$$

Vì x, y là các số nguyên nên $x - 5, x - y - 1 \in \mathbb{Z}$ $\bar{\cup} (-3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng sau

$x - 5$	1	-1	3	-3
$x - y - 1$	-3	3	-1	1
x	6	4	8	2
y	8	0	8	0

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn bài toán là $(6; 8), (4; 0), (8; 8), (2; 0)$

Câu 70. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2021 - 2022)

Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn $x^2 - x(y + 5) = -4y - 9$

Lời giải

Ta có $x^2 - x(y + 5) = -4y - 9$

$$x^2 - xy - 5x = -4y - 9$$

$$x^2 - 5x + 9 = xy - 4y$$

$$x^2 - 5x + 9 = y(x - 4)$$

Nếu $x=4$ thì suy ra $4^2 - 5 \cdot 4 + 9 = 0$ vô lý. Vậy $x \neq 4$

$$\text{Với } x \neq 4 \text{ ta có } y = \frac{x^2 - 5x + 9}{x - 4} = \frac{x^2 - 4x - x + 4 + 5}{x - 4} = x - 1 + \frac{5}{x - 4}$$

Do x nguyên nên $x - 1$ nguyên, do vậy để y nguyên thì $\frac{5}{x - 4}$ nguyên hay $5 : x - 4$

$$\Leftrightarrow x - 4 \in \{-5; -1; 1; 5\} \Leftrightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$$

Với $x = -1$ thì $y = -3$

Với $x = 3$ thì $y = -3$

Với $x = 9$ thì $y = 9$

Với $x = 5$ thì $y = 9$

Vậy $(x; y) \in \{(-1; -3); (3; -3); (5; 9); (9; 9)\}$

Câu 71. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2021)

Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } P = \frac{7n-8}{2n-3} \Rightarrow 2P = \frac{14n-16}{2n-3} = 7 + \frac{5}{2n-3}$$

P có GTLN $\Leftrightarrow 2P$ có GTLN $\Leftrightarrow \frac{5}{2n-3}$ có GTLN
 Vì $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n-3 \in \mathbb{N}$ và $2n-3$ là số tự nhiên lẻ
 $\Rightarrow 2n-3=1 \Rightarrow n=2$

Vậy P có GTLN bằng 6 khi $n=2$

Câu 72. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2021)

Tìm số nguyên $x; y$ sao cho $x - 2xy + y = 0$

Lời giải

Ta có: $x - 2xy + y = 0 \Rightarrow 2x - 4xy + 2y = 0 \Rightarrow (2x-1) - 2y(2x-1) = -1 \Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1$

Vì $x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-1); (1-2y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1 = 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1$

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2x-1=1 \\ 1-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2x-1=-1 \\ 1-2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy: $(x; y) \in \{(1; 1); (0; 0)\}$

Câu 73. (HSG 7 huyện Lý Nhân 2021 - 2022)

Tìm số nguyên y để biểu thức $D = |y-4| + |y-10|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a+b|$.

Dấu “=” xảy ra khi a, b cùng dấu hoặc ít nhất một số bằng 0.

Áp dụng $D = |y-4| + |y-10| = |y-4| + |-y+10| \geq |y-4+10-y| \geq 6$

Dấu “=” xảy ra khi $(y-4)(10-y) \geq 0 \Rightarrow 4 \leq y \leq 10$.

Vì y nguyên nên $y = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Câu 74. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$

Lời giải

$$4x - 5y - 6xy + 7 = 0$$

$$(4x - 6xy) - 5y + 7 = 0$$

$$2x(2 - 3y) + \frac{5}{3}(2 - 3y) + \frac{11}{3} = 0$$

$$6x(2 - 3y) + 5(2 - 3y) = -11$$

$$(2 - 3y)(6x + 5) = -11$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} 2 - 3y \in \mathbb{Z} \\ 6x + 5 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

Ta có bảng sau:

$2 - 3y$	- 1	11	1	- 11
$6x + 5$	11	- 1	- 11	1
y	1	- 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
x	1	- 1	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 1)$ và $(-1; -3)$

Câu 75. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

Tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là $\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.

$$\text{Vì } 1 \in \mathbb{Z}, \frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x-1 \in \{1, 2, -1, -2\}$$

$$\Rightarrow x \in \{2, 3, 0, -1\}$$

Vậy $x \in \{2, 3, 0, -1\}$

Câu 76. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Tìm các cặp số nguyên dương $(a; b)$ biết: $3a - b + ab = 8$.

Lời giải

Ta có $3a - b + ab = 8$

$$(ab - b) + (3a - 3) = 5$$

$$b(a - 1) + 3(a - 1) = 5$$

$$(a - 1)(b + 3) = 5$$

Lập bảng ta có:

$a - 1$	1	5	- 1	- 5
a	2	6	0	- 4
$b + 3$	5	1	- 5	- 1
b	2	- 2	- 8	- 4
Xét	Thỏa mãn	Loại	Loại	Loại

Vậy các cặp số nguyên dương $(a; b)$ cần tìm là $(2; 2)$.

Câu 77. (HSG 7 huyện Cát Tiên, 2018 - 2019)

Tìm các số nguyên x để biểu thức sau có giá trị là một số nguyên $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$.

Lời giải

Biểu thức $y = \frac{2x - 3}{x - 2}$ có giá trị nguyên $\hat{=} 2x - 3 : x - 2$

$$\vdash 2(x - 2) + 1 : x - 2 \vdash 1 : x - 2 \vdash x - 2 = 1 \text{ hoặc } x - 2 = - 1 \vdash x = 3 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy $x \in \{3; 1\}$

Câu 78. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Tìm cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn: $x - 2xy + y - 3 = 0$.

Lời giải

Tìm cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn: $x - 2xy + y - 3 = 0$

Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$

$$\vdash x(1 - 2y) + y = 3$$

$$\vdash 2x(1 - 2y) + 2y = 6$$

$$\vdash 2x(1 - 2y) + 2y - 1 = 6 - 1$$

$$\text{Đ } (2x - 1)(1 - 2y) = 5 \quad (1)$$

$$\text{Đ } 2x - 1 \in \mathbb{Z} \quad (vì \ x, y \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Đ } 2x - 1 \in \{1; -1; 5; -5\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$2x - 1$	1	5	- 1	- 5
$1 - 2y$	5	1	- 5	- 1
x	1	3	0	- 2
y	- 2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(1; -2), (0; 3), (3; 0), (-2; 1)\}$

Câu 79. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x và y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có: $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{4} - \frac{y}{2} \Rightarrow x(1 - 2y) = 20$

Vì x và y nguyên mà $1 - 2y$ là số lẻ nên ta có bảng sau:

x	- 20	20	- 4	4
$1 - 2y$	1	- 1	- 5	5
y	0	1	3	- 2

Vậy ta có các cặp số $(x; y) \in \{-20; 0\}; (20; 1); (-4; 3); (4; -2)\}$

Câu 80. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x và y biết: $x + xy + y = 2$

Lời giải

Ta có: $x + xy + y = 2$

$$x(y + 1) + y + 1 = 3$$

$$(x + 1)(y + 1) = 3$$

Do x, y nguyên nên $x + 1, y + 1$ cũng nguyên.

Do đó: $x + 1 \in \mathbb{Z} \quad (vì \ x, y \in \mathbb{Z})$.

$$\mathbb{P} \ x+1 \in \{1; -1; 3; -3\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$x+1$	1	-1	3	-3
$y+1$	3	-3	1	-1
x	0	-2	2	-4
y	2	-4	0	-2
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x; y) \in \{(0; 2); (2; 0); (-2; -4); (-4; -2)\}$

Câu 81. (HSG 7 trường Hồng Đà, huyện Tam Nông 2015 - 2016)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x - 2xy + y = 0$

Lời giải

$$x - 2xy + y = 0$$

$$\mathbb{P} \ 2x - 4xy + 2y - 1 = -1$$

$$\mathbb{P} \ 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = -1$$

$$\mathbb{P} \ (2x - 1)(1 - 2y) = -1 \quad \mathbb{P} \ 2x - 1 \in U(1) = \{1; -1\}$$

$$+ \text{ Với } 2x - 1 = 1 \text{ thì } 1 - 2y = -1 \quad \mathbb{P} \ x = 1; y = 1$$

$$+ \text{ Với } 2x - 1 = -1 \text{ thì } 1 - 2y = 1 \quad \mathbb{P} \ x = 0; y = 0$$

Vậy $(x, y) \in \{(0; 0); (1; 1)\}$

Câu 82. (HSG 7 Huyện Sơn Dương - 2016 - 2017)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x + xy + y = 9$

Lời giải

$$\text{Từ } x + xy + y = 9 \quad \mathbb{P} \ x(y + 1) + (y + 1) = 10$$

$$\mathbb{P} \ (y + 1)(x + 1) = 10$$

$$\mathbb{P} \ (x + 1) \in U(10) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$$

Ta có bảng giá trị:

$x+1$	-1	1	-2	2	-5	5	-10	10
x	-2	0	-3	1	-6	4	-11	9
$y+1$	-10	10	-5	5	-2	2	-1	1
y	-11	9	-6	4	-1	1	-2	0

Vậy $(x; y) \in \{(-2; -11), (0; 9), (-3; -6), (1; 4), (-6; -1), (4; 1), (-11; -2), (9; 0)\}$

Câu 83. (HSG 7 Huyện Minh An 2016 - 2017)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

Ta có: $xy + 2x - y = 5$

$$\Rightarrow x(y+2) - (y+2) = 3$$

$$\Rightarrow (x-1)(y+2) = 3$$

$$\Rightarrow (y+2) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Ta có bảng giá trị:

$y+2$	3	1	-1	-3
$x-1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1), (4; -1), (-2; -3), (0; -5)\}$

Câu 84. (HSG 7 trường Tam Hưng 2013 - 2014)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn:

a) $2^m - 2^n = 2048$

b) $3m + 4n - mn = 16$

Lời giải

a) $2^m - 2^n = 2048 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^{11}$

Do $2^m - 2^n = 2048$ nên $m > n$

Khi đó $2^{m-n} - 1$ là số lẻ

+ Nếu $2^{m-n} - 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 2^n=2^{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ n=11 \end{cases}$

+ Nếu $2^{m-n} - 1 > 1 \Rightarrow 2^{m-n} > 2 \Rightarrow m-n > 1$

Khi đó $2^{m-n} - 1$ không chia hết cho 2

Mà $2^n(2^{m-n} - 1) = 2^{11}$, $m, n \in \mathbb{Z}$

Suy ra vô lý

Vậy $m = 12; n = 11$

b) $3m + 4n - mn = 16$

$$3m - mn + 4n - 12 = 4$$

$$(3 - n)(m - 4) = 4$$

$$\mathbb{P} (3 - n) \in \mathbb{U}(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

$3 - n$	- 1	1	- 2	2	- 4	4
n	4	2	5	1	7	- 1
$m - 4$	- 4	4	- 2	2	- 1	1
m	0	8	2	6	3	5

$$(m; n) \in \{(0; 4), (8; 2), (2; 5), (6; 1), (3; 7), (5; - 1)\}$$

Vậy

Câu 85. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

Lời giải

$$x^2 + 2x - 8y^2 = 41$$

$$\mathbb{P} (x + 1)^2 = 42 + 8y^2$$

Ta thấy $(x + 1)^2$ là số chẵn $\mathbb{P} (x + 1)^2$ chia hết cho 4

Mà $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

Câu 86. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $3x(3y - 2) + 3y = 9$

Lời giải

$$3x(3y - 2) + 3y = 9$$

$$\mathbb{P} 3x(3y - 2) + 3y - 2 = 7$$

$$\mathbb{P} (3y - 2)(3x + 1) = 7$$

$\mathbb{P} (3y - 2)$ là ước tự nhiên của 7

Ta có bảng giá trị:

$3y - 2$	7	1	- 1	- 7
$3x + 1$	1	7	- 7	- 1
x	0	2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$
y	3	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Loại
----------	----------	----------	------	------

Vậy $(x, y) \in \{(0; 3); (2; 1)\}$

Câu 87. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ấn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết rằng $2xy + 5x + 3y = 1$

Lời giải

Ta có:

$$2xy + 5x + 3y = 1$$

$$4xy + 10x + 6y = 2$$

$$2x(2y + 5) + 3(2y + 5) = 17$$

$$(2x + 3)(2y + 5) = 17$$

Vì x, y nguyên nên $2x + 3; 2y + 5$ nguyên

Lại có $17 = 1.17 = 17.1 = (-1).(-17) = (-17).(-1)$. Nên ta có:

Nếu $2x + 3 = 1 \wedge x = -1$ thì $2y + 5 = 17 \wedge y = 6$

Nếu $2x + 3 = -1 \wedge x = -2$ thì $2y + 5 = -17 \wedge y = -11$

Nếu $2x + 3 = 17 \wedge x = 7$ thì $2y + 5 = 1 \wedge y = -2$

Nếu $2x + 3 = -17 \wedge x = -10$ thì $2y + 5 = -1 \wedge y = -3$

Vậy các giá trị x, y cần tìm là: $(x; y) \in \{(-1; 6); (-2; -11); (7; -2); (-10; -3)\}$

Câu 88. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y sao cho $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

Ta có $xy + 2x - y = 5$

$$x(y + 2) - (y + 2) = 3$$

$$(x - 1)(y + 2) = 3$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1$ và $y + 2$ là ước của 3 $\Rightarrow x - 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x - 1$	- 3	- 1	1	3
$y + 2$	- 1	- 3	3	1
x	- 2	0	2	4
y	- 3	- 5	1	- 1

Vậy $(x; y) \in \{(0; -5); (-2; -3); (4; -1); (2; 1)\}$

Câu 89. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên a sao cho $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a + 1$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + 2a + 3 = a(a + 1) + (a + 1) + 2 = (a + 1)^2 + 2$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a + 1$ thì $2 \vdots a + 1$

$$\mathbb{P} \ a + 1 \in U(2) \mathbb{P} \ a + 1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$\mathbb{P} \ a \in \{-3; -2; 0; 1\}$$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a + 1$ thì $a \in \{-3; -2; 0; 1\}$

Câu 90. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $(x - 1)(x + 1) = 6y^2$

Lời giải

Vì $6y^2 \vdots 2$ nên $(x - 1)(x + 1) \vdots 2$

Vì $(x - 1) + (x + 1) = 2x \vdots 2$ nên $x - 1; x + 1$ cùng tính chẵn lẻ

Suy ra $x - 1; x + 1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó $(x - 1)(x + 1) \vdots 8$

$$\mathbb{P} \ 6y^2 \vdots 8 \mathbb{P} \ 3y^2 \vdots 4 \mathbb{P} \ y^2 \vdots 4 \mathbb{P} \ y \vdots 2$$

Mà y là số nguyên tố nên $y = 2$

- Thay $y = 2$ vào $(x - 1)(x + 1) = 6y^2 \mathbb{P} \ (x - 1)(x + 1) = 24 \mathbb{P} \ (x - 1)(x + 1) = 4.6$

$$\mathbb{P} \ x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$(x; y) = (5; 2)$$

Vậy

Câu 91. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $xy + 3x - y = 6$.

Lời giải

$$xy + 3x - y = 6$$

$$x(y + 3) - (y + 3) = 3$$

$$(x - 1)(y + 3) = 3$$

Vì $x; y$ nguyên nên $x - 1; y + 3$ nguyên

Lại có: $3 = 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

Ta có bảng sau:

$x - 1$	1	3	- 1	- 3
$y + 3$	3	1	- 3	- 1
x	2	4	0	- 2
y	0	- 2	- 6	- 4

Vậy $(x, y) \in \{(2; 0); (4; - 2); (0; - 6); (- 2; - 4)\}$

Câu 92. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên x, y thỏa mãn: $7(x - 2023)^2 = 23 - y^2$.

Lời giải

Vì $7(x - 2023)^2 \geq 0$ mà $7(x - 2023)^2 = 23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y^2 \leq 23$

Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Vì 7 là số nguyên tố $\nmid 23 - y^2$. Suy ra $y \in \{3; 4\}$

+ Với $y = 3 \Rightarrow 7(x - 2023)^2 = 14 \Rightarrow (x - 2023)^2 = 2$ (loại).

+ Với $y = 4 \Rightarrow 7(x - 2023)^2 = 7 \Rightarrow (x - 2023)^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2023 = - 1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ x = 2024 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $(x, y) \in \{(2022; 4); (2024; 4)\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 93. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $2x - xy + 3y = 9$.

Lời giải

Từ: $2x - xy + 3y = 9$

$\Rightarrow (2 - y)x + 3(y - 2) = 9 \Leftrightarrow (2 - y)(x - 3) = 3$

Suy ra $3 \mid (x - 3) \Rightarrow (x - 3)$ là ước của 3.

Suy ra $(x - 3) \in \{- 3; - 1; 1; 3\}$

Ta có bảng

$x - 3$	- 3	- 1	1	3
$2 - y$	- 1	- 3	3	1
x	0	2	4	6
y	3	5	- 1	1

	Loại	T/m	Loại	T/m
--	------	-----	------	-----

Vậy cặp số $(x = 2; y = 5)$ hoặc $(x = 6; y = 1)$ như trên thoả mãn điều kiện đề bài

Câu 94. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên m để $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương

Lời giải

Ta có $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

$$(m+1)(m^2+2m) = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra

$$k^2 \geq 0 \Rightarrow (m+1)(m^2+2m) \geq 0$$

Vì

$$m < -2 \Rightarrow (m+1)(m^2+2m) < 0 \quad (\text{loại})$$

Với $m \in \{-2; -1; 0\}$ ta đều có $k^2 = 0$ (thoả mãn)

Với $m > 0$ ta có $k^2 = (m+1)(m^2+2m)$

Gọi d là một ước chung nguyên tố của $m+1$ và m^2+2m

$$\begin{cases} m+1 : d \\ m^2+2m : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1 : d \\ m : d \end{cases} \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Suy ra

Nên $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương khi $m+1$ và m^2+2m đều là số chính phương.

Để m^2+2m là số chính phương thì $m^2+2m = a^2 \quad (a \in \mathbb{Z})$

$$(m+1)^2 - 1 = a^2 \Rightarrow (m+1+a)(m+1-a) = 1$$

$$\begin{cases} m+1+a = m+1-a \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \quad (\text{không thoả mãn})$$

Vậy $m \in \{-2; -1; 0\}$ thì $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

Câu 95. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y sao cho $x^2 + 2x + y = xy$.

Lời giải

$$x^2 + 2x + y = xy$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (4x - 4) + 3 + y = xy$$

$$\text{Đ } (x-1)^2 + 4(x-1) + y - xy = -3$$

$$\text{Đ } (x-1)^2 + 4(x-1) + y(1-x) = -3$$

$$\text{Đ } (x-1)^2 + 4(x-1) - y(x-1) = -3$$

$$\text{Đ } (x-1)(x-1) + 4 - y(x-1) = -3$$

$$\text{Đ } (x-1)[x+3-y] = -3$$

Ta có bảng giá trị:

$x-1$	1	-3	-1	3
$x+3-y$	-3	-1	x	-1
x	2	-2	0	4
y	8	0	0	8

$$(x,y) \in \{(2;8);(-2;0);(0;0);(4;8)\}$$

Vậy

Câu 96. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên x, y biết: $2xy - 10x - 5y = -15$

Lời giải

Ta có: $2xy - 10x - 5y = -15 \Leftrightarrow (2x-5)(y-5) = 10$

Vì x, y nguyên nên $2x-5$ và $y-5$ là ước của 10

Mà $2x-5$ là số nguyên lẻ nên $2x-5 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Lập bảng giá trị ta có:

$2x-5$	-5	-1	1	5
$y-5$	-2	-10	10	2
x	0	2	3	5
y	3	-5	15	7

$$(x,y) = \{(0;3);(2;-5);(3;15);(5;7)\}$$

Vậy

Câu 97. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

Lời giải

Ta có: $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) = 5$$

$$(x+1)^2 + (x+y)^2 = 5$$

Vì x, y nguyên nên ta có:

$$\text{TH1} \quad \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=2 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{TH2} \quad \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=-2 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH3} \quad \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=2 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH4} \quad \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=-2 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH5} \quad \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH6} \quad \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=-1 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH7} \quad \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH8} \quad \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=-1 \end{cases} \text{ p } \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy cặp số (x, y) thỏa mãn đề bài là: $(0; 2); (0; -2); (-2; 4); (-2; 0); (1; -2); (1; 0);$

$(-3; 4); (-3; 2)$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>